

Master Training Program : Royal Academy of Cambodia/CIMPA

Examen écrit: 26 Octobre 2006

Durée: 3 heures

*Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice non plus**Toutes les réponses doivent être justifiées.*

1. On rappelle que le développement en fraction continue d'un nombre réel irrationnel t , à savoir

$$t = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

avec $a_j \in \mathbf{Z}$ pour tout $j \geq 0$ et $a_j \geq 1$ pour $j \geq 1$, est noté $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Soit t le nombre réel dont le développement en fraction continue est $[1; 3, 1, 3, 1, 3, 1, \dots]$, ce qui signifie $a_{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = 3$ pour $n \geq 0$. Écrire un polynôme quadratique à coefficients rationnels qui s'annule en t .

2. Résoudre l'équation $y^2 - y = x^2$

- a) dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$,
b) dans $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

3. Résoudre l'équation $x^{15} = y^{21}$ dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

4. Soit $A = \mathbf{Z}[1/2]$ le sous-anneau de \mathbf{Q} engendré par $1/2$.

- a) Est-ce que A est un \mathbf{Z} -module de type fini?
b) Quelles sont les unités de A ?

5. Quels sont les sous- \mathbf{Z} -modules de type fini du groupe additif \mathbf{Q} ?

6. Quelles sont les racines rationnelles du polynôme $X^7 - X^6 + X^5 - X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$?

7. Soit k le corps de nombres $\mathbf{Q}(i, \sqrt{2})$.

a) Quel est le degré de k sur \mathbf{Q} ? Donner une base de k sur \mathbf{Q} . Trouver un élément $\gamma \in k$ tel que $k = \mathbf{Q}(\gamma)$. Quels sont les conjugués de γ sur \mathbf{Q} ?

b) Montrer que k est une extension galoisienne de \mathbf{Q} . Quel est le groupe de Galois? Quels sont les sous-corps de k ?

8. Soit $\zeta \in \mathbf{C}$ un nombre complexe qui satisfait $\zeta^5 = 1$ et $\zeta \neq 1$. Soit $K = \mathbf{Q}(\zeta)$.

a) Quel est le polynôme unitaire irréductible de ζ sur \mathbf{Q} ? Quels sont les conjugués de ζ sur \mathbf{Q} ? Quel est le groupe de Galois G de K sur \mathbf{Q} ? Quels sont les sous-groupes de G ?

b) Montrer que K contient un unique sous-corps L qui est de degré 2 sur \mathbf{Q} . Quel est l'anneau des entiers de L ? Quel est le discriminant? Quel est le groupe des unités?

Le corrigé sera bientôt disponible sur le site internet

<http://www.math.jussieu.fr/~miw/coursCambodge2006.html>