

Zéros de fonctions entières et hypersurfaces algébriques.

by WALDSCHMIDT, Michel

in Seminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

volume 5; pp. 1 - 8



Göttingen State and University Library

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Göttingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online-systems to access or download a digitized document you accept these Terms and Conditions.

Reproductions of materials on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may they be further reproduced without written permission from the Göttingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek Göttingen

Digitalisierungszentrum

37070 Göttingen

Germany

E-Mail: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek Göttingen

Digitalisierungszentrum

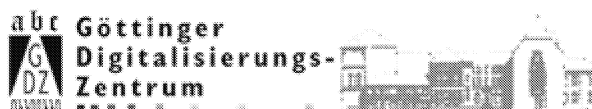
37070 Göttingen

Germany

E-Mail: gdz@www.sub.uni-goettingen.de



Göttingen State and University Library



ZÉROS DE FONCTIONS ENTIÈRES ET HYPERSURFACES ALGÈBRIQUES

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

1. -Hypersurfaces algébriques

a) Introduction

Une hypersurface algébrique dans \mathbb{C}^n est l'ensemble X_P des zéros d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, et le degré de P est appelé degré de l'hypersurface.

Quand $n = 1$, une hypersurface dans \mathbb{C} n'est rien d'autre qu'un sous ensemble fini de \mathbb{C} , et le degré de l'hypersurface est son nombre de points ; étant donné un sous ensemble fini S de \mathbb{C} et un entier K , les polynômes qui s'annulent K fois sur S (c'est - à - dire avec toutes leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à $K - 1$) sont les multiples de

$$\prod_{\zeta \in S} (z - \zeta)^K,$$

polynôme dont le degré est $K \cdot \text{Card. } S$. Plus généralement, on sait construire un polynôme prenant des valeurs données en des points donnés, et ayant un degré

inférieur ou égal au nombre de points (comptés éventuellement avec leur multiplicité, si on impose aussi les valeurs de certaines dérivées).

Toutes ces trivialisations concernant le cas $n = 1$ deviennent des problèmes difficiles, pour la plupart non résolus, quand $n \geq 2$. On sait que les zéros d'une fonction entière dans \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, ne sont jamais isolés, mais forment une variété analytique complexe de codimension 1. Evidemment tout sous-ensemble fini S de \mathbb{C}^n est contenu dans une hypersurface algébrique : si on cherche à résoudre le système d'équations

$$\sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n \leq \Delta} p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \zeta_1^{\lambda_1} \dots \zeta_n^{\lambda_n} = 0, \quad \underline{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in S,$$

aux inconnues $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}$, il suffit que le nombre d'inconnues, c'est-à-dire

$$\text{Card} \{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n; \lambda_1 + \dots + \lambda_n \leq \Delta \} = \binom{\Delta + n}{n}$$

soit supérieur au nombre d'équations : $\text{Card } S$, pour qu'il existe une solution non triviale.

Mais on ne sait pas construire un polynôme minimal (au sens du degré) prenant des valeurs données aux points de S . Plus précisément, on sait que le plus petit degré de tels polynômes dépend de manière essentielle de propriétés géométriques de S . Nous allons contourner cette difficulté de la manière suivante : au lieu de faire varier l'ensemble S , nous ne ferons varier que l'ordre de dérivation. Autrement dit au lieu d'étudier comment varie en fonction de S le nombre

$$\omega_n(S) = \min \{ \deg P; P \in \mathbb{C}[\underline{z}], P \neq 0, P(\underline{\zeta}) = 0 \text{ pour tout } \underline{\zeta} \in S \},$$

qui est le plus petit degré des hypersurfaces algébriques passant par S , nous étudierons la variation, en fonction de l'entier $K \geq 1$, du nombre

$$\omega_n(S, K) = \min \{ \deg P; P \in \mathbb{C}[\underline{z}], P \neq 0, D^k P(\underline{\zeta}) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^n, |k| \leq K \text{ et tout } \underline{\zeta} \in S \}$$

qui est le plus petit degré des hypersurfaces algébriques passant K fois par S .

Nous avons noté \underline{z} pour (z_1, \dots, z_n) , et D^k pour $\frac{\partial^{|k|}}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}$

quand $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$. D'autre part l'indice n de $\omega_n(S, K)$ rappelle que S est un sous-ensemble de \mathbb{C}^n .

b) Propriétés élémentaires de $\omega_n(S, K)$

Les deux relations

$$\omega_1(S, K) = K \cdot \text{Card } S \quad (\text{quand } S \subset \mathbb{C})$$

et

$$(1) \quad \omega_n(S, K_1 + K_2) \leq \omega_n(S, K_1) + \omega_n(S, K_2)$$

sont banales. D'autre part nous avons démontré que si $\Delta \geq 1$ vérifie

$$\binom{\Delta + n}{n} > \text{Card } S,$$

alors $\omega_n(S) \leq \Delta$. Le même argument montre que si $\Delta \geq 1$ vérifie

$$(2) \quad \binom{\Delta + n}{n} > \binom{K + n - 1}{n} \cdot \text{Card } S,$$

alors $\omega_n(S, K) \leq \Delta$.

Les propriétés (1) et (2) semblent être les seules relations générales vérifiées par $\omega_n(S, K)$. Autrement dit pour $n \geq 1$, $N \geq 1$ et $K \geq 1$ entiers, définissons $\Psi_n(N, K)$ par récurrence sur K de la manière suivante :

$$\Psi_n(N, 1) = \min \{ \Delta \in \mathbb{N}, \binom{\Delta + n}{n} > N \};$$

$$\Psi_n(N, K) = \min \{ \min \{ \Delta \in \mathbb{N}, \binom{\Delta + n}{n} > \binom{K + n - 1}{n} \cdot N \}$$

$$\min_{K_1 + K_2 = K} \{ \Psi_n(N, K_1) + \Psi_n(N, K_2) \} \}.$$

Alors évidemment pour tout sous ensemble fini S de \mathbb{C}^n , ayant N éléments,

et pour tout entier $K \geq 1$,

$$\omega_n(S, K) \leq \Psi_n(N, K),$$

et il est vraisemblable que pour tout n, N, K , il existe un ensemble S qui réalise l'égalité.

c) Le cas particulier d'un produit cartésien

Soient S_1, \dots, S_n des sous-ensembles finis de \mathbb{C} , et soit

$$S = S_1 \times \dots \times S_n \subset \mathbb{C}^n \quad \text{Alors}$$

$$\omega_n(S, K) = K \min_{1 \leq j \leq n} \text{Card } S_j.$$

(La démonstration se fait sans difficulté par récurrence sur n , une fois que l'on a remarqué que chaque polynôme

$$\prod_{\zeta_i \in S_i} (z_i - \zeta_i)^K, \quad (i = 1, \dots, n)$$

s'annule sur S à l'ordre K). Par conséquent, dans le cas particulier considéré,

$$\omega_n(S, K) = K \cdot \omega_n(S).$$

Cette dernière relation n'est pas vraie en général : si S contient exactement trois points non alignés dans \mathbb{C}^2 , alors $\omega_2(S, 2) = 3$, (Si $S = \{0, 0\}; (0, 1); (1, 1)$), considérer le polynôme $z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1 + z_2 - 1)$, tandis que $\omega_2(S) = 2$.

d) Le cas particulier d'une lattice

Soit Λ une lattice dans \mathbb{C}^n . Il existe deux constantes $c_1(\Lambda)$ et $c_2(\Lambda)$ telles que, pour tout $R > 0$, l'ensemble $\Lambda_R = \Lambda \cap R B$ (où B est la boule unité) vérifie

$$c_1(\Lambda) K R^2 \leq \omega_n(\Lambda_R, K) \leq c_2(\Lambda) K R^2.$$

L'inégalité de droite provient du principe des tiroirs, et celle de gauche est une conséquence facile de résultats classiques sur la mesure (introduite par Lelong)

associée au diviseur des zéros d'une fonction analytique dans \mathbb{C}^n (cf. [3], appendice 2).

e) Le cas général

Le comportement de la suite $\left(\frac{\omega_n(S, K)}{K} \right)$, $K \geq 1$ est explicité

dans le résultat suivant [4].

THÉORÈME 1. - Soit S un sous-ensemble fini de \mathbb{C}^n . Alors

1. - La suite $\frac{\omega_n(S, K)}{K}$ a une limite $\Omega_0 = \Omega_0(n, S)$ quand K tend
vers l'infini ;

2. - On a $\frac{\omega_n(S)}{n} - 2 \leq \Omega_0 \leq \omega_n(S)$

3. - Pour tout $K \geq 1$, $\omega_n(S, K) \geq \Omega_0 \cdot K$.

L'inégalité $\frac{\omega_n(S)}{n} - 2 \leq \Omega_0$ ne semble pas la meilleure possible. Les

problèmes suivants sont encore ouverts :

- améliorer cette inégalité, et trouver le meilleur résultat possible ;

- déterminer les ensembles S pour lesquels $\omega_n(S) = \Omega_0$; il

ne serait pas étonnant que cette classe soit très étendue ;

- est-il vrai que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble des $S \subset \mathbb{C}^n$ pour

lesquels $\Omega_0 \leq \omega(S) - \varepsilon$ est fini ?

- le théorème 1 est-il vrai pour d'autres corps que \mathbb{C} ? (par exemple \mathbb{R})

La démonstration actuelle [4], en tout cas, utilise de manière essentielle des propriétés assez fines de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes (cf. [2]).

2. - Zéros de fonctions entières

En utilisant au choix le lemme de Schwarz, la formule de Jensen ou la formule de Hermite, on peut démontrer facilement le résultat suivant sur les fonctions analytiques d'une variable complexe.

Soient S un sous-ensemble fini de \mathbb{C} , K un nombre entier positif, et r, R deux nombres réels tels que $R > r > \max_{\zeta \in S} |\zeta|$. Soit f une fonction entière dans \mathbb{C} , admettant chaque point de S comme zéro d'ordre $\geq K$. Alors

$$\text{Log } |f|_r \leq \text{Log } |f|_R - K \cdot \text{Card } S \cdot \text{Log } \frac{R}{3r}.$$

La généralisation de ce résultat à \mathbb{C}^n est la suivante [4].

THÉORÈME 2. - Soit S un sous ensemble fini de \mathbb{C}^n , et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre $r_0 = r_0(S, \varepsilon) > 0$ tel que si f est une fonction entière dans \mathbb{C}^n admettant chaque point de S comme zéro d'ordre au moins K , pour $r_0 < r < R$, on a

$$(3) \quad \text{Log } |f|_r \leq \text{Log } |f|_R - K (\Omega_0 - \varepsilon) \text{Log } \frac{R}{3^n r},$$

où Ω_0 est défini par le théorème 1.

L'hypothèse que f s'annule sur S avec un ordre au moins égal à K signi-

$$D^k f(\underline{\zeta}) = 0 \quad \text{pour} \quad \underline{\zeta} \in S \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N}^n, \quad |k| < K;$$

d'autre part $|f|_r$ est la borne supérieure de f sur la boule euclidienne de centre $\underline{0}$ et de rayon r . L'inégalité (3) est la meilleure possible : on ne peut pas remplacer $\Omega_0 - \varepsilon$ par Ω_0 . Autrement dit il arrive que $r_0(S, \varepsilon)$ tende vers l'infini quand ε tend vers 0.

3. - Une application

Cette étude était motivée à l'origine par des problèmes de transcendance. Dans le cas d'une variable, Daniel Bertrand [1] a démontré que si f est une fonction entière transcendante d'ordre 1, l'ensemble des nombres algébriques $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$, tels que $\frac{d^k}{dz^k} f(\zeta) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, est fini et a au plus 1 élément.

Quand on veut généraliser ce résultat à \mathbb{C}^n , on remarque par exemple que

l'ensemble des $(\zeta_1, \zeta_2) \in \overline{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathbb{Q}}$ pour lesquels la fonction $\exp(z_2 - z_1)$ prend des valeurs dans \mathbb{Z} avec toutes ses dérivées est contenu dans l'hypersurface algébrique

$$\{(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2 ; \zeta_1 = \zeta_2\}$$

Les théorèmes 1 et 2 permettent de démontrer [4] :

THÉORÈME 3. - Soit f une fonction entière transcendante dans \mathbb{C}^n , d'ordre l .
L'ensemble des $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ tels que

$$D^k f(\zeta) \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^n$$

est contenu dans une hypersurface algébrique de degré inférieur ou égal à $3n$.

En fait on peut conjecturer que ce degré est majoré par l , c'est-à-dire que l'ensemble considéré est contenu dans un hyperplan de \mathbb{C}^n .

Terminons par un problème qui aurait des conséquences intéressantes en théorie des nombres transcendants.

Soit f une fonction entière donc \mathbb{C}^n , et $1, \beta_1, \dots, \beta_n$ des nombres complexes \mathbb{Q} -linéairement indépendants. Soit N un entier positif tel que

$$f(h_1 + k\beta_1, \dots, h_n + k\beta_n) = 0$$

pour tout $(h_1, \dots, h_n, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $1 \leq h_j \leq N^n$, $1 \leq k \leq N^n$. Enfin notons

$r = N^n \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \{1 + |\beta_j|\}$, et soit $R > r$. Vérifier (ou infirmer) :

$$\text{Log } |f|_r \leq \text{Log } |f|_R - N^{n+1} \cdot \text{Log } \frac{R}{3nr} .$$

---:---:---

RÉFÉRENCES

- [1] Daniel BERTRAND, Equations différentielles algébriques et nombres transcendants dans les domaines complexes et p-adiques ;
 Thèse de 3e cycle, Université Paris VI, 1975.

19-08

- [2] Enrico BOMBIERI, Algebraic values of meromorphic maps ; Inventiones Math., 10 (1970), 267-287.
- [3] David W. MASSER, Elliptic functions and transcendence ; Lecture Notes in Math., 437 (1975) , Springer Verlag.
- [4] Michel WALDSCHMIDT, Propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables (II) ; Sémin. P. Lelong (Analyse), 16 e année, 1975/76.

Michel WALDSCHMIDT
"Analyse Complexe et Géométrie"
(Lab. Associé C N R S, n° 213)
Université P. et M. Curie (Paris VI)
Mathématiques, T. 45-46
4, Place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05