

Sous-groupes analytiques de variétés de groupe

by WALDSCHMIDT, Michel

in Seminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

volume 3; pp. 1 - 10



Göttingen State and University Library

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Göttingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online-systems to access or download a digitized document you accept these Terms and Conditions.

Reproductions of materials on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may they be further reproduced without written permission from the Göttingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Digitalisierungszentrum

37070 Göttingen

Germany

E-Mail: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Göttingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Digitalisierungszentrum

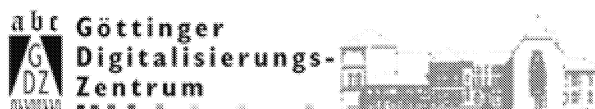
37070 Göttingen

Germany

E-Mail: gdz@www.sub.uni-goettingen.de



Göttingen State and University Library



SOUS-GROUPES ANALYTIQUES DE VARIETES DE GROUPE

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-

Soient G une variété de groupe définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques, et $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow G_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe à n paramètres de G , de dimension algébrique d . Nous nous proposons de majorer le rang r (sur \mathbb{Z}) des sous-groupes Γ de \mathbb{C}^n , dont l'image par φ est contenue dans l'ensemble $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ des points algébriques de G .

En ce qui concerne les sous-groupes à 1 paramètre ($n=1$), S. Lang a démontré [2] que, pour $d \geq 2$, on a $r \leq 2$ dans le cas linéaire, et $r \leq 6$ dans le cas abélien. On peut démontrer plus généralement [3] que, dans le cas linéaire, on a $r \cdot d \leq r+d$, et que dans le cas abélien, on a $r \cdot d \leq r+2d$ (en particulier $d \geq 2 \Rightarrow r \leq 4$).

Pour les sous-groupes à plusieurs paramètres ($n \geq 2$), E. Bombieri et S. Lang [1] ont démontré que, sous certaines hypothèses de répartition concernant Γ , quand $d \geq n+1$, on a $r \leq n^2 + 3n$ dans le cas linéaire, et $r \leq 2n^2 + 4n$ dans le cas abélien.

Nous montrerons que, sous les mêmes hypothèses, on a $r \cdot d \leq n(r+d)$ dans le cas linéaire (donc $d \geq n+1 \Rightarrow r \leq n^2 + n$), et $r \cdot d \leq n(r+2d)$ dans le cas abélien (donc $d \geq n+1 \Rightarrow r \leq 2n^2 + 2n$).

Pour obtenir ces résultats, on utilise des coordonnées projectives. $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_\ell)$, avec $\varphi_0 \neq 0$. Les fonctions φ_i sont entières dans \mathbb{C}^n , d'ordre inférieur ou égal à 1 dans le cas linéaire, à 2 dans le cas abélien, et la dimension algébrique de φ est égale au degré de transcendance sur \mathbb{Q} du corps $\mathbb{Q}(\varphi_1/\varphi_0, \dots, \varphi_\ell/\varphi_0)$. Comme les fonctions φ_i/φ_0 , ($1 \leq i \leq \ell$) prennent des valeurs dans un corps de nombres K aux points de Γ , on est amené à étudier le problème suivant :

Soient f_1, \dots, f_d des fonctions méromorphes dans \mathbb{C}^n , d'ordre inférieur ou égal à ρ_1, \dots, ρ_d respectivement, algébriquement indépendantes sur \mathbb{Q} . Soit Γ un sous-groupe de \mathbb{C}^n , de rang r (sur \mathbb{Z}), tel que $f_i(\Gamma) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ pour $1 \leq i \leq d$. Peut-on majorer r et d en fonction de ρ_1, \dots, ρ_d ?

La difficulté essentielle pour obtenir une réponse dans le cas $n > 1$ résidera dans l'extension du lemme de Schwarz aux fonctions de plusieurs variables. Cette extension fait l'objet du premier paragraphe ; nous obtiendrons ensuite au §. II. une réponse au problème précédent : sous des hypothèses convenables, on a

$$r \cdot d \leq n(r + \rho_1 + \dots + \rho_d) .$$

Puis au §. III. nous appliquerons ce résultat aux variétés de groupe.

§. I. - LEMME DE SCHWARZ

Le lemme classique de Schwarz peut s'énoncer sous la forme suivante :

LEMME A₁. - Soit f une fonction d'une variable complexe, holomorphe dans un voisinage ouvert d'un disque $|z| \leq R$ de \mathbb{C} , admettant un zéro à l'origine d'ordre $\geq s$. Alors :

$$|f(z)| \leq \left(\frac{|z|}{R}\right)^s \cdot |f|_R \quad \text{pour } |z| \leq R ,$$

où :

$$|f|_R = \sup_{|t|=R} |f(t)| .$$

Ce résultat se généralise très facilement aux fonctions de plusieurs variables complexes, à condition de définir l'ordre d'un zéro d'une fonction analytique. Une fonction f de n variables complexes, holomorphe au voisinage de 0, admet un zéro à l'origine d'ordre s si le développement de f au point 0 commence par un polynôme homogène de degré s.

Ainsi f possède un zéro à l'origine d'ordre $\geq s$ si et seulement si

$$\frac{\partial^{\sigma_1 + \dots + \sigma_n}}{\partial z_1^{\sigma_1} \dots \partial z_n^{\sigma_n}} f(0) = 0 \quad \text{pour } \sigma_1 + \dots + \sigma_n < s$$

(ces conditions sont au nombre de s si $n = 1$, et $\frac{n^s - 1}{n - 1}$ si $n > 1$).

LEMME A_n. - Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'une balle

$$B_R = \{ Z \in \mathbb{C}^n ; |Z| \leq R \}$$

de \mathbb{C}^n . Si f admet un zéro à l'origine d'ordre $\geq s$, alors :

$$|f(Z)| \leq \left(\frac{|Z|}{R}\right)^s \cdot |f|_R \quad \text{pour } |Z| \leq R .$$

(La norme $|Z|$ est la norme euclidienne :

$$|(z_1, \dots, z_n)|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 ;$$

mais on aurait pu aussi prendre la norme $\sup_{1 \leq i \leq n} (|z_i|)$, et remplacer la balle B_R par un polydisque de \mathbb{C}^n).

Le lemme A_n est une conséquence immédiate du lemme A_1 , appliqué à la fonction d'une variable complexe $F(t) = f(t, Z)$.

Dans le cas d'une variable ($n = 1$), on peut généraliser le lemme A_1 aux fonctions possédant de nombreux zéros, distincts ou confondus.

LEMME B_1 . - Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage d'un disque $|z| \leq R$ de \mathbb{C} , et admettant au moins s zéros (comptés avec leur ordre de multiplicité) dans un disque $|z| \leq r$, avec $r \leq \frac{R}{3}$. Alors :

$$\text{Log } |f|_r \leq \text{Log } |f|_R - s \cdot \text{Log } \frac{R}{3 \cdot r} .$$

En effet, si z_1, \dots, z_s sont des zéros de f dans le disque $|z| \leq r$, la fonction

$$g(z) = f(z) \cdot \prod_{i=1}^s (z - z_i)^{-1}$$

est holomorphe là où f est holomorphe ; donc

$$|g|_r \leq |g|_R .$$

Pour $|z| = r$, on majore $\prod_{i=1}^s |z - z_i|$ par $(2r)^s$, et, pour $|z| = R$, on minore $\prod_{i=1}^s |z - z_i|$ par $(R - r)^s$. Enfin, comme $R \geq 3r$, on obtient le résultat annoncé.

L'extension du lemme B_1 aux fonctions de plusieurs variables présente une difficulté évidente : les zéros d'une fonction de n variables ($n \geq 2$) n'étant pas isolés, la connaissance de nombreux zéros n'est pas suffisante pour majorer la fonction. Néanmoins la connaissance des zéros de f dans B_r , c'est-à-dire de

$$W_r = \{ Z \in B_r, f(Z) = 0 \} ,$$

permet d'obtenir un résultat. Pour cela on considère l'aire $A(W_r)$ (définie par la mesure de Hausdorff dans l'espace euclidien de dimension $2n-2$, ou encore par

$$A(W_r) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_r} \Delta \log |f| \, d\mu ,$$

où Δ est le laplacien, et μ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^{2n}$; cf [1]), et on divise par la mesure de Lebesgue de la balle $|Z| \leq r$ dans l'espace réel de dimension $2n-2$:

$$\Theta_W(r) = \frac{A(W_r)}{\frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!} \cdot r^{2n-2}} .$$

Alors on peut étendre le lemme B_1 au cas $n > 1$, à condition de remplacer s par $\Theta_W(r)$; ce résultat est dû à Bombieri [1]. Pour utiliser cet énoncé, il faut pouvoir minorer $\Theta_W(r)$ quand on connaît beaucoup de zéros bien répartis. On arrive ainsi au résultat suivant :

LEMME B_n . - Soit f une fonction holomorphe dans une balle B_R de \mathbb{C}^n , admettant des zéros Z_1, \dots, Z_s (comptés avec leur ordre de multiplicité) dans une balle B_r , avec $r < \frac{R}{7 \cdot n \cdot r}$. Soit :

$$\delta = \left\{ \frac{r}{2} ; \inf_{Z_i \neq Z_j} (|Z_i - Z_j|) \right\} .$$

Alors on a :

$$\text{Log } |f|_r \leq \text{Log } |f|_R - c(n) \cdot s \cdot \left(\frac{\delta}{r}\right)^{2n-2} \cdot \text{Log } \frac{R}{7 \cdot n \cdot r} ,$$

$$\text{où } c(n) = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!} .$$

A quelques constantes près, ce lemme contient les lemmes B_1 (quand $n = 1$) et A_n (quand $Z_1 = \dots = Z_s = 0$).

§. II. - VALEURS ALGÈBRIQUES DE FONCTIONS MÉROMORPHES

Soient K un corps de nombres, Γ un sous-groupe de \mathbb{C}^n de rang r sur \mathbb{Z} , engendré par u_1, \dots, u_r , et f une fonction entière telle que $f(\Gamma) \subset K$. Si f est d'ordre $\leq \rho$, c'est-à-dire si

$$\text{Log } |f|_R \ll R^\rho \quad \text{pour } R \rightarrow +\infty ,$$

alors, pour

$$\Gamma_N = \{k_1 u_1 + \dots + k_r u_r, k_i \in \mathbb{Z}, |k_i| \leq N\},$$

on a

$$\sup_{Z \in \Gamma_N} |f(Z)| \ll N^\rho \quad \text{pour } N \rightarrow +\infty.$$

On dira que f est d'ordre arithmétique inférieur ou égal à ρ sur Γ si les conjugués de $f(Z)$ vérifient la même inégalité, ainsi que le dénominateur de $f(Z)$ (plus petit entier positif d tel que $d \cdot f(Z)$ soit entier algébrique). Comme il peut être utile de travailler avec certains sous-ensembles S_N des Γ_N , on introduit les définitions suivantes :

Si α est un nombre algébrique, on note $|\bar{\alpha}|$ le maximum des valeurs absolues des conjugués de α , $d(\alpha)$ le dénominateur de α , et $t(\alpha)$ la taille de α , définie par

$$t(\alpha) = \max(\text{Log } d(\alpha), \text{Log } |\bar{\alpha}|).$$

Soit $(S_N)_{N \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de \mathbb{C}^n , de réunion S , et soit f une fonction méromorphe dans un voisinage U de S . Soient g et h deux fonctions analytiques dans U , telles que $f = \frac{g}{h}$ dans U . Nous dirons que f est d'ordre arithmétique inférieur ou égal à ρ sur (S_N) s'il existe un corps de nombres K tel que, pour $Z \in S_N$, on ait $h(Z) \neq 0$, $f(Z) \in K$, $t(f(Z)) \ll N^\rho$ et $\text{Log} \frac{1}{|h(Z)|} \ll N^\rho$.

THEOREME 1. - Soient $r, \lambda, \rho_1, \dots, \rho_d$ des nombres réels positifs, $(S_N)_{N \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de \mathbb{C}^n , f_1, \dots, f_d des fonctions méromorphes dans \mathbb{C}^n , d'ordre $\leq \rho_1, \dots, \rho_d$ et d'ordre arithmétique $\leq \rho_1, \dots, \rho_d$ sur (S_N) . On suppose

$$(1) \quad \max_{Z \in S_N} |Z| \ll N; \text{Card } S_N \gg N^r; \min_{\substack{u \neq v \\ u, v \in S_N}} |u-v| \gg N^{-\lambda}.$$

Si f_1, \dots, f_d sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{Q} , alors

$$(d-1)r \leq \rho_1 + \dots + \rho_d + 2d(n-1)(\lambda+1).$$

Les relations (1) impliquent :

$$r \leq 2n + 2n\lambda \quad ,$$

car, dans une balle B_R , le nombre v_R de points vérifiant $\min_{u \neq v} |u-v| \gg R^{-\lambda}$ vérifie

$$v_R \ll R^{2n} \cdot R^{2n\lambda} .$$

Remarquons que, pour $r \geq 2n$ et $\lambda = \frac{r}{2n} - 1$, la conclusion du théorème 1 s'écrit :

$$rd \leq n(r + \rho_1 + \dots + \rho_d) .$$

§. III. - SOUS-GROUPES A PLUSIEURS PARAMETRES DE VARIETES LINEAIRES OU ABELIENNES

Le théorème 1 permet de majorer le nombre de points \mathbb{Q} -linéairement indépendants où un sous-groupe à plusieurs paramètres prend des valeurs algébriques.

THEOREME 2. - Soient G une variété de groupe définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow G_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe à n paramètres de G , u_1, \dots, u_r des éléments \mathbb{Q} -linéairement indépendants de \mathbb{C}^n , tels que

$$\varphi(u_j) \in G_{\overline{\mathbb{Q}}} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq r .$$

On suppose

$$(2) \quad \min_{\substack{Z \in \Gamma_N \\ Z \neq 0}} |Z| \gg N^{-\lambda} \quad \text{pour } N \rightarrow +\infty ,$$

où

$$\Gamma_N = \{k_1 u_1 + \dots + k_r u_r ; k_j \in \mathbb{Z}, |k_j| \leq N\} .$$

Alors

1) si G est une variété linéaire, on a :

$$r(d-1) \leq d + 2d(n-1)(\lambda+1) ;$$

2) si G est une variété abélienne, on a :

$$r(d-1) \leq 2d(n\lambda + n - \lambda).$$

La relation (2) n'est possible que pour

$$\lambda \geq \max\left(0, \frac{r}{2n} - 1\right).$$

Inversement, si $r \geq 2n$, pour presque tout $(u_1, \dots, u_r) \in (\mathbb{C}^n)^r$, la relation (2) est vérifiée dès que $\lambda > \frac{r}{2n} - 1$ (cf. [1]); dans ce cas la conclusion du théorème 2 devient :

$$rd \leq n(r+d) \quad \text{dans le cas linéaire,}$$

et

$$rd \leq n(r+2d) \quad \text{dans le cas abélien.}$$

En particulier :

COROLLAIRE. - Soient G une variété de groupe, linéaire ou abélienne, définie sur le corps \mathbb{Q} des nombres algébriques, $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow G_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe à n paramètres, et Γ un sous-groupe de type fini de \mathbb{C}^n , de rang r sur \mathbb{Z} , tels que $\varphi(\Gamma)$ soit contenu dans le groupe $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ des points algébriques de G.

On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité (2) est vérifiée avec $\lambda = \frac{r}{2n} - 1 + \varepsilon$. Enfin on suppose que l'on a $r > n^2 + n$ dans le cas linéaire, et $r > 2n^2 + 2n$ dans le cas abélien. Alors $\varphi(\mathbb{C}^n)$ est un sous-groupe algébrique (fermé) de $G_{\mathbb{C}}$, de dimension algébrique n.

Ces résultats peuvent être améliorés si on fait l'hypothèse supplémentaire que les sous-groupes considérés ont une dérivée à l'origine algébrique [2].

Enfin on peut obtenir des énoncés analogues dans le cas p-adique ; le lemme de Schwarz correspondant est dû à J. P. Serre (cf. [2]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOMBIERI Enrico and LANG Serge. - Analytic subgroups of group varieties ; Invent. Math. 11, (1970), 1-14.
- [2] LANG Serge. - Transcendental numbers and diophantine approximations ; Bull. Amer. Math. Soc. , 77 (1971) 635-677.
- [3] WALDSCHMIDT Michel. - Transcendance dans les variétés de groupe ; Sém. Delange-Pisot-Poitou, (Théorie des nombres), 14e année, 1972/73, exposé n° 23, 16 p.

-:-:-

