Un Demi-Siècle de Transcendance

par

Michel WALDSCHMIDT

Introduction : la préhistoire (avant 1950)

Certes, le premier objectif de la théorie des nombres transcendants est de démontrer que certains nombres ne sont pas algébriques, ou encore que certaines familles de nombres ne vérifient pas de relations polynomiales. C'est ainsi que le fameux résultat de F. Lindemann en 1882, selon lequel le nombre π est transcendant, apportait une réponse définitive au problème de la quadrature du cercle.

Cependant, tout n'est pas négatif dans cette théorie : même si le but final est le plus souvent de montrer que certaines relations n'existent pas, nous verrons que la théorie des nombres transcendants produit des estimations arithmétiques qui ont de nombreuses applications à diverses branches de la théorie des nombres. C'est à l'aide de méthodes de la théorie des *approximations diophantiennes* que C.L. Siegel démontre en 1929 son résultat sur la finitude des points entiers sur une courbe de genre ≥ 1. L'estimation diophantienne qu'il établit dans ce but raffine celle de A. Thue, et sera précisée par K.F. Roth en 1955 pour donner le *théorème de Thue-Siegel-Roth*. Un autre exemple est fourni par les minorations effectives données par A.O. Gel'fond pour des combinaisons linéaires de deux logarithmes de nombres algébriques. Ses démonstrations développent la méthode qui lui avait permis, en 1934, en même temps que Th. Schneider, de résoudre le septième problème de Hilbert sur la transcendance de α^β. Les conséquences que tire Gel'fond de son estimation vont jouer, dans la période qui nous intéresse, un rôle essentiel et motiver une grande partie des recherches récentes.

Pour les décrire, nous les regrouperons par “méthodes”, quitte à sacrifier l'ordre chronologique. Mais les liens entre les différents paragraphes qui vont suivre sont, nous le verrons, très étroits.

`Classification AMS : 11J    11D`
`Mots clefs :` Transcendance, Indépendance algébrique, Approximation Diophantienne, Équations Diophantiennes

1. Irrationalité et approximations rationnelles

La naissance du premier nombre transcendant remonte à 1844 (J. Liouville). Pour démontrer l'existence (de façon constructive) de nombres transcendants, Liouville établit une propriété que doit vérifier tout nombre algébrique α :

- *Il existe deux constantes positives C et κ, ne dépendant que de α, telles que, pour tout nombre rationnel p/q distinct de α, on ait*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^\kappa}. \tag{1}$$

Les constantes C et κ sont faciles à expliciter : par exemple on peut prendre pour κ le degré d de α (pour $\alpha = \sqrt[3]{2}$, racine du polynôme $z^3 - 2$, le degré d est 3).

Liouville montre ainsi qu'un nombre réel admettant de très bonnes approximations rationnelles est transcendant. Les nombres transcendants ont rapidement proliféré, puisqu'en 1874, G. Cantor montre que “presque tous” les nombres (réels ou complexes) sont transcendants. Cependant on rencontre souvent en analyse des constantes numériques dont on est incapable de déterminer la nature arithmétique : est-ce un nombre rationnel, algébrique irrationnel, ou bien transcendant ? Il faut bien avouer que nos connaissances dans ce domaine sont encore très fragmentaires. On s'attend, bien sûr, à ce que les nombres qui apparaissent ainsi au détour d'une formule analytique soient transcendants, “sauf cas exceptionnels”. Toute la difficulté consiste à cataloguer les cas exceptionnels, et il n'y a pas encore de théorie suffisamment générale apportant une réponse satisfaisante. La conjecture de S. Schanuel (voir § 3.3) permet de décider, de manière conjecturale, quelle est la nature arithmétique d'une constante de l'analyse, tant qu'elle ne fait intervenir que la fonction exponentielle complexe usuelle. Une autre conjecture, due à A. Grothendieck, prédit les relations de dépendance algébrique entre les coordonnées de périodes d'une *variété abélienne*. Y. André et D. Bertrand ont proposé un énoncé conjectural qui contient à la fois la conjecture de Schanuel et celle de Grothendieck ; ainsi, on sait quelles relations attendre entre des nombres complexes donnés par des valeurs de fonctions exponentielles ou logarithmes provenant de *groupes algébriques commutatifs*, et plus généralement de 1-*motifs*. Mais on ne dispose pas de telles conjectures pour d'autres fonctions transcendantes !

C'est pourquoi des progrès qui peuvent apparaître extrêmement restreints à des non spécialistes constituent en fait des conquêtes remarquables.

1.1 Mesures d'irrationalité

Un exemple bien connu est l'irrationalité du nombre

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} = 1.202\ldots$$

Dans un exposé resté célèbre aux Journées Arithmétiques de Luminy en juin 1978, R. Apéry présenta sa démonstration, de manière volontairement provocatrice, ce qui n'a pas manqué de susciter quelques remous dans l'auditoire ("ce n'est pas ainsi que l'on fait des maths"). Le principal reproche qui lui était alors adressé se révèle maintenant particulièrement injustifié : "il n'y a pas de rapports avec les autres recherches actuelles en mathématiques". Après les efforts de plusieurs mathématiciens, notamment H. Cohen et D.B. Zagier, puis A.J. van der Poorten, la démonstration a pu être complétée. Puis F. Beukers introduit les intégrales

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{\bigl(1-(1-xy)z\bigr)^{n+1}} dx\,dy\,dz,$$

dont il montre que la valeur est de la forme $a_n+b_n\zeta(3)$, avec des nombres rationnels a_n et b_n. Cela lui permet d'abord de donner une nouvelle démonstration du résultat d'irrationalité d'Apéry, puis d'établir un lien avec l'équation de Picard-Fuchs de la famille de surfaces algébriques, paramétrée par t, d'équation

$$1-(1-xy)z-txyz(1-x)(1-y)(1-z)=0$$

(pour t en dehors d'un ensemble fini, la surface correspondante est birationnellement équivalente à une surface $K3$), puis d'utiliser des fonctions modulaires pour démontrer des résultats d'irrationalité qui contiennent celui d'Apéry. Ces contributions remarquables et originales de Beukers gardent un aspect frustrant : on ne sait toujours pas démontrer la *transcendance* du nombre $\zeta(3)$, et on ne sait pas décider si le nombre

$$\zeta(5)=1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\cdots=\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^5}=1.036\ldots$$

par exemple, est irrationnel ou non. Dans le même ordre d'idées, le problème de l'irrationalité de nombres tels que la constante d'Euler

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac1n-\log n\right)=0.577\ldots$$

ou bien $e^\gamma=1.781\ldots$, reste ouvert.

Cependant les idées d'Apéry n'ont pas été stériles, et de nombreux travaux ont été produits à la suite de la démonstration. La méthode a été utilisée pour obtenir d'autres résultats d'irrationalité (L. Gutnik), donner de nouvelles formules pour des nombres comme $\zeta(5)$ (H. Cohen), et aussi pour produire divers énoncés d'approximation diophantienne, notamment des *mesures d'irrationalité*. C'est ainsi qu'Apéry lui-même, en appliquant sa méthode au nombre $\zeta(2)=\pi^2/6$, a pu améliorer la mesure d'irrationalité de π connue alors. K. Mahler (1953) avait démontré l'inégalité

$$\left|\pi-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{1}{q^\kappa}$$

pour tout $p/q\in\mathbb{Q}$ avec q suffisamment grand, et $\kappa=42$. On dit alors que κ est un *exposant d'irrationalité* pour le nombre π. On précise que cet exposant est *effectif* s'il est possible d'expliciter un entier $q_0\ge1$ tel que la minoration soit valable pour tout $q\ge q_0$. Il est intéressant d'établir une telle inégalité avec un exposant κ aussi petit que possible. On s'attend à ce que la seule condition $\kappa>2$ soit suffisante. Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux (successivement par M. Mignotte, D.V. et G.V. Chudnovsky, R. Apéry, F. Beukers, K. Alladi et M.L. Robinson, M. Hata, R. Dvornicich, G. Rhin, C. Viola, E.A. Rukhadze, A. Dubickas notamment), et la meilleure valeur connue en 1996 pour κ est 8.0161 (résultat dû à M. Hata, 1993). Dans les travaux récents sur ce sujet, un rôle essentiel est joué par la *valuation* p-adique de coefficients binomiaux (ou de facteurs gamma pour les intégrales hypergéométriques dans les travaux de G. Rhin et C. Viola), et c'est ce qui permet à ces auteurs d'améliorer les mesures d'irrationalité obtenues par F. Beukers (par exemple) par des méthodes analytiques.

Voici un tableau donnant quelques exposants d'irrationalité effectifs actuellement connus pour certains nombres irrationnels remarquables.

π	$\pi/\sqrt{3}$	$\log 2$	$\zeta(3)$	$\sqrt[3]{2}$
8.017	4.602	3.892	8.831	2.43

(2)

Un absent notoire dans ce tableau est le nombre e^π : on ne sait pas démontrer qu'il a un exposant d'irrationalité fini (ce qui revient à dire qu'on ne sait pas montrer que e^π n'est pas un *nombre de Liouville*). On ne connaît qu'une estimation plus faible :

$$\left|e^\pi-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{1}{q^{2^{40}\log\log q}}\qquad\text{pour } q\ge3.$$

On pourrait en revanche ajouter le nombre $\Gamma(1/4)$, car P. Philippon a montré en 1997 que ce n'était pas un nombre de Liouville, mais la valeur numérique de l'exposant n'a pas encore été calculée.

Un mot peut-être sur l'utilité de telles estimations. Tant qu'on ne saura pas établir pour chacun des nombres ci-dessus la meilleure mesure d'approximation possible, on ne pourra pas considérer que la théorie est achevée. Mais, en dehors de leur interêt intrinsèque, il se trouve aussi que de telles inégalités ont des applications : ainsi la mesure d'irrationalité que nous venons d'énoncer concernant le nombre e^π a été utilisée par K. Matsumoto pour étudier la répartition des valeurs de fonctions zêta de Dedekind. Des estimations diophantiennes du même genre sont utilisées par G. Harman pour étudier la discrépance des zéros de la fonction zêta de Riemann. Une minoration de $|e^\alpha-\beta|$ pour α et β algébriques permet de déterminer le signe de e^a-b quand a et b sont deux nombres rationnels, et c'est un pas important dans un algorithme de N.N. Vorobjov permettant de décider si certains systèmes d'inégalités faisant intervenir des polynômes exponentiels sont compatibles. C'est aussi une minoration de $|e^\alpha-\beta|$ qu'utilisent J-M. Muller et

A. Tisserand dans un travail d'informatique théorique concernant des problèmes d'arrondis pour des valeurs de fonctions élémentaires.

Revenons au tableau précédent. À côté de nombres transcendants comme π et $\log 2$, et du nombre $\zeta(3)$, dont on soupçonne qu'il est aussi transcendant, on voit apparaître le nombre algébrique $\sqrt[3]{2}$. Notons déjà que tout nombre algébrique réel α de degré $d \geq 2$ admet d pour exposant d'irrationalité effectif (Liouville — voir (1)). Le principe des tiroirs (ou bien la géométrie des nombres) montre que tout exposant d'irrationalité d'un nombre réel irrationnel est ≥ 2. Donc pour $d = 2$ (nombres algébriques quadratiques réels), l'inégalité de Liouville est optimale (et la théorie des fractions continues permet de décrire précisément la situation). Pour tout $d \geq 2$ et pour tout $\epsilon > 0$, un exposant d'irrationalité de α est $2+\epsilon$, d'après le théorème de Thue-Siegel-Roth (voir §1.3 ci-dessous). Un des problèmes importants, qui va beaucoup nous occuper, est d'obtenir un exposant d'irrationalité effectif $< d$ pour $d \geq 3$.

La présence d'un nombre algébrique dans le tableau (2) reflète un aspect essentiel de la théorie des nombres transcendants qui mérite quelques explications. Le but avoué de la théorie qui nous préoccupe est de démontrer que certains nombres (disons $\zeta(3)$, ou bien la constante d'Euler) sont transcendants. On procède souvent par l'absurde : on suppose que le nombre étudié est algébrique. Toute la démonstration fait alors intervenir uniquement des nombres algébriques, et cela explique le fait que les spécialistes des nombres transcendants aient été amenés à démontrer des énoncés appartenant à la théorie algébrique des nombres. Le plus souvent, les résultats nécessaires sont des versions effectives (et même explicites) d'énoncés connus, mais qui ont besoin d'être précisés. Par exemple, l'algèbre linéaire nous apprend qu'un système d'équations linéaires homogènes ayant un nombre d'inconnues supérieur (strictement) au nombre d'équations admet une solution non triviale. Le *lemme de Thue-Siegel* donne en plus une borne pour une telle solution, disons quand les coefficients et les inconnues sont dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels, et, plus généralement, quand ils sont dans un *corps de nombres* (extension finie du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels). Au lieu du principe des tiroirs, K. Mahler a établi une version de ce lemme de Thue-Siegel en utilisant des arguments de géométrie des nombres (théorème de Minkowski) ; puis E. Bombieri et J. Vaaler ont obtenu un énoncé (essentiellement optimal, d'après D. Roy et J. Thunder) par des méthodes *adéliques*. Plus tard (à partir des travaux de G. Faltings), cet argument intervient sous la forme d'une estimation pour une *fonction de Hilbert arithmétique*, dont la démonstration repose encore sur le théorème de Minkowski.

Le destin du lemme de Thue-Siegel a été contrasté. Durant la première moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle, le principe des tiroirs a joué un rôle vital dans le développement de la théorie : il intervient aussi bien dans les questions d'approximation diophantienne que dans les arguments transcendants. La construction d'une fonction auxiliaire a été encore la première étape obligée de la plupart des démonstrations de ce sujet jusque dans les années 80. Puis le lemme de Siegel a vu la roue de la for-

tune tourner : à la fin de la période qui nous intéresse, la méthode des déterminants d'interpolation de M. Laurent permet d'éviter tout recours au principe des tiroirs, et de retrouver les résultats antérieurs, parfois en les améliorant. Notons d'ailleurs que des arguments, provenant de la théorie d'Arakelov et introduits par J-B. Bost à la fin des années 90, remplacent avantageusement à la fois la construction de fonction auxiliaire ou de déterminant d'interpolation, et la minoration arithmétique à la Liouville donnée par la formule du produit.

Parmi les succès qu'a connus le lemme de Thue-Siegel, un des plus retentissants vient des travaux de S. Stepanov (1969), W.M. Schmidt et E. Bombieri (1973) concernant *l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis.* Si $\mathbb{F}_q$ est un corps fini et $f \in \mathbb{F}_q[X,Y]$ un polynôme *absolument irréductible*, c'est-à-dire irréductible sur une clôture algébrique, alors *le nombre N de points $(x,y) \in \mathbb{F}_q^2$ sur la courbe $f(x,y) = 0$ vérifie :*

$$|N - q| \leq c\sqrt{q},$$

où la constante $c = c(d)$ ne dépend que du degré total d de f. Cet énoncé suffit pour démontrer le théorème de Weil :

$$|N - q| \leq 2g\sqrt{q} + c',$$

où g est le genre de la courbe et $c' = c'(d)$ est une autre constante qui ne dépend encore que de d. Contrairement à celle de Weil, la méthode évite le recours à la géométrie algébrique : elle repose sur la construction d'un polynôme auxiliaire par la méthode des coefficients indéterminés, comme le faisait A. Thue pour établir son inégalité diophantienne en 1909.

1.2 Une digression : le problème de Lehmer

Pour de nombreuses démonstrations de la théorie des nombres transcendants, il faut donc préciser quantitativement certains énoncés bien connus. De multiples exemples de ce phénomène peuvent être donnés. Ainsi le théorème de Riemann-Roch permet de montrer l'existence de certaines fonctions ayant des zéros et des pôles imposés, mais J.H. Coates fut contraint d'établir un résultat plus explicite pour ses travaux avec Baker sur les points entiers sur des courbes de genre 1. D'autres exemples de ce phénomène apparaissent en liaison avec les *lemmes de zéros* (voir la section 6). Il se trouve que les méthodes d'approximation diophantienne permettent parfois de fournir les estimations auxiliaires nécessaires (sans toutefois prétendre à l'autarcie !). Donnons-en une illustration.

Un nombre complexe algébrique α est *entier* s'il est racine d'un polynôme *unitaire* à coefficients entiers :

$$X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d, \qquad (a_i \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq d).$$

Les *conjugués* de α sont les d racines complexes de ce polynôme. Un théorème de Kronecker affirme que *les seuls nombres entiers algébriques dont tous les conjugués* *sont de module* ≤ 1 *sont* 0 *et les racines de l'unité.* A. Schinzel et H. Zassenhaus ont demandé, en 1965, s'il était possible de minorer, pour un entier algébrique non nul et non racine de l'unité α, le nombre $\overline{|\alpha|}$, qui est par définition le maximum des modules des conjugués de α. Précisément, le problème de Schinzel et Zassenhaus s'énonce :

- *Existe-t-il une constante absolue* $C > 0$ *telle que, pour tout entier algébrique* α *différent de* 0 *et d'une racine de l'unité, on ait*

$$\overline{|\alpha|} \geq 1 + \frac{C}{d},$$

où d *est le degré de* α *?*

La question n'est toujours pas résolue, mais les meilleures estimations connues sur ce problème de Schinzel et Zassenhaus proviennent de méthodes de la théorie des nombres transcendants. L'origine de ce problème est un travail de D.H. Lehmer en 1933, qui voulait disposer de grands nombres premiers. Quand α est un nombre algébrique de polynôme minimal

$$a_0X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_d = a_0 \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha_i),$$

on définit

$$\mathrm{M}(\alpha) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

Le théorème de Kronecker montre que $\mathrm{M}(\alpha) = 1$ si et seulement si α est soit nul, soit une racine de l'unité. Lehmer demande alors si, *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un nombre algébrique* α *tel que* $1 < \mathrm{M}(\alpha) < 1 + \epsilon$. On s'attend à une réponse négative (c'est le *problème de Lehmer*), qui impliquerait une réponse positive à la question de Schinzel et Zassenhaus. On ne connaît pas de valeur $\mathrm{M}(\alpha) > 1$ qui soit inférieure à celle déjà trouvée par D.H. Lehmer, à savoir la racine $1.176\ldots$ du polynôme réciproque

$$z^{10} + z^9 - z^7 - z^6 - z^5 - z^4 - z^3 + z + 1 = z^5 P(z + 1/z),$$

avec

$$P(z) = z^5 + z^4 - 5z^3 - 5z^2 + 4z + 3.$$

Les premiers résultats sur cette question, dus à Schinzel et Zassenhaus (1965), ont été raffinés par Blanksby et Montgomery en 1971, à l'aide de méthodes analytiques (développement de Fourier et théorème de Fejér). La même année, utilisant la formule de Parseval, C.J. Smyth a montré que si α^{-1} n'est pas conjugué de α (on dit que α n'est pas *réciproque*), alors $\mathrm{M}(\alpha)$ est minoré par le plus petit nombre de Pisot, qui est la racine réelle $1.32471\ldots$ du polynôme $X^3 - X - 1$.

En 1978, C.L. Stewart a proposé une approche transcendante qui se révèlera très performante. Au même moment, E. Dobrowolski introduit d'ingénieux arguments de congruence (petit théorème de Fermat). En les combinant ensuite avec la démonstration de Stewart, il obtient l'année suivante des minorations de la forme

$$\mathrm{M}(\alpha) \geq 1 + C_1 \left(\frac{\log\log d}{\log d}\right)^3 \quad \text{et} \quad \overline{|\alpha|} \geq 1 + \frac{C_2}{d} \left(\frac{\log\log d}{\log d}\right)^3,$$

pour $d \geq 3$, avec des constantes absolues explicites C_1 et C_2 (par exemple $C_1 = 1/1200$ convient). Ces questions de Lehmer et Schinzel-Zassenhaus ont fait l'objet de nombreux travaux (D.C. Cantor et E.G. Straus, U. Rausch, D. Boyd, R. Louboutin, M. Langevin, M. Mignotte, E. Matveev, A. Dubickas, P. Voutier…). Ce dernier a montré que la constante C_1 pouvait être choisie égale à $1/4$ et C_2 à $1/2$. Cantor et Straus d'une part, Rausch d'autre part ont introduit des déterminants qui anticipent ceux que J. Pila et M. Laurent ont utilisés pour remplacer le lemme de Thue-Siegel et la construction de fonction auxiliaire dans les méthodes classiques de Siegel et de Gel'fond-Schneider. À la suite de travaux de D. Boyd, M.J. Mossinghoff a effectué sur ordinateurs des calculs relativement poussés, sans trouver de valeur plus petite que celle de Lehmer.

Le résultat de Dobrowolski joue un rôle auxiliaire très utile dans de nombreuses questions diophantiennes, par exemple dans les problèmes de minorations de combinaisons linéaires de logarithmes.

1.3 La méthode de Thue-Siegel

Après cette digression, revenons à la présence de nombres algébriques dans le tableau (2). Il se trouve que les méthodes transcendantes permettent d'établir des estimations, par exemple des mesures d'irrationalité, non seulement pour des nombres transcendants, mais aussi pour des nombres algébriques irrationnels. C'est un phénomène important qui explique le rayonnement de cette théorie. On verra (au paragraphe 4.3) une autre illustration de ce phénomène à propos du théorème d'irréductibilité de Hilbert.

Le problème de l'approximation rationnelle de nombres algébriques est, nous l'avons vu, à l'origine de la “création” du premier nombre transcendant, par J. Liouville en 1844. Grâce à (1), on peut compléter le tableau (2) en y ajoutant n'importe quel nombre algébrique irrationnel α sur la première ligne et le degré de α sur la seconde. Mais, comme on l'a vu, on voudrait remplacer κ par un exposant inférieur au degré d (en supposant $d > 2$). Le premier énoncé dans cette direction est celui de A. Thue en 1909, qui démontre (1) pour tout $\kappa > (d/2) + 1$ (avec une constante C dépendant de κ). Il utilise cette estimation pour démontrer des résultats de finitude des points entiers sur des classes d'*équations diophantiennes* : les *équations de Thue*

$$F(x, y) = k, \qquad (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \tag{3}$$

où F est un polynôme homogène (*forme binaire*) à coefficients entiers ayant au moins trois facteurs linéaires distincts (quand on le décompose en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$), et k est un entier non nul.

L'outil nouveau introduit par Thue est une construction d'une fonction auxiliaire : alors que Liouville travaillait avec le polynôme minimal du nombre algébrique α, Thue construit un polynôme en deux variables $X_2Q(X_1) - P(X_1)$ et utilise deux approximations p_1/q_1 et p_2/q_2 de α. La méthode due à Thue a été étendue par K. Mahler pour résoudre des équations de la forme

$$F(x,y) = p_1^{z_1} \cdots p_t^{z_t}, \tag{4}$$

(*équation de Thue-Mahler*), où $F \in \mathbb{Z}[X,Y]$ est un polynôme homogène ayant au moins trois facteurs distincts (dans $\mathbb{C}[X,Y]$), $p_1,\ldots,p_t$ sont des nombres premiers fixés, les inconnues $x,y,z_1,\ldots,z_t$ étant des entiers rationnels tels que $\mathrm{pgcd}(x,y,p_1,\ldots,p_t) = 1$. Pour cela, Mahler introduit des arguments p-adiques qui permettent aussi de traiter des équations où les inconnues ne prennent pas nécessairement des valeurs entières, mais peuvent prendre des valeurs dont les dénominateurs ont tous leurs facteurs premiers dans un ensemble S fixé de nombres premiers : ce sont des *S-entiers* (voir § 1.4).

Le problème de l'amélioration de l'exposant κ dans l'inégalité (1) a fait l'objet de plusieurs méthodes. Celle qui a donné le meilleur exposant est la méthode de Thue, Siegel, Dyson, Schneider, Mahler, Gel'fond et Roth : Pour tout $\epsilon > 0$, on peut remplacer κ par $2+\epsilon$ dans (1) ; c'est le *théorème de Thue-Siegel-Roth*, dont on aura l'occasion de reparler, et qui s'énonce précisément :

- **Théorème de Thue-Siegel-Roth.** *Pour tout nombre algébrique irrationnel α et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(\alpha,\epsilon) > 0$ telle que, pour tout nombre rationnel p/q,*
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C(\alpha,\epsilon)}{q^{2+\epsilon}}.$$

Le problème de remplacer $q^{2+\epsilon}$ par une fonction de q croissant moins vite est entièrement ouvert ; on doit à S. Lang notamment quelques spéculations sur ce problème (les nombres algébriques devraient se comporter comme "presque tous" les nombres réels). Il est lié aux propriétés du développement en fraction continue d'un nombre algébrique de degré > 2 :

- *Existe-t-il au moins un nombre algébrique de degré supérieur ou égal à trois dont les quotients partiels (dans son développement en fraction continue) soient bornés ?*
- *Existe-t-il au moins un nombre algébrique de degré supérieur ou égal à trois dont les quotients partiels ne soient pas bornés ?*

Evidemment, une au moins de ces deux questions admet une réponse positive, mais, malgré quelques travaux récents (par E. Bombieri, J. Vaaler et A.J. van der Poorten notamment), on ne connaît aucune des deux réponses !

La méthode d'approximation de Thue a été étendue au cas des corps de nombres par C.L. Siegel. Celui-ci utilisa son énoncé pour montrer que, *sur toute courbe algébrique de genre ≥ 1, il n'y a qu'un nombre fini de points entiers*. Dans sa démonstration, Siegel (implicitement) montre que l'équation, qui devait être baptisée plus tard *équation en unités* en deux inconnues (voir §1.4)

$$a_1u_1 + a_2u_2 = 1, \tag{5}$$

où a_1 et a_2 sont deux éléments non nuls d'un corps de nombres K, tandis que les inconnues u_1, u_2 prennent leurs valeurs dans le groupe des unités de K, n'a qu'un nombre fini de solutions. Siegel réduisit (5) à un nombre fini d'équations $b_1x_1^n + b_2x_2^n = 1$ sur K en observant que pour tout $n \geq 3$ fixé, toute unité u de K peut s'écrire sous la forme vx^n avec des unités v et x dans K telles que v appartienne à un sous-ensemble fini de K. On verra inversement, au paragraphe 1.4, que toute équation de Thue peut être ramenée à un nombre fini d'équations en unités. Dans les années 60, S. Lang a été le premier à introduire explicitement l'équation (5) et à mettre en évidence son importance pour les applications.

L'ineffectivité du théorème de Thue-Siegel-Roth est parfois bien contrariante. En voici un exemple. Quand k est un entier ≥ 2, le *problème de Waring* consiste à déterminer l'entier minimal $g = g(k)$ tel que tout entier soit somme de g puissances k-ièmes. On conjecture la formule

$$g(k) = 2^k + \left[(3/2)^k\right] - 2, \tag{6}$$

où [ ] désigne la partie entière. En 1957, K. Mahler a montré que ce résultat était vrai pour k suffisamment grand, mais on ne sait pas à partir de quelle valeur de k la formule est valide. La question d'approximation diophantienne sous-jacente est la suivante : en désignant, pour $x \in \mathbb{R}$, par $\|x\| = \min_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$ la distance à l'entier le plus proche, alors pour $k \geq 5$ la relation (6) est vraie dès que

$$\|(3/2)^k\| > (3/4)^k. \tag{7}$$

On peut facilement vérifier (7) pour les petites valeurs de k. Afin d'établir (7) quand k est grand, Mahler utilise un théorème de Ridout, qui est une version p-adique (également non effective) du théorème de Thue-Siegel-Roth. Des estimations effectives non triviales, mais plus faibles que (7), ont été établies par A. Baker et J.H. Coates en 1975, puis dans les années 90 par F. Beukers, L. Habsieger, A. Dubickas et M.A. Bennett. Mais pour compléter la vérification de (7), il reste un trou dont on ne sait pas estimer l'ampleur.

La méthode de Thue-Siegel-Roth a quand même permis d'obtenir des mesures d'irrationalité effectives pour les nombres algébriques de degré ≥ 3. A. Schinzel en 1967, puis H. Davenport l'année suivante, avaient observé que la démonstration de Thue donnait un résultat *effectif à une exception près* au sens suivant : pour un nombre algébrique α donné, il y a au plus un nombre rationnel p/q tel que $|\alpha - p/q|$ soit très petit.

Dans un premier temps, cette remarque va être développée en vue de donner des majorations non pas des solutions elles-mêmes, mais du nombre de solutions. C.L. Siegel a lui-même donné de telles bornes, et elles seront raffinées de manière spectaculaire durant la période qui nous intéresse. Ce type de résultats nécessite des estimations précises pour divers objets algébriques, tels que le *discriminant* ou le *régulateur* de corps de nombres, et ces bornes ont fait l'objet de travaux de V.G. Sprindžuk, J.H. Evertse, K. Győry, J.H. Silverman…

En 1984, J.H. Evertse donne la borne supérieure 3×7^{3d} pour le nombre de solutions de l'équation (5), d désignant le degré du corps de nombres K. Grâce à ce résultat, il montre que si $F \in \mathbb{Z}[X,Y]$ est une forme binaire irréductible de degré $n \geq 3$, le nombre de solutions de l'équation (3) est majoré par une constante explicite qui ne dépend que de n et du nombre de facteurs premiers de k. Par exemple, pour $n = 3$ (F est une forme cubique), l'équation de Thue $F(x,y) = 1$ a au plus 12 solutions. Pour obtenir son énoncé ci-dessus concernant l'équation (5), il se ramène d'abord à une équation de la forme $ax^3 - by^3 = c$ sur un corps de nombres, puis il utilise des *approximants de Padé* (cf. § 1.5). De nombreux autres travaux seront ensuite consacrés à de telles questions, en particulier par W.M. Schmidt, E. Bombieri et J. Mueller. On dispose maintenant de bornes explicites, pour le nombre de solutions d'équations (3) et (4) qui sont polynomiales en le degré de F. De plus, d'après un théorème de J.H. Evertse et K. Győry, il n'existe, à équivalence près, qu'un nombre fini de formes binaires irréductibles $F \in \mathbb{Z}[X,Y]$ de degré fixé $n \geq 3$ et de corps de décomposition également fixé pour lesquels (3) admette plus de 2 solutions non proportionnelles.

La première amélioration effective du théorème de Liouville et la première borne explicite pour les solutions de l'équation de Thue ont été établies par A. Baker. Ces résultats seront présentés avec la méthode de Gel'fond-Baker et ses applications au paragraphe 5.

Un autre développement des remarques de Schinzel et Davenport viendra ensuite. L'inégalité (1) demeurait ineffective pour $\kappa < d$ tant qu'on ne connaissait pas de *très bonne approximation* de α (correspondant à un *très grand* quotient partiel dans le développement en fraction continue de α). Après des travaux de G.V. Chudnovsky, c'est principalement E. Bombieri (seul, puis en collaboration avec J. Mueller, A.J. van der Poorten, P.B. Cohen…) qui a cherché à affaiblir la contrainte sur cette approximation exceptionnelle. En 1982, il utilise *le lemme de Dyson* (version antérieure du *lemme de Roth*, mais dont la démonstration est *algébrique*, alors que celle de Roth est *diophantienne*), et construit les premiers exemples *ad hoc* de nombres algébriques α pour lesquels il existe une approximation rationnelle p/q suffisamment bonne (le couple $(\alpha, p/q)$ lui sert d'*ancre*) pour qu'il puisse donner une amélioration à l'inégalité de Liouville pour ce nombre α. En remplaçant le lemme de Dyson par un raffinement de C. Viola, il étend en 1993 cet argument aux racines de nombres rationnels, et plus généralement à l'approximation, par les éléments d'un corps de nombres K, des racines $\sqrt[n]{a}$ des éléments a de K. Un petit détour par une équation de Thue lui permet finalement d'améliorer l'exposant de Liouville pour tous les nombres algébriques de degré ≥ 3. L'estimation qu'il obtient ainsi est comparable en qualité avec celle obtenue précédemment par A. Baker et N.I. Fel'dman (voir §5). Dans un travail plus récent de E. Bombieri et P.B. Cohen, un analogue non archimédien est donné, et la démonstration emploie les déterminants d'interpolation de M. Laurent (utilisés déjà dans ce contexte par P. Corvaja) à la place du lemme de Thue-Siegel (principe des tiroirs).

1.4 Le théorème des sous-espaces de Schmidt

Le théorème d'approximation rationnelle de Thue-Siegel-Roth dont nous avons parlé a été étendu par W.M. Schmidt en un résultat d'approximation simultanée de plusieurs nombres algébriques. Par un lemme de transfert, il est équivalent d'énoncer le résultat en termes de minoration de combinaisons linéaires de nombres algébriques à coefficients entiers. Voici les deux formulations, dans lesquelles δ est un nombre positif arbitraire, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres algébriques tels que les $n+1$ nombres $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

- *Le système d'inéquations*

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < q^{-1-(1/n)-\delta}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers rationnels $(p_1, \ldots, p_n, q)$ *avec* $q > 0$.

- *L'inéquation*

$$|q_1\alpha_1 + \cdots + q_n\alpha_n - p| < q^{-n-\delta}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers rationnels $(p, q_1, \ldots, q_n)$ *avec*

$$q = \max\{|q_1|, \ldots, |q_n|\} > 0.$$

L'énoncé général de W.M. Schmidt (1970), qui contient les deux corollaires précédents (et bien plus) est le **théorème des sous-espaces.**

- *Soient* δ *un nombre réel positif,* $L_1, \ldots, L_m$ *des formes linéaires indépendantes en* m *variables à coefficients algébriques. Il existe des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^m$*, en nombre fini, de dimension* $< m$*, tels que tout point* $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$ *vérifiant*

$$|L_1(\underline{x}) \cdots L_m(\underline{x})| \leq |\underline{x}|^{-\delta}$$

appartienne à l'un de ces sous-espaces.

Le cas $m = 2$ est équivalent au théorème de Thue-Siegel-Roth (c'est-à-dire à l'inégalité (1) avec $\kappa = 2 + \epsilon$).

Le théorème des sous-espaces de Schmidt a été généralisé par H.P. Schlickewei qui considère plusieurs valeurs absolues (alors que Schmidt ne considère qu'une seule valeur absolue archimédienne). Le théorème des sous-espaces est un outil puissant qui permet d'établir la finitude du nombre de solutions de nombreuses équations diophantiennes en un nombre arbitraire de variables. Bien que cela ne soit pas le sujet central de ce texte, nous allons développer ce thème de manière un peu détaillée.

Les théorèmes de finitude de Thue et Mahler sur les solutions des équations (3) et (4) peuvent être étendus aux *équations formes décomposables* (en anglais *decomposable form equation*)

$$F(\underline{x}) = k, \qquad \underline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}^m \tag{8}$$

et

$$F(\underline{x}) = p_1^{z_1} \cdots p_t^{z_t}, \qquad \underline{x} = (x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_t) \in \mathbb{Z}^{m+t}, \tag{9}$$

quand $F(\underline{X}) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_m]$ est une *forme décomposable*, c'est-à-dire un polynôme homogène qui se décompose en produit de facteurs linéaires sur une extension finie de $\mathbb{Q}$, tandis que $p_1, \ldots, p_t$ sont des nombres premiers deux à deux distincts, avec $\mathrm{pgcd}(x_1, \ldots, x_m, p_1 \cdots p_t) = 1$. L'équation (8) prend le nom d'*équation normique* (en anglais *norm form equation*) si F est de la forme

$$F(\underline{X}) = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n),$$

où K est un corps de nombres et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des éléments $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de K.

En 1971, W.M. Schmidt a obtenu un critère général pour qu'une équation normique n'ait qu'un nombre fini de solutions. Encore plus généralement, il a donné une description de la structure de l'ensemble des solutions d'une équation normique, en montrant qu'elles se répartissent en un nombre fini de *familles.* Ces résultats ont été étendus par H.P. Schlickewei aux équations normiques et par M. Laurent aux corps de nombres algébriques. Le critère de finitude (resp. le fait que les solutions se répartissent en un nombre fini de familles) a été généralisé par J.H. Evertse et K. Győry (1988) (resp. K. Győry (1993)), aux équations formes décomposables quelconques (8) et (9) sur des corps de nombres. Aucun de ces résultats n'est *effectif* : par exemple, quand on sait démontrer par ces arguments qu'une équation n'a qu'un nombre fini de solutions, on ne sait pas produire un algorithme permettant *en principe* de déterminer l'ensemble de ces solutions. Dans quelques cas importants, des versions effectives ont été obtenues par la méthode de Gel'fond-Baker (voir le paragraphe 5).

Quand K est un corps de nombres et S un ensemble fini de *valeurs absolues* de K (contenant l'ensemble S_∞ des valeurs absolues archimédiennes), un *S-entier* de K est un élément $u \in K$ qui vérifie $|u|_v \le 1$ pour toute valeurs absolue v de K qui n'est pas dans S. Ces éléments forment un anneau, *l'anneau des S-entiers de K*, et les éléments inversibles de cet anneau sont les *S-unités de K* et le groupe des S-unités de K est formé des éléments $u \in K$ qui vérifient

$$|u|_v = 1 \qquad \text{pour tout} \quad v \notin S.$$

Quand $S = S_\infty$, cet anneau (resp. ce groupe) n'est autre que l'anneau des entiers de K (resp. le groupe des unités de K). Dans les résultats précédents de Laurent, Evertse et Győry, les inconnues $x_1, \ldots, x_m$ peuvent être prises dans un anneau de S-entiers d'un corps de nombres.

Le théorème des sous-espaces a de remarquables applications aux équations en unités et aux équations en S-unités. Une équation de la forme

$$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 1, \tag{10}$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments non nuls donnés d'un corps de nombres K, tandis que les inconnues $u_1, \ldots, u_n$ sont des S-unités du corps K, est appelée *équation en S-unités en n variables.* Quand $S = S_\infty$, on dit simplement *équation en unités.* Pour la résoudre, on peut se limiter à ne considérer que les solutions *non dégénérées*, c'est-à-dire telles qu'aucune sous-somme de $a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$ ne s'annule.

En 1977, E. Dubois et G. Rhin d'une part, H.P. Schlickewei de l'autre, montrent que pour tout entier $n \ge 2$, et pour tout ensemble $S = \{p_1, \ldots, p_t\}$ de nombres premiers, l'équation diophantienne

$$x_1 + \cdots + x_n = 0$$

n'a qu'un nombre fini de solutions non dégénérées en entiers rationnels $x_1, \ldots, x_n$ premiers entre eux deux à deux qui sont des S-unités. En 1982, J.H. Evertse d'une part, A.J. van der Poorten et H.P. Schlickewei de l'autre, étendent cet énoncé aux équations (10). Ils montrent qu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions non dégénérées. Beaucoup d'applications en ont été données, par exemple, à l'étude de suites récurrentes linéaires, ou encore à des questions de géométrie diophantienne (solution d'une conjecture de S. Lang par M. Laurent et travaux de C. Viola, E. Bombieri, G. Faltings, P. Vojta...). En cette fin du XX$^{\text{ème}}$ siècle, les avancées les plus prometteuses concernant la théorie des approximations diophantiennes proviennent des travaux de P. Vojta et G. Faltings sur le théorème de Thue-Siegel-Roth-Schmidt ; les conséquences de ces travaux dans le domaine des approximations diophantiennes n'ont pas fini d'être exploitées.

Quand $n = 2$, la méthode de Gel'fond-Baker fournit des résultats effectifs (et même explicites — voir le paragraphe 5 ci-dessous) pour l'équation (10). Mais, dès que $n \ge 3$, le résultat n'est pas effectif : on ne connaît pas de borne pour les solutions. Un des problèmes ouverts les plus importants est *de donner une borne* *effective pour les solutions non dégénérées en S-unités $u_1, \ldots, u_n$ de l'équation $u_1 + \cdots + u_n = 1$.*

En 1988, J.H. Evertse et K. Győry ont démontré que l'étude des équations en S-unités (10) et celle des équations formes décomposables sur un corps de nombres étaient équivalentes au sens suivant. Toute solution $(u_1, \ldots, u_n)$ de l'équation (10) est une solution en S-entiers de l'équation décomposable

$$u_1 \cdots u_n (a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n) = e,$$

où e est une S-unité (inconnue) dans K. Réciproquement, si $F(\underline{X})$ est une forme décomposable ayant des facteurs linéaires $\ell_1(X), \ldots, \ell_n(X)$ à coefficients dans K, alors pour toute solution $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ en S-entiers de l'équation $F(\underline{x}) = e$, où e est une S-unité (inconnue) de K, on a $\ell_i(\underline{x}) = b_i u_i$, où b_i appartient à un sous-ensemble fini fixé de K et u_i est une S-unité $(1 \le i \le n)$. Supposons $n > m$. Alors il existe des constantes $c_1, \ldots, c_n$, non toutes nulles, telles que $c_1 \ell_1(\underline{X}) + \cdots + c_n \ell_n(\underline{X}) = 0$. On obtient ainsi une équation homogène en S-unités

$$(c_1 b_1) u_1 + \cdots + (c_n b_n) u_n = 0,$$

en les inconnues $u_1, \ldots, u_n$. Pour les équations de Thue (3) ou de Thue-Mahler (4), cet argument conduit à une équation (5) en unités ou en S-unités respectivement, en deux variables seulement.

Ce lien entre les équations formes décomposables et les équations en unités s'est révélé très utile pour étudier chacune de ces deux classes d'équations.

L'outil fondamental de la démonstration de tous ces résultats est, nous l'avons vu, le théorème des sous-espaces de Schmidt et sa généralisation par Schlickewei aux valeurs absolues p-adiques et aux corps de nombres. Ces outils ont donc été forgés au début des années 70. C'est seulement en 1989 qu'intervient le progrès significatif suivant, quand W.M. Schmidt réussit à établir une version quantitative de son théorème des sous-espaces, en donnant une borne explicite pour le nombre de sous-espaces exceptionnels. Cette remarquable percée va ouvrir la voie à la détermination de majorations explicites pour le nombre de solutions de vastes classes d'équations diophantiennes en un nombre arbitraire d'inconnues. De nombreuses généralisations et améliorations du théorème de Schmidt vont aussi voir le jour. Leur principal objectif est de donner des bornes explicites uniformes pour le nombre de solutions de (10). H.P. Schlickewei a ainsi donné une version quantitative du théorème des sous-espaces p-adiques sur les corps de nombres, ce qui lui a permis d'obtenir les premières bornes explicites uniformes pour le nombre de solutions de (10) avec n quelconque. Ses estimations ont été ensuite sensiblement raffinées par J.H. Evertse, qui doit établir pour cela une version explicite très précise du théorème du produit de Faltings. Puis H.P. Schlickewei s'est attaché à réduire le nombre de paramètres : il obtient des bornes qui ne dépendent que du nombre d'éléments de S, du nombre n d'inconnues, et du degré d du corps de nombres.

Le problème important était ensuite d'éliminer la dépendance en le degré d, et cela a été fait conjointement par J.H. Evertse et H.P. Schlickewei. Quand les bornes obtenues pour le nombre de solutions de (10) sont indépendantes du corps de nombres K, un argument de spécialisation permet d'obtenir des énoncés sur un corps quelconque de caractéristique nulle, par exemple sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Les résultats qualitatifs de finitude du nombre de solutions d'équations formes décomposables (8), (9) et d'équations en unités (10) ont ainsi été étendus au cas plus général où l'anneau de base est remplacé par un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$, tandis que le groupe des unités dans (10) est remplacé par un groupe multiplicatif de rang(*) fini. Voici un exemple, obtenu conjointement par J.H. Evertse, H.P. Schlickewei et W.M. Schmidt :

Soit G un sous-groupe de type fini de $\mathbb{C}^\times$ de rang r. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes non nuls. Le nombre de solutions non dégénérées $(x_1, \ldots, x_n) \in G^n$ de l'équation (10) est fini et majoré par $c(n)^{r+2}$ où $c(n) = \exp\bigl((6n)^{4n}\bigr)$.

Ces énoncés quantitatifs donnent des bornes explicites non seulement pour le nombre de solutions d'équations normiques ou d'équations en S-unités, mais aussi pour le nombre de familles de solutions (et, quand il est fini, pour le nombre de solutions) d'une équation décomposable arbitraire (travaux de K. Győry également).

Il est intéressant de comparer les majorations connues concernant le nombre de solutions de l'équation (5) avec un résultat de J.H. Evertse, K. Győry, C.L. Stewart et R. Tijdeman : si K est un corps de nombres fixé et S un ensemble donné de valeurs absolues de K, il n'y a qu'un nombre fini (à équivalence près) de couples (a_1, a_2) d'éléments de $(K^\times)^2$ tels que l'équation (5) ait au moins trois solutions (u_1, u_2) en S-unités de K.

D'un autre côté on ne peut pas espérer de trop bonne majoration pour le nombre de solutions d'une équation en S-unités (10) : P. Erdős, C.L. Stewart et R. Tijdeman ont montré qu'il existait des ensembles S de nombres premiers, dont le nombre d'éléments s n'est pas borné, tels que l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ admette au moins

$$\exp\bigl((4 + o(1))(s/\log s)^{1/2}\bigr)$$

solutions en S-unités.

Enfin les résultats d'approximation diophantienne de Thue, Siegel, Roth et Schmidt ont aussi des applications "internes" en théorie des nombres transcendants. En voici deux exemples.

M. Queffélec montre en 1997 la transcendance du nombre dont le développement en fraction continue s'écrit

$$[0; 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, \ldots],$$

(*) Le *rang* d'un groupe abélien est le nombre maximal d'éléments linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$; en notation multiplicative, c'est le nombre maximal d'éléments multiplicativement indépendants.

où la suite (dite *de Thue-Morse*) des quotients partiels est le point fixe de la substitution

$$1 \to \underbrace{1\,2}, \qquad 2 \to \underbrace{2\,1}$$

sur l'alphabet $\{1,2\}$.

K. Nishioka a utilisé le théorème de finitude de J.H. Evertse sur l'équation (10) pour résoudre une conjecture de D.W. Masser :

- *On considère la fonction $f(z) = \sum_{k\ge 0} z^{k!}$. Si $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont des nombres complexes algébriques vérifiant $0 < |\alpha_i| < 1$, $(1 \le i \le n)$ tels qu'aucun des quotients α_i/α_j, $(1 \le i \ne j \le n)$ ne soit racine de l'unité, alors les nombres*

$$f^{(\ell)}(\alpha_i), \quad (1 \le i \le n,\ \ell \ge 0)$$

sont algébriquement indépendants.

On a désigné par $f^{(\ell)}$ la dérivée d'ordre ℓ de la fonction f.

1.5 Approximants de Padé

Afin de calculer la constante C de l'inégalité (1) quand κ est inférieur au degré, nous avons vu que la méthode de Thue-Siegel demandait de disposer déjà d'une *très bonne* approximation. Une autre approche repose sur la connaissance d'une suite *régulière* de bonnes approximations. Pour atteindre ce but, une méthode spécialement efficace consiste à approcher des fonctions par des fractions rationnelles, puis à spécialiser. Les "meilleures approximations rationnelles" sont données par des approximants de Padé qui sont parfois explicitement connus, comme pour les fonctions $\sqrt[r]{1-z}$, r entier positif. Cette méthode, inventée par A. Thue en 1918, ne convient pas pour tous les nombres algébriques mais, quand elle s'applique, elle donne des résultats performants. En 1964, A. Baker a ainsi obtenu la première amélioration effective (et même explicite) de l'exposant de Liouville pour le nombre $\sqrt[3]{2}$; pour pouvoir mettre en œuvre cette méthode, il faut disposer déjà d'une bonne approximation ; ici, $5/4$ est une bonne approximation rationnelle de $\sqrt[3]{2} = 1.25\ldots$, ce qui correspond au fait que la différence $2^7 - 5^3 = 3$ est "petite".

Toute méthode qui permet d'améliorer l'inégalité de Liouville permet aussi de résoudre des équations diophantiennes. C'est ainsi que des familles d'équations de degré 3, 4, 5 ou 6, ont été explicitement résolues. Nous reviendrons sur cette question au Chapitre 5, en liaison avec la méthode de Gel'fond-Baker.

F. Beukers, G.V. Chudnovsky puis M.A. Bennett et P. Voutier ont contribué à développer cette approche. Ainsi F. Beukers, puis M. Bennett, ont obtenu des minorations précises de $\|\bigl(1+(1/N)\bigr)^k\|$ (distance à l'entier le plus proche). Comme on l'a vu, le cas $N = 2$ est particulièrement important pour le problème de Waring. L'étude du système d'équations de Pell simultanées

$$x^2 - az^2 = y^2 - bz^2 = 1$$

(quand a et b sont deux entiers rationnels distincts et non nuls, les inconnues x, y, z étant des entiers > 0) a été commencée par W.S. Anglin en 1995, et poursuivie l'année suivante par D.W. Masser et J.H. Rickert, puis par M.A. Bennett. On sait maintenant qu'il a au plus trois solutions, et on connaît des exemples avec deux solutions, tels que

$$x^2 - 3z^2 = y^2 - 3^3 29 z^2 = 1$$

qui admet les solutions $(x,y,z) = (2,28,1)$ et $(97,1567,56)$. De tels résultats se démontrent à l'aide d'approximants de Padé, mais il faut aussi des énoncés précis sur l'écart entre les solutions (*gap principle*). Le résultat de J.H. Rickert sur les équations de Pell simultanées a permis à I. Wakabayashi de résoudre explicitement une famille d'équations de Thue de degré 4 : *si a est un entier ≥ 8, les seules solutions (x,y) primitives (i.e. premières entre elles) en nombres entiers de l'inégalité*

$$|x^4 - a^2x^2y^2 + y^4| \le a^2 - 2$$

sont "triviales", au sens où l'un au moins des deux nombres x, y appartient à $\{0,1,-1\}$.

C'est par cette méthode que G. Rhin et Ph. Toffin obtiennent en 1986 une minoration de combinaisons linéaires de logarithmes :

- *Pour b_0, b_1 et b_2 entiers rationnels tels que le nombre $B = \max\{|b_1|,|b_2|\}$ vérifie $B \ge 2$, on a*

$$|b_0 + b_1 \log 2 + b_2 \log 3| \ge B^{-13.3}.$$

Les approximants de Padé ont été utilisés aussi pour étudier les valeurs de la fonction *dilogarithme* :

$$\mathrm{L}_2(z) = -\int_0^z \log(1-t)\,\frac{dt}{t} = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^2}.$$

Pour q entier suffisamment grand, $\mathrm{L}_2(1/q)$ est irrationnel (W. Maier, E.M. Nikishin, G.V. Chudnovsky, M. Hata, M. Huttner), et on connaît aussi des mesures d'irrationalité. Suivant M. Huttner, on peut espérer résoudre ainsi le problème de l'irrationalité de nombres tels que $\pi^2/\log 2$, ou bien

$$\mathrm{L}_2(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2,$$

ou encore de la *constante de Catalan*

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Ce sont encore les approximants de Padé qui conduisent à de bonnes mesures d'irrationalité de logarithmes et de certaines de leurs combinaisons linéaires (y compris certains résultats énoncés au paragraphe 1.1). Cette méthode a encore permis à A. Dubickas de considérer non seulement la distribution des puissances de nombres rationnels, mais aussi la distance à l'entier le plus proche de nombres de la forme $(B/A_1^k) + \cdots + (B/A_m^k)$.

1.6 Nombres de Fibonacci

Pour conclure ce chapitre dédiée à l'irrationalité, citons quelques résultats concernant la suite de Fibonacci

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

dus à P. Erdős, R. André-Jeannin, C. Badea, J. Sándor, P. Bundschuh, P.G. Becker, T. Töpfer, D. Duverney, K. et K. Nishioka, I. Shiokawa...

Le nombre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}} = 1$$

est rationnel, tandis que les nombres

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{7-\sqrt{5}}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

sont algébriques irrationnels. On sait que les nombres

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n + F_{n+2}}$$

sont irrationnels, mais on ignore s'ils sont transcendants. En revanche on sait que les nombres

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{F_{2n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n+1}}$$

sont transcendants. Ce petit inventaire montre combien il est difficile de prédire la nature arithmétique d'un nombre de cette forme !

2. Autour de la méthode de Mahler

Par définition, un nombre transcendant sort du cadre de la théorie algébrique des nombres ; il fait intervenir de l'analyse. Le problème central de la théorie est de décider quelles valeurs de fonctions analytiques — non polynomiales — sont algébriques. Une fonction entière (resp. méromorphe) dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{C}^n$ qui n'est pas un polynôme (resp. qui n'est pas une fraction rationnelle) est appelée *transcendante.*

2.1 Fonctions entières arithmétiques

La démonstration par Hermite de la transcendance de e, puis par Lindemann de celle de π, utilise de façon essentielle l'équation différentielle $f' = f$ vérifiée par la fonction exponentielle $f(z) = e^z$. Plus généralement :

- **Théorème de Hermite-Lindemann.** *Si β est un nombre algébrique non nul, alors le nombre e^β est transcendant.*

On aimerait disposer de résultats généraux disant qu'une fonction entière transcendante f prend "généralement" des valeurs transcendantes en des points algébriques. K. Weierstraß avait, semble-t-il, fait des tentatives dans cette direction avant de s'apercevoir qu'il existait des fonctions entières transcendantes qui prennent, en tout point algébrique α, une valeur algébrique (on peut même imposer $f(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$, avec, en plus, un ordre de croissance aussi faible que l'on veut pour f). Pour obtenir des énoncés généraux, on est ainsi amené à restreindre le problème.

En 1914, G. Pólya étudie les fonctions entières f dont les valeurs aux points de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ sont entières (dans $\mathbb{Z}$) ; il montre en particulier que si une telle fonction f vérifie

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log |f|_R < \log 2,$$

où $|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|$, alors f est un polynôme. Ainsi 2^z est la "plus petite" fonction entière transcendante à valeurs entières aux points entiers ≥ 0. En 1929, A.O. Gel'fond étudie les fonctions entières à valeurs entières aux points de $\mathbb{Z}[i]$: si une telle fonction f vérifie

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \log |f|_R < \gamma,$$

alors f est un polynôme. La constante γ calculée par Gel'fond était très petite. D.W. Masser a montré qu'elle était obligatoirement $\leq \pi/(2e)$. Ce n'est qu'en 1981 que F. Gramain démontre que le résultat de Gel'fond est vrai avec $\gamma = \pi/2e$.

La fonction $e^{\pi z}$ établit un lien avec le septième problème de Hilbert, qui comportait comme cas particulier la question de la transcendance de e^π, et qui a été complètement résolu en 1934 par Gel'fond et Schneider :

- **Théorème de Gel'fond-Schneider.** *Si α et β sont deux nombres algébriques avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \notin \mathbb{Q}$, et si $\log\alpha \neq 0$ est une détermination non* *nulle du logarithme complexe de α, alors le nombre $\alpha^\beta = \exp(\beta \log \alpha)$ est transcendant.*

Au lieu de chercher des énoncés valables pour toutes les fonctions transcendantes, on peut aussi se restreindre, dans la question de Weierstraß, à des fonctions “spéciales”. En 1929, C.L. Siegel a introduit deux classes de fonctions, qu'il appelle *E-fonctions* et *G-fonctions*, pour lesquelles les méthodes transcendantes (dérivées de celles de Hermite, Lindemann et Weierstraß) s'appliquent. Nous reviendrons sur cette théorie un peu plus loin (§4). La méthode de Gel'fond-Schneider (§3) conduit à d'autres critères, dont voici l'un des plus simples :

- **Critère de Schneider-Lang.** *Soient $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ et K un corps de nombres. On suppose que deux au moins des fonctions f_i, $(i = 1, \ldots, k)$, sont algébriquement indépendantes sur K et que les dérivées $f_i' = (d/dz)f_i$, $(1 \le i \le k)$, appartiennent à l'anneau $K[f_1, \ldots, f_k]$. Alors l'ensemble des nombres complexes s, qui ne sont pôles d'aucune des fonctions f_i, et tels que les valeurs $f_i(s)$, pour $1 \le i \le k$, soient dans K, est fini.*

2.2 Équations fonctionnelles

Un autre point de vue est développé par K. Mahler en 1929 et 1930 : il n'y a plus d'équations différentielles, mais des équations fonctionnelles. Ces travaux avaient été un peu oubliés (c'est la principale omission du rapport de N.I. Fel'dman et A.B. Šidlovskiĭ – par ailleurs très complet – sur la théorie des nombres transcendants jusqu'en 1968, comportant 440 références). Or, cette *méthode de Mahler* a joué un rôle important dans la théorie, en particulier très récemment.

Le point de départ de K. Mahler est l'étude de la transcendance des valeurs de fonctions solutions de certaines équations fonctionnelles. Le premier volume du Journal of Number Theory en 1969 contient un article où il rappelle la méthode qu'il a inventée quelque trente ans plus tôt et où il lance un appel à une étude plus approfondie de ses possibilités.

À la suite de cet appel, plusieurs mathématiciens ont développé cette méthode, notamment K. Kubota, J.H. Loxton et A.J. van der Poorten, dans un premier temps, K. Nishioka, P.G. Becker, M. Amou et T. Töpfer ensuite.

Voici quelques exemples de telles fonctions, et de nombres que la méthode de Mahler permet de considérer.

Si d est un entier rationnel ≥ 2, la fonction

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$$

prend, en tout point algébrique α dans le disque pointé $0 < |\alpha| < 1$, une valeur $f(\alpha)$ transcendante (pour $d = 2$, il s'agit de la série de Fredholm). Cette fonction

f vérifie $f(z^d) = f(z) - z$, et la méthode de Mahler s'applique plus généralement aux équations fonctionnelles de la forme $f(z^d) = R\big(z, f(z)\big)$, où R est une fraction rationnelle à coefficients algébriques.

La *suite du papier plié* étudiée par M. Dekking, M. Mendès France et A.J. van der Poorten a pour série génératrice une fonction f vérifiant

$$f(z) - f(z^2) = \frac{z}{1 - z^4}.$$

Une solution de l'équation fonctionnelle $f(z) = (1 - z)f(z^2)$ est donnée par la fonction

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - z^{2^k}) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)z^n,$$

où $a(n)$ est la *suite de Morse*, définie de la manière suivante : $a(n) = 1$ si le nombre de chiffres 1 dans le développement de n en base 2 est pair, et $a(n) = -1$ sinon. De nouveau, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ dans le domaine $0 < |\alpha| < 1$, l'un au moins des deux nombres α, $f(\alpha)$ est transcendant.

La transcendance du nombre

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k+1}}$$

(où F_n est la suite de Fibonacci) a été démontrée par P.G. Becker et T. Töpfer en utilisant une fonction f vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f(z) = f(z^2) + \frac{\alpha^{-1}z}{1 + \alpha^{-2}z^2}, \qquad (\alpha = (1 + \sqrt{5})/2).$$

Les nombres dont la transcendance peut être obtenue par la méthode de Mahler sont bien approchés par des nombres algébriques — pas suffisamment bien cependant pour que l'on puisse appliquer directement des résultats d'approximation comme l'inégalité de Liouville.

La méthode de Mahler s'étend facilement en plusieurs variables. Elle permet aussi d'obtenir des résultats généraux d'indépendance algébrique. Enfin elle conduit à des énoncés d'approximation très précis : mesures de transcendance ou d'indépendance algébrique (en plus des auteurs déjà cités, mentionnons A.I. Galochkin, W. Miller, S.M. Molchanov, A.Y. Yanchenko, Yu.V. Nesterenko…).

Une méthode d'élimination de Yu.V. Nesterenko permet de résoudre de manière satisfaisante les problèmes d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions de Mahler en une variable ; mais elle n'est pas aussi efficace en dimension supérieure, où les résultats de K. Kubota n'ont été améliorés que récemment par K. Nishioka.

Un *lemme de zéros* de D.W. Masser s'est révélé efficace pour étudier la nature arithmétique de valeurs de fonctions de Mahler en plusieurs variables. Mais il ne donne pas d'énoncé quantitatif. Pour obtenir des mesures de transcendance et d'indépendance algébrique, K. Nishioka a dû raffiner le lemme de zéros de Masser, et ce raffinement a été utilisé aussi par M. Amou, P.G Becker, T. Töpfer et P. Philippon.

Une approche “axiomatique” de la méthode a fait l'objet de travaux de F. Gramain, M. Mignotte, et, plus récemment, de P. Philippon qui introduit une notion de *K-fonctions* (complétant la ménagerie des G-fonctions et E-fonctions de Siegel).

2.3 Fractals et systèmes dynamiques

Voici une application de la méthode de Mahler concernant une question provenant de la théorie des systèmes dynamiques. Ce lien apparaît à la suite des travaux de A. Douady et J. Hubbard en 1982, qui démontrent que l'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}$ est connexe. Cet ensemble $\mathcal{M}$ est défini en itérant le polynôme $P_c(z) = z^2 + c$, pour $c \in \mathbb{C}$; si on désigne par $P^{(k)}(z) = P^{(k-1)}\big(P(z)\big)$ le k-ième itéré d'un polynôme P, alors $\mathcal{M}$ est l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que $P_c^{(k)}(0)$ ne tende pas vers l'infini avec k. Douady et Hubbard ont construit une application analytique φ sur le complémentaire de $\mathcal{M}$ dans la sphère de Riemann, à valeurs dans le complémentaire du disque unité. Le polynôme P étant unitaire, on peut écrire le développement à l'infini d'une telle application sous la forme $\varphi(z) = z + c_0 + c_1/z + \cdots$. En 1993, P.G. Becker et W. Bergweiler ont suggéré que la méthode de Mahler permettrait de démontrer *la transcendance de $\varphi(\alpha)$ pour tout nombre algébrique α qui n'est pas dans $\mathcal{M}$.* Ce résultat a en effet été établi par Kumiko Nishioka en 1996, en faisant intervenir une équation fonctionnelle de la forme

$$f(z^2) = \frac{f(z)}{\alpha f(z)^2 + 1},$$

avec α algébrique, et en utilisant un résultat de Keiji Nishioka sur la transcendance de fonctions de Mahler.

Les équations fonctionnelles de Mahler interviennent aussi en théorie des *quasi-cristaux* (travaux de E. Bombieri et J.E. Taylor notamment).

2.4 Fonctions modulaires

Dans son article de 1969, K. Mahler propose le problème de la transcendance du nombre $J(q)$, pour q algébrique dans le disque pointé $\{q \in \mathbb{C}\,;\, 0 < |q| < 1\}$, où J est l'*invariant modulaire*

$$J(q) = \frac{\left(1 + 240 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1 - q^n}\right)^3}{q \displaystyle\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}}$$
$$= \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

Cet objectif est atteint en 1995 quand une équipe stéphanoise (composée de K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain et G. Philibert) résout le problème posé sur la transcendance de $J(q)$. Ce progrès en suscite d'autres et, en 1996, Yu.V. Nesterenko obtient un très beau théorème d'indépendance algébrique sur les valeurs des *séries d'Eisenstein* :

$$P(z) = E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{1 - z^n},$$
$$Q(z) = E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{1 - z^n},$$
$$R(z) = E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 z^n}{1 - z^n}.$$

- *Soit q un nombre complexe vérifiant $0 < |q| < 1$. Parmi les quatre nombres*

$$q, P(q), Q(q), R(q),$$

il y en a au moins 3 qui sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Comme l'avait mis en évidence D. Bertrand dès 1977, on en déduit une foule de résultats, un des plus remarquables étant l'énoncé suivant :

- *Les trois nombres π, e^{π} et $\Gamma(1/4)$ sont algébriquement indépendants.*

On connaissait déjà l'indépendance algébrique des deux nombres π et $\Gamma(1/4)$, obtenue par G.V. Chudnovsky en 1976 par un développement de la méthode de Gel'fond dont nous allons parler maintenant. Mais l'indépendance algébrique des deux nombres π et e^{π} n'était pas connue !

Ces travaux sur les fonctions modulaires ont leur origine dans ceux de Th. Schneider en 1937 ; il montre que la fonction modulaire j, définie dans le demi-plan supérieur par $j(\tau) = J(e^{2i\pi\tau})$, prend des valeurs transcendantes quand l'argument τ est algébrique sans être quadratique. Cet énoncé a été rendu effectif (mesure d'approximation simultanée) par A. Faisant et G. Philibert, et il a été étendu en dimension supérieure par Y. Morita, R.P. Holzapfel, P.B. Cohen, H. Shiga et J. Wolfart.

D'autres méthodes avaient été développées par P. Bundschuh pour étudier la nature arithmétique de *fonctions thêta de Jacobi.* Il part des fonctions introduites par L. Tschakaloff en 1921

$$\sum_{n \geq 0} z^n q^{-n(n-1)/2}$$

solutions de l'équation fonctionnelle

$$f(z) = 1 + z f(z/q).$$

Il obtient des résultats d'irrationalité (et des mesures, avec I. Shiokawa). Ces fonctions lui servent aussi à établir l'irrationalité de nombres comme

$$0, p(1)p(2)p(3)p(4)\ldots,$$

quand $p(x) = p^x$, p étant un entier ≥ 2 (quand cette fonction $p(x)$ est remplacée par un polynôme, K. Mahler avait obtenu un énoncé de transcendance de manière totalement différente — par application du théorème de Ridout — ; ainsi le *nombre de D.G. Champernowne*

$$0, 12345678910111213\ldots$$

est transcendant). Les premiers énoncés d'irrationalité que P. Bundschuh a ainsi pu obtenir pour des nombres comme

$$\prod_{n\geq 1}(1+2^{-n}), \quad \prod_{n\geq 1}(1-2^{-n})$$

sont maintenant dépassés : le théorème de Nesterenko sur les fonctions modulaires conduit à des résultats de transcendance, et même d'indépendance algébrique, pour de tels nombres, ainsi que l'ont remarqué D. Bertrand d'une part, D. Duverney, K. et K. Nishioka et I. Shiokawa d'autre part.

C'est le moment de signaler que l'étude des fonctions entières arithmétiques possède un q-analogue : il s'agit de l'étude des fonctions entières (ou bien seulement analytiques dans un disque, ou encore méromorphes dans un ouvert du plan complexe) qui prennent des valeurs entières (ou même seulement algébriques) en des points de la forme q^n, $(n \geq 1)$, quand q est un nombre complexe fixé. C'est encore A.O. Gel'fond qui a commencé (en 1933), et il a été suivi par beaucoup d'autres, parmi lesquels P. Bundschuh, F. Gramain, J-P. Bézivin...

3. Méthode de Gel'fond-Schneider : transcendance et indépendance algébrique

3.1 Indépendance algébrique

Au tout début de la période qui nous intéresse, A.O. Gel'fond a publié ses travaux sur l'indépendance algébrique. Sa démonstration était alors considérée comme étant *très compliquée*. Elle utilise divers lemmes auxiliaires, abondamment développés depuis. L'un d'eux est un lemme de zéros pour des polynômes exponentiels, et nous reparlerons de ce thème plus loin (§6). Un autre est un critère de transcendance dont la démonstration, fort ingénieuse, repose sur une utilisation subtile du résultant de deux polynômes en une variable. Ce résultant

avait déjà été introduit en 1899 par E. Borel pour donner une mesure de transcendance du nombre e, et par J. Koksma et J. Popken pour le nombre e^π. Des méthodes d'élimination plus puissantes permettent de nos jours d'étendre ce lemme en un *critère d'indépendance algébrique*. Le critère de Gel'fond a été ainsi étendu par G.V. Chudnovsky, puis E. Reyssat, et surtout par Yu.V. Nesterenko et P. Philippon. Ces derniers donnent aussi des critères conduisant à des mesures d'indépendance algébrique (avec un raffinement dû à E.M. Jabbouri). Par ces mêmes méthodes, P. Bundschuh, T. Töpfer, C. Jadot, E. Bedulev ont obtenu des critères d'indépendance linéaire très précis. Ces outils permettent d'établir des mesures de transcendance, d'indépendance linéaire ou encore d'indépendance algébrique dans des cadres généraux. Les mesures établies anciennement par A.O. Gel'fond et N.I. Fel'dman, puis par P.L. Cijsouw, E. Reyssat, G.V. Chudnovsky par exemple, devaient être démontrées individuellement pour chaque nombre considéré. On dispose maintenant d'énoncés généraux dans ce domaine (travaux de R. Tubbs, M. Ably, D. Caveny par exemple).

Ces problèmes d'indépendance algébrique connaissent un regain d'intérêt à la fin de notre siècle, en liaison avec une question d'approximation diophantienne. Soit ξ un nombre réel transcendant. On cherche à approcher ξ par des nombres algébriques. Quand α est un nombre algébrique, on note $\mathrm{H}(\alpha)$ la *hauteur naïve* ou *usuelle* du nombre α, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme minimal de α sur $\mathbb{Z}$. On voit facilement que pour d et H fixés, l'ensemble des nombres algébriques de degré $\leq d$ et de hauteur $\leq H$ est fini. La "complexité" d'un nombre algébrique α dépend donc de ces deux paramètres : degré et hauteur. On va dans un premier temps borner le degré et faire varier la hauteur.

Étant donné un entier n, on se demande quelle est la plus grande valeur du paramètre réel λ, telle qu'il existe un nombre $c > 0$ pour lequel l'inégalité $|\xi - \alpha| < c\mathrm{H}(\alpha)^{-\lambda}$ admette une infinité de solutions α, avec α nombre algébrique réel de degré $\leq n$. Le principe des tiroirs de Dirichlet permet de voir que $\lambda = 2$ convient pour tout $n \geq 1$, et pour $n = 1$ cette valeur est optimale. H. Davenport et W.M. Schmidt ont montré que $\lambda = 3$ est une valeur admissible pour $n \geq 2$, et c'est optimal pour $n = 2$. La valeur optimale pour $n \geq 1$ devrait être $\lambda = n+1$, mais le seul énoncé général, dû à E. Wirsing (1960), permet de prendre $\lambda = (n/2)+(3/2)$. Pour les petites valeurs de n $(n \leq 10)$ cela a été amélioré par K. Tishchenko en 1996. Le résultat de Wirsing joue maintenant un rôle inattendu en compagnie d'un *critère de transcendance* démontré par A. Durand (raffinant des critères antérieurs de W.M. Schmidt), dans une nouvelle approche des questions d'indépendance algébrique. Les critères de Durand et Schmidt avaient été abondamment utilisés pour obtenir des résultats de transcendance ou d'indépendance algébrique de valeurs de séries lacunaires (par A. Durand et W.M. Schmidt eux-mêmes, mais aussi par G. Baron et E. Braune, P. Bundschuh, R. Wallisser, F. Wylegala, W.W. Adams, Zhu Yaochen, Wang Lianxiang, Xu Guangshan, A. Pethő...). Cependant l'utilisation qui est faite à la fin du XX$^{\text{ème}}$ siècle du théorème de

Wirsing et de ses avatars est bien différente : ils fournissent un substitut aux critères d'indépendance algébrique de Gel'fond et Philippon. En 1996, D. Roy et M. Laurent démontrent la variante suivante des énoncés d'approximation dont il est question, où le degré et la hauteur sont tous deux autorisés à varier :

- *Pour tout nombre réel transcendant θ, il existe un nombre $D_0 > 0$ tel que, pour tout $D \geq D_0$ et tout $H \geq e^D$, il existe un nombre algébrique α de degré $d = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \leq D$ et de hauteur naïve $\mathrm{H}(\alpha) \leq H$ vérifiant*

$$|\theta - \alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-cD} H^{-cd}$$

avec $c = 10^{-5}$.

Mais revenons à A.O. Gel'fond que nous avons abandonné en 1950. Un des énoncés qu'il démontre est l'indépendance algébrique des deux nombres $2^{\sqrt[3]{2}}$ et $2^{\sqrt[3]{4}}$ (il avait annoncé des résultats dans cette direction une quinzaine d'années plus tôt, peu après sa solution du septième problème de Hilbert). En fait la base 2 peut être remplacé par n'importe quel nombre algébrique différent de 0 et de 1, et l'exposant $\sqrt[3]{2}$ par n'importe quel irrationnel cubique β (et, bien sûr, $\sqrt[3]{4}$ par β^2). Encore plus généralement, on peut remplacer $\sqrt[3]{2}$ par un nombre algébrique de degré $d \geq 3$, et le résultat de A.O. Gel'fond s'énonce alors :

- *Si α est un nombre algébrique non nul,* $\log \alpha$ *une détermination non nulle de son logarithme, et β un nombre algébrique de degré $d \geq 3$, alors parmi les nombres*

$$\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}, \tag{11}$$

il y en a au moins deux qui sont algébriquement indépendants.

Le *problème de Gel'fond-Schneider* consiste à montrer que les $d-1$ nombres de la liste (11) sont algébriquement indépendants : autrement dit le *degré de transcendance sur* $\mathbb{Q}$, que nous désignerons par t, du corps $\mathbb{Q}(\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}})$ devrait être $d-1$. Le fait qu'il soit ≥ 1 dès que $d \geq 2$ provient du théorème de Gel'fond-Schneider, et nous venons de voir que l'on a $t \geq 2$ dès que $d \geq 3$.

Dans les années 70, la méthode de Gel'fond a été développée de manière intensive par de nombreux mathématiciens, parmi lesquels R. Tijdeman, W.D. Brownawell, puis par G.V. Chudnovsky qui obtient les premiers résultats de *grands degrés de transcendance* : $t \geq \log_2(d+1)$ où $\log_2$ désigne le logarithme en base 2. La démonstration de Chudnovsky est assez compliquée et a été simplifiée grâce aux travaux de E. Reyssat et P. Philippon notamment. Le critère d'indépendance algébrique de Philippon permet à ce dernier d'améliorer substantiellement la minoration et de montrer $t \geq d/2$. Puis Yu.V. Nesterenko montre comment cet énoncé peut être obtenu sans le critère d'indépendance de Philippon. Enfin G. Diaz obtient la meilleure estimation actuellement connue, $t \geq [(d+1)/2]$, qui contient le résultat initial de A.O. Gel'fond : $t \geq 2$ pour $d \geq 3$.

C'est la méthode de Gel'fond, mais appliquée aux fonctions elliptiques plutôt qu'à la fonction exponentielle, qui permit à G.V. Chudnovsky de démontrer

l'indépendance algébrique des deux nombres π et $\Gamma(1/4)$, de même que celle des deux nombres π et $\Gamma(1/3)$. La transcendance de $\Gamma(1/4)$ ou de $\Gamma(1/3)$ n'était pas connue avant, et on ne sait toujours pas démontrer la transcendance de $\Gamma(1/5)$. Alors que $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(1/3)$ apparaissent dans les périodes d'intégrales elliptiques de première ou de seconde espèce, le nombre $\Gamma(1/5)$ fait appel à des intégrales abéliennes. On dispose de certains énoncés de transcendance sur les intégrales abéliennes, mais ils sont moins précis que pour les intégrales elliptiques. Ainsi on peut seulement affirmer que *deux au moins des nombres π, $\Gamma(1/5)$ et $\Gamma(2/5)$ sont algébriquement indépendants.*

3.2 Groupes algébriques et conjecture des quatre exponentielles

Avant même la solution du septième problème de Hilbert, C.L. Siegel avait obtenu les premiers résultats de transcendance sur des intégrales elliptiques. Ce sujet devait être développé de manière approfondie par Th. Schneider, qui obtenait même des énoncés sur les intégrales abéliennes, lui permettant de démontrer en 1941 la transcendance des valeurs de la fonction Bêta :

- *$B(a,b) = \Gamma(a+b)/\Gamma(a)\Gamma(b)$ est transcendant quand a et b sont des nombres rationnels, non entiers, et tels que $a+b$ ne soit pas entier.*

La démonstration fait intervenir les *Jacobiennes des courbes de Fermat*, qui sont des variétés abéliennes définies sur $\mathbb{Q}$.

C'est à partir d'une suggestion de P. Cartier que S. Lang a développé dans les années 60 une théorie des nombres transcendants dans les groupes algébriques qui va se révéler très fructueuse. L'extension que fait Lang des résultats de base de la théorie (théorèmes de Hermite-Lindemann et Gel'fond-Schneider notamment) sera en effet extrêmement féconde. Les groupes algébriques offriront notamment un cadre approprié pour le développement des lemmes de zéros qui forment une partie importante de la théorie récente.

Alors que le théorème de Gel'fond-Schneider intervient dans les travaux de E. Brieskorn (1970) sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces, et celui de Baker (cf. § 5.1) dans les travaux de J. Hoffmann (1982) sur la théorie de Hodge de fibrés vectoriels sur un tore complexe, c'est un énoncé concernant les groupes algébriques commutatifs qui est utilisé par C.T. Simpson (1996) dans son étude de la correspondance de Riemann-Hilbert pour des systèmes d'équations différentielles.

Le problème initialement posé par Cartier consistait à remplacer, dans le théorème de Hermite-Lindemann sur la transcendance de e^{α}, la fonction exponentielle usuelle par l'application exponentielle d'un groupe algébrique commutatif défini sur un corps de nombres. S. Lang généralise non seulement le théorème de Hermite-Lindemann, mais aussi celui de Gel'fond-Schneider, sans oublier le *théorème des six exponentielles* que voici :

- *Soient d et ℓ deux nombres entiers positifs vérifiant $d\ell > d + \ell$. Soient $x_1, \ldots, x_d$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et soient*

$y_1, \ldots, y_\ell$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des $d\ell$ nombres $e^{x_i y_j}$, $(1 \le i \le d,\ 1 \le j \le \ell)$ est transcendant.

L'hypothèse $d\ell > d + \ell$ sur les nombres entiers d et ℓ signifie ($d \ge 2$ et $\ell \ge 3$) ou ($d \ge 3$ et $\ell \ge 2$). Il n'y a pas de restriction à supposer par exemple $d = 3$ et $\ell = 2$, et alors $d\ell = 6$. Cela justifie le nom de *six exponentielles.* On voudrait bien démontrer cet énoncé dans le cas $d = \ell = 2$: c'est la *conjecture des quatre exponentielles*, qui n'est toujours pas résolue en cette fin de siècle. Elle a été proposée par S. Lang et K. Ramachandra au milieu des années 60 quand ils ont publié leurs démonstrations du théorème des six exponentielles, mais elle se trouvait déjà dans le livre de Th. Schneider paru en 1957, et A. Selberg m'a dit avoir tenté de la résoudre dès le début des années 50. Le cas le plus simple, qui est apparu (implicitement) dans une étude par S. Ramanujan des nombres hautement composés, est le problème ouvert suivant :

- *Existe-t-il un nombre réel irrationnel x tel que 2^x et 3^x soient tous deux entiers ?*

Le théorème des six exponentielles a donc été étendu par S. Lang en un résultat de transcendance concernant les sous-groupes à un paramètre de groupes algébriques commutatifs. Avec E. Bombieri, il obtient aussi un énoncé partiel sur les sous-groupes à plusieurs paramètres. En liaison avec une question concernant les représentations abéliennes ℓ-adiques, un analogue p-adique en est donné par J-P. Serre. Ces énoncés comportaient des hypothèses très restrictives, dont on sait maintenant se débarrasser. Cela nous amène à considérer les développements de la théorie en dimension supérieure.

3.3 Fonctions de plusieurs variables

L'étude de la transcendance de valeurs de fonctions de plusieurs variables a connu un développement un peu paradoxal. La première utilisation dans ce contexte de fonctions analytiques de plusieurs variables se trouve dans le mémoire de Th. Schneider en 1941 déjà cité sur la fonction Bêta. Plus tard, S. Lang étend en plusieurs variables son critère sur la transcendance de fonctions solutions d'équations différentielles ; du point de vue de l'analyse complexe, les arguments utilisés sont assez rudimentaires, car on se restreint à considérer des points appartenant à un produit cartésien. La seule estimation nécessaire provient d'un lemme de Schwarz, et, pour un produit cartésien, elle se démontre en itérant la formule de Cauchy en une variable. Si on veut, on peut énoncer la conclusion du théorème ainsi démontré (qui est une version multidimensionnelle du *critère de Schneider-Lang*) en disant qu'un certain sous-ensemble S de $\mathbb{C}^n$ – ensemble de points où certaines fonctions prennent simultanément des valeurs algébriques – ne contient pas de produit cartésien où chaque facteur aurait beaucoup d'éléments (en une variable, cela revient à majorer le nombre d'éléments de S). Dans le livre de S. Lang sur les nombres transcendants se trouve une suggestion de M. Nagata, selon laquelle S n'est pas contenu dans une hypersurface algébrique de petit degré. Un tel résultat a été produit par E. Bombieri, à la suite d'un travail avec S. Lang utilisant des résultats assez fins sur la *masse moyenne des zéros* de fonctions analytiques de plusieurs variables. En plus, E. Bombieri emploie des *estimations* L^2 de L. Hörmander sur la *résolution du problème du* $\bar\partial$. L'étude arithmétique des fonctions de plusieurs variables a ensuite fait l'objet d'études approfondies par C. Berenstein et A. Yger ainsi que J-P. Demailly. Des méthodes plus algébriques, permettant d'étudier les singularités d'hypersurfaces, ont été développées par H. Esnault et E. Viehweg d'une part, A. Hirschowitz d'autre part.

Le paradoxe vient de ce que tous ces outils, a priori très puissants, n'ont pas permis jusqu'à présent de faire progresser de manière sensible les problèmes de transcendance en dimension supérieure. Les spécialistes de l'analyse complexe en plusieurs variables ont développé des méthodes sophistiquées dont on ne sait pas se servir. Si on savait le faire, on pourrait espérer faire progresser la théorie des nombres transcendants. Mais, en cette fin du vingtième siècle, les travaux dans ce domaine utilisent seulement le lemme de Schwarz pour des fonctions ayant un zéro d'ordre élevé (on se ramène simplement au cas d'une variable) ou, au pire, un lemme de Schwarz pour des produits cartésiens. Malgré la simplicité des arguments analytiques, les progrès récents ont été importants.

Des généralisations multidimensionnelles du théorème des six exponentielles ont été obtenues dans les années 80, permettant de minorer le rang de matrices dont les coefficients sont des logarithmes de nombres algébriques : sous des hypothèses convenables, le rang d'une telle matrice de format $d \times \ell$ est minoré par $d\ell/(d+\ell)$. Ces travaux ont finalement conduit à un résultat très général, le *théorème du sous-groupe algébrique*, mais nous nous contenterons du cas particulier le plus simple. On note $u \cdot v \in \mathbb{C}$ le produit scalaire usuel de $u \in \mathbb{C}^n$ et $v \in \mathbb{C}^n$: pour $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$.

- *Soient d, ℓ et n des nombres entiers positifs vérifiant $d\ell > n(d + \ell)$. Soient $x_1, \ldots, x_d$ et $y_1, \ldots, y_\ell$ des éléments de $\mathbb{C}^n$. On suppose que pour tout $(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et pour tout $(s_1, \ldots, s_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \setminus \{0\}$, le nombre*

$$(t_1 x_1 + \cdots + t_d x_d) \cdot (s_1 y_1 + \cdots + s_\ell y_\ell)$$

n'est pas nul. Alors l'un au moins des $d\ell$ nombres $e^{x_i \cdot y_j}$, $(1 \le i \le d, 1 \le j \le \ell)$ est transcendant.

La motivation initiale de ces travaux est le problème du régulateur p-adique, proposé par Leopoldt, selon lequel le *rang p-adique* r_p du groupe des unités d'un corps de nombres devrait être égal au rang r du groupe des unités. La difficulté essentielle pour étendre en plusieurs variables les résultats de transcendance que fournit la méthode de Schneider provient de l'absence de lemme de Schwarz. Un lemme de zéros de Masser sur les polynômes exponentiels (voir §6) s'est révélé être l'outil clef pour résoudre un problème de Weil sur les *caractères de type* (A_0), et aussi pour fournir des réponses partielles à la *conjecture de Leopoldt.* Il n'y a que dans le cas d'un corps de nombres abélien sur $\mathbb{Q}$, ou sur un corps quadratique imaginaire, qu'elle soit résolue complètement, par le théorème d'Ax-Brumer.

(Signalons à ce propos que le théorème de transcendance de Baker et Brumer sur l'indépendance linéaire de logarithmes p-adiques de nombres algébriques intervient dans des travaux de J-B. Wagoner en 1990 sur des questions de dynamique symbolique.)

Dans le cas général, la meilleure estimation connue est actuellement $r_p \geq r/2$, mais dans certains cas particuliers (D. Roy, M. Laurent), cette estimation peut être améliorée. Des travaux semblables ont été développés en liaison avec une conjecture de J-F. Jaulent, plus générale que celle de Leopoldt.

À la suite des travaux de D. Roy, il est apparu que la minoration du rang de matrices ouvrait une voie prometteuse vers la conjecture principale de ce domaine :

Conjecture. *Si des logarithmes $\log\alpha_1,\ldots,\log\alpha_n$ de nombres algébriques sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors ils sont algébriquement indépendants.*

Autrement dit, les seules relations polynomiales entre des logarithmes de nombres algébriques devraient être des relations linéaires homogènes (et celles qu'on en déduit trivialement). Cela exclurait des relations du type $(\log a)/(\log 2) = (\log b)/(\log 3)$ quand a et b sont des nombres entiers positifs, a n'étant pas une puissance de 2 et b n'étant pas une puissance de 3.

Un des résultats de D. Roy est que cette conjecture sur l'indépendance algébrique de logarithmes est *équivalente* à une minoration du rang de matrices M dont les coefficients sont des combinaisons linéaires, à coefficients algébriques, de logarithmes de nombres algébriques. Comme le cas le plus simple est la conjecture des quatre exponentielles, on voit que celle-ci, qui a pu sembler marginale un certain temps, est vraiment au cœur du sujet ! De plus, pour les matrices M concernées, D. Roy définit un "rang structural" $r_{\mathrm{str}}(M)$ (qui serait celui de M si la conjecture d'indépendance algébrique des logarithmes était vraie), et il montre que le rang de M est toujours $\geq \frac{1}{2}r_{\mathrm{str}}(M)$.

En liaison avec cette question de rang de matrices, voici un exemple d'énoncé "positif" obtenu par des méthodes transcendantes (en plusieurs variables). Il s'agit de la réponse apportée par D. Roy à une question posée par J-L. Colliot-Thélène et J-J. Sansuc :

- *Soit k un corps de nombres de degré $d = r_1 + 2r_2$ sur $\mathbb{Q}$, où r_1 est le nombre de plongements de k dans $\mathbb{R}$ et $2r_2$ le nombre de plongements non réels deux à deux conjugués de k dans $\mathbb{C}$. Il existe un sous-groupe de type fini de $k^\times$, de rang $r_1 + r_2 + 1$, dont l'image par le plongement canonique $k^\times \to (\mathbb{R}^\times)^{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{r_2}$ est dense.*

Le fait, a priori surprenant, que des arguments de la théorie des nombres transcendants permettent d'obtenir *l'existence* d'un sous-groupe de type fini ayant la propriété désirée, s'explique de la façon suivante : on prend un sous-groupe suffisamment général ayant le rang donné. On s'attend en fait à ce qu'il vérifie la propriété annoncée. S'il ne la vérifie pas, alors des relations inattendues entre des logarithmes de nombres algébriques existent, et les méthodes transcendantes peuvent entrer en action.

La conjecture d'indépendance algébrique de logarithmes de nombres algébriques est l'un des principaux problèmes ouverts du sujet en cette fin de siècle. Mais ce n'est pas le plus général. On doit à S. Schanuel la conjecture suivante, réputée contenir tout ce qu'il est raisonnable de conjecturer sur la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de la fonction exponentielle (et de logarithmes) :

- **Conjecture de Schanuel.** *Soient $x_1,\ldots,x_n$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors le corps*

$$\mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_n,e^{x_1},\ldots,e^{x_n})$$

a un degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ supérieur ou égal à n.

C'est le moment de rappeler qu'on ne connaît toujours pas l'indépendance algébrique de e et π. On ne sait pas non plus démontrer qu'il existe deux nombres algébriques ayant des logarithmes algébriquement indépendants.

3.4 Classification des nombres transcendants

Quelques mots sur les problèmes de classification des nombres transcendants par leurs propriétés d'approximations : celles de K. Mahler et J. Koksma au début du siècle ont fait l'objet de travaux de V.G. Sprindžuk, et plus tard de M. Amou. Mahler a proposé une autre classification, qui a des liens étroits avec la notion de *type de transcendance* introduite par S. Lang, et les problèmes posés par K. Mahler à cette occasion ont été résolus par A. Durand. Ensuite, Yu Kunrui a étendu la classification de Mahler en plusieurs variables.

Plus récemment, des méthodes d'analyse non standard ont été introduites par P. Philippon pour raffiner la classification de Mahler afin de répondre à la contrainte suivante : *deux éléments sont dans la même classe si et seulement s'ils sont algébriquement dépendants.*

4. La méthode de Siegel-Šidlovskiĭ : E-fonctions et G-fonctions, fonctions hypergéométriques

Les notions de E-fonction et de G-fonction ont été introduites par C.L. Siegel en 1929, dans la deuxième partie de son célèbre mémoire contenant le résultat de finitude des points entiers sur une courbe de genre ≥ 1. Une *E-fonction* de Siegel est une fonction entière (analytique dans $\mathbb{C}$), solution d'une équation différentielle

$$f^{(m)} + r_1 f^{(m-1)} + \cdots + r_{m-1}f' + r_m f + r_0 = 0 \qquad (12)$$

à coefficients $r_0, r_1, \ldots, r_m$ dans $\mathbb{C}[z]$, dont le développement de Taylor à l'origine s'écrit

$$\sum_{n\geq 0} c_n \frac{z^n}{n!},$$

où les coefficients c_n, $(n \geq 0)$, appartiennent tous à un même corps de nombres K, sont bornés avec leurs conjugués par

$$\log \overline{|c_n|} = O(n) \quad \text{pour } n \to \infty,$$

et ont un dénominateur borné de la manière suivante : il existe une suite $(d_n)_{n \geq 0}$ d'entiers > 0 majorée par

$$\log d_n = O(n) \quad \text{pour } n \to \infty$$

et telle que $d_n c_k$ soit entier algébrique pour $0 \leq k \leq n$ et $n \geq 0$. Une *G-fonction* est une fonction analytique au voisinage de 0, solution d'une équation différentielle (12), dont le développement de Taylor à l'origine s'écrit

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n;$$

les coefficients c_n, $(n \geq 0)$, sont astreints aux mêmes conditions.

4.1 Les E-fonctions de Siegel

La fonction exponentielle est une E-fonction. Pour chaque entier rationnel $\lambda \notin \{-1, -2, \ldots\}$, la fonction

$$K_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

qui est solution de l'équation différentielle

$$y'' + \frac{2\lambda+1}{z} y' + y = 0,$$

est une E-fonction. Ces fonctions K_λ sont reliées à celles de Bessel

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda K_\lambda(z),$$

qui sont solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{z} y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) y = 0.$$

Les travaux de C.L. Siegel en 1929 généralisaient la méthode classique de Ch. Hermite, mais la construction d'une fonction auxiliaire, explicite chez Hermite, repose sur l'utilisation du principe des tiroirs (lemme de Thue-Siegel) chez Siegel. Vingt ans après son texte initial, C.L. Siegel a repris cette question et donné un énoncé général d'indépendance algébrique de valeurs de E-fonctions solutions d'un système d'équations différentielles linéaires homogènes. Les applications étaient limitées, en pratique, aux équations différentielles d'ordre 1 ou 2. Les travaux de A.B. Šidlovskiĭ, à partir de 1954, ont permis d'obtenir des résultats généraux portant sur des systèmes d'équations différentielles

$$y'_k = Q_{k0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{ki} y_i, \qquad (1 \leq k \leq m),$$

où Q_{ki}, $(1 \leq k \leq m,\ 0 \leq i \leq m)$ sont des fractions rationnelles à coefficients complexes. Le théorème de Lindemann-Weierstraß sur l'indépendance algébrique de nombres de la forme e^α est généralisé ainsi :

- *Soit $T \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme non nul tel que $TQ_{ki} \in \mathbb{C}[z]$ pour $1 \leq k, i \leq m$. Si $f_1, \ldots, f_m$ sont des E-fonctions qui forment un système fondamental de solutions de ce système, et sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(z)$, alors pour tout nombre algébrique ξ tel que $\xi T(\xi) \neq 0$, les nombres $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ sont algébriquement indépendants.*

La méthode de Siegel-Šidlovskiĭ s'applique à des fonctions solutions d'équations différentielles, et en particulier à des fonctions hypergéométriques

$${}_\ell F_m \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_\ell \\ b_1, \ldots, b_m \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_\ell)_n}{(b_1)_n \cdots (b_m)_n} \frac{z^n}{n!},$$

avec la notation de Pochhammer :

$$\begin{cases} (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \Gamma(n+a)/\Gamma(a) & \text{pour } n \geq 1, \\ (a)_0 = 1. \end{cases}$$

Cette méthode a été abondamment développée par des élèves de Šidlovskiĭ (notamment V.Kh. Salikhov, I.I. Belogrivov, V.G. Chirskii, M.S. Nurmagomedov, A.I. Galochkin, Yu.V. Nesterenko, V.A. Oleinikov), et par quelques mathématiciens en dehors de cette école (citons K. Mahler, S. Lang, K. Väänänen, G.V. Chudnovsky, T. Matala-Aho...).

En 1949, C.L. Siegel avait introduit une notion de *normalité pour un système homogène d'équations différentielles linéaires du premier ordre*, pour garantir qu'un certain déterminant ne s'annulait pas. Les résultats de Šidlovskiĭ supposent seulement que les fonctions considérées sont algébriquement indépendantes. C'est une hypothèse bien naturelle pour espérer obtenir l'indépendance algébrique des valeurs de ces fonctions, mais il faut encore la vérifier, et de nombreux travaux ont été consacrés à cette question (K. Mahler, V.A. Oleinikov, V.Kh. Salikhov...). Ainsi F. Beukers, W.D. Brownawell et G. Heckmann (1988) font intervenir un *groupe de Galois différentiel* pour donner des critères de normalité au sens de Siegel ; cela leur permet d'intégrer au champ d'applications de la méthode de

Siegel-Šidlovskiĭ de larges classes nouvelles de fonctions, notamment des produits de puissances de fonctions hypergéométriques et leurs dérivées.

Rendre effectifs ces résultats afin de donner des mesures de transcendance et d'indépendance algébrique a fait l'objet de nombreuses recherches. Déjà C.L. Siegel en 1929 avait donné de telles estimations. A.B. Šidlovskiĭ en 1959, puis S. Lang en 1962, obtiennent des mesures de transcendance de valeurs de E-fonctions. Ces estimations ont été raffinées en 1977 par Yu.V. Nesterenko ; c'est pour démontrer des lemmes de zéros précis pour des solutions d'équations différentielles qu'il introduit ses outils d'algèbre commutative et de géométrie algébrique classique (voir §6) qui vont se révéler utiles dans bien d'autres domaines de la théorie des nombres transcendants. G.V. Chudnovsky poursuit cette étude en 1984, puis D. Bertrand et F. Beukers obtiennent des majorations de multiplicités l'année suivante, et W.D. Brownawell peut alors obtenir une mesure d'indépendance algébrique effective pour le théorème principal de Šidlovskiĭ pour les E-fonctions. Les hypothèses de Brownawell ont ensuite été affaiblies par Yu.V. Nesterenko (1988). En 1996, A.B. Šidlovskiĭ et Yu.V. Nesterenko ont obtenu des résultats d'indépendance linéaire qui sont plus précis que ceux d'indépendance algébrique.

4.2 Les G-fonctions de Siegel

En utilisant un théorème d'Eisenstein, on montre qu'une fonction f, algébrique sur $\mathbb{Q}(z)$, qui est régulière au voisinage de 0, est une G-fonction. Il en résulte que

$$z \mapsto \int_0^z f(t)dt$$

est aussi une G-fonction. Par conséquent les binômes $(1+\alpha z)^r$ (avec r rationnel et α algébrique) et les fonctions $\log(1+\alpha z)$ sont des G-fonctions. Un autre exemple de G-fonction est donné par la série hypergéométrique de Gauss :

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!},$$

pour α, β et γ nombres rationnels (et $\gamma \notin \{0,-1,-2,\dots\}$).

La méthode de Siegel-Šidlovskiĭ ne permet pas de démontrer la transcendance, et encore moins l'indépendance algébrique, de valeurs de G-fonctions. En 1971, M.S. Nurmagomedov a obtenu des premiers résultats sur les valeurs des fonctions :

$$\log(1-\beta z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \frac{z^n}{n},$$

pour β entier algébrique, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+\lambda)^k};$$

puis avec V.G. Chirskii, en 1973, sur

$${}_2F_1(1,\mu,\lambda;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu)_n}{(\lambda)_n} z^n.$$

Comme on sait très peu de choses sur l'indépendance algébrique de logarithmes, il est intéressant de noter que les G-fonctions permettent de minorer une expression $|P(\theta_1,\dots,\theta_m)|$, quand P est un polynôme à coefficients entiers, $\theta_i = \log(1-\gamma_i)$ avec $\gamma_i = \beta_i b/a$, où a, β_i sont des entiers algébriques et b un entier rationnel positif. Mais il faut supposer b grand par rapport à m, a, $\beta_1,\dots,\beta_m$, et aussi par rapport au degré de P.

La transcendance de valeurs de fonctions hypergéométriques a par ailleurs été l'occasion de recherches utilisant différentes approches. Y. André a obtenu, grâce aux G-fonctions, des résultats d'indépendance algébrique, ce qui est d'autant plus remarquable que ces G-fonctions servaient plutôt, avant ces travaux d'Y. André, à établir des mesures d'indépendance linéaire.

Bien que la méthode utilisée soit différente de celle des G-fonctions, mentionnons ici une autre manière d'étudier les valeurs de fonctions hypergéométriques (proposée encore par C.L. Siegel), qui a été développée par J. Wolfart, d'abord seul, puis en collaboration avec F. Beukers. J. Wolfart classifie finalement les quadruplets $(a,b,c;\alpha)$ avec a,b,c rationnels et α algébrique pour lesquels le nombre ${}_2F_1(a,b,c;\alpha)$ est algébrique. En voulant vérifier que les seules valeurs algébriques étaient celles qui étaient "bien connues", il a découvert de nouvelles relations inattendues, telles que

$${}_2F_1\left(\frac{1}{12},\frac{7}{12},\frac{2}{3};\frac{64000}{64009}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[6]{253}.$$

Dans un style très différent, l'étude des valeurs algébriques exceptionnelles des fonctions hypergéométriques a aussi été entreprise par M. Flach (1989), G.S. Joyce et I.J. Zucker (1991).

Revenons à la méthode des G-fonctions. On doit à V.G. Chirskii et A.I. Galochkin des résultats sur les intégrales elliptiques, à A.I. Galochkin des estimations très fines d'irrationalité pour quelques classes de nombres irrationnels et à E.M. Matveev des minorations de formes linéaires de valeurs de G-fonctions, qu'il applique à certaines équations diophantiennes. De leur côté, K. Mahler, D.V. et G.V. Chudnovsky, K. Väänänen et Xu Guang Shan, M. Nagata notamment ont produit des énoncés d'approximation diophantienne très précis, à la fois complexes et p-adiques.

En 1981, E. Bombieri a complété les démonstrations des énoncés que C.L. Siegel avait formulés en 1929. Avant cet article, on ne disposait pas de résultats généraux sur la nature arithmétique des valeurs de G-fonctions. Une approche différente a été proposée par P. Dèbes en 1986, à partir de la méthode de Gel'fond. Les hypothèses restrictives qui figurent dans ces travaux de Bombieri et Dèbes seront éliminées par P. Dèbes et U. Zannier en 1996. Une des principales applications de ces énoncés sur l'indépendance linéaire de valeurs de G-fonctions concerne le théorème d'irréductibilité de Hilbert.

4.3 Théorème d'irréductibilité de Hilbert

Les méthodes transcendantes concernent au premier chef les fonctions transcendantes (dont on souhaite montrer qu'elles prennent rarement des valeurs algébriques, tout au moins en des points algébriques). Mais ces mêmes méthodes s'appliquent aussi aux fonctions algébriques. On s'attend ainsi à ce qu'une fonction algébrique de degré d prenne rarement des valeurs algébriques de degré $< d$, tout au moins en des points rationnels. De manière anecdotique, remarquons que le théorème de Wiles résolvant le problème de Fermat peut s'énoncer comme un résultat d'irrationalité : *pour x rationnel dans l'intervalle $0 < x < 1$, et pour n entier ≥ 3, le nombre*

$$\sqrt[n]{1-x^n}$$

est irrationnel.

Le théorème d'irréductibilité de Hilbert va bien dans ce sens : *si $f \in \mathbb{Q}[X,Y]$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}(X)[Y]$, alors pour une infinité de $x \in \mathbb{Q}$, le polynôme $f(x,Y) \in \mathbb{Q}[Y]$ est irréductible.*

Th. Schneider (1973), puis P. Bundschuh (1978) avaient déjà appliqué la méthode transcendante de Gel'fond à l'étude des valeurs de fonctions algébriques. À partir de 1979, V.G. Sprindžuk a étudié les points rationnels sur des courbes algébriques et la *spécialisation arithmétique* de polynômes. L'idée principale à la base de cette étude consiste à rechercher des liens entre d'une part la structure multiplicative de la spécialisation $f(x,Y) \in \mathbb{Q}[Y]$ d'un polynôme $f \in \mathbb{Q}[X,Y]$ en un point x rationnel, et d'autre part la structure multiplicative du nombre rationnel x. Par exemple, il se demande si $f(x,Y)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[Y]$ quand x est un nombre premier, ou bien une puissance d'un nombre premier. Il est amené à considérer des séries formelles algébriques (solutions $y(x)$ de l'équation $f(x,y)=0$) dont il étudie le comportement non seulement dans le corps des nombres réels (ou celui des nombres complexes), mais dans tous les complétés de $\mathbb{Q}$.

Des recherches analogues ont été entreprises par E. Bombieri en 1983 en liaison avec le *théorème de décomposition de Weil.* Puis P. Dèbes a adapté la méthode de Gel'fond à ce contexte, et cela a été utile à Y. André dans ses recherches sur les G-fonctions. C'est ainsi que P. Dèbes a introduit la notion de *point s-entier* sur une courbe algébrique (les coordonnées d'un tel point ont des dénominateurs divisibles par au plus s nombres premiers) ; l'énoncé général qu'il obtient lui donne une forme explicite du théorème de Hilbert pour des corps admettant une formule du produit. Enfin les méthodes d'approximation diophantienne et de transcendance se révèlent efficaces pour construire des *parties hilbertiennes universelles* : ce sont les ensembles infinis E de nombres rationnels tels que, pour tout polynôme $f \in \mathbb{Q}[X,Y]$ irréductible dans $\mathbb{Q}(X)[Y]$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x,Y)$ soit réductible dans $\mathbb{Q}[Y]$ est fini. En voici quelques exemples :

- V.G. Sprindžuk : $\left\{[\exp(\sqrt{\log\log n})] + 2^{n^2}n! \ ; \ n \geq 3\right\}$, grâce à sa théorie de spécialisation.
- M. Yasumoto : $\left\{2^n(n^3+1) \ ; \ n \geq 0\right\}$ et $\left\{2^n p_n \ ; \ n \geq 1\right\}$, utilisant le théorème de Siegel.
- P. Dèbes et U. Zannier : $\left\{2^n + n \ ; \ n \geq 0\right\}$ et $\left\{2^n + 5^n \ ; \ n \geq 0\right\}$, puis P. Corvaja et U. Zannier : $\left\{a_1^n + \cdots + a_k^n \ ; \ n \geq 0\right\}$ quand $a_1, \ldots, a_k$ sont des entiers positifs multiplicativement indépendants, utilisant les théorèmes de Siegel et Ridout et le théorème des sous-espaces.
- Yu. Bilu : $\left\{[\log\log n] + n^3 \ ; \ n \geq 3\right\}$, utilisant le théorème de Siegel et la méthode de Gel'fond-Baker.
- U. Zannier : $\left\{p_n \prod_{p_k < \log\log n} p_k \ ; \ n \geq 1\right\}$, utilisant le théorème de Siegel (p_n désigne le n-ième nombre premier).

Pour terminer ce paragraphe, quelques problèmes ouverts : on sait très peu de choses sur l'irrationalité des valeurs, en des points algébriques, de fonctions hypergéométriques avec des paramètres algébriques (on citera seulement des travaux de C.F. Osgood et V.G. Sprindžuk). D'autre part on ne connaît pas de borne explicite pour la plus petite hauteur d'une bonne spécialisation dans le théorème d'irréductibilité de Hilbert : peut-on trouver une telle spécialisation en temps polynomial ? Existe-t-il une borne ne dépendant que du degré ?

5. Méthode de Gel'fond-Baker

5.1 Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes

Après avoir résolu en 1934 (en même temps que Th. Schneider, et par une méthode différente) le septième problème de Hilbert sur la transcendance de α^β, A.O. Gel'fond avait raffiné ses outils pour obtenir des minorations d'expressions de la forme $|\beta \log \alpha_1 - \log \alpha_2|$, quand les trois nombres α_1, α_2 et β sont algébriques. La seule hypothèse nécessaire est que le nombre $\beta \log \alpha_1 - \log \alpha_2$ considéré ne s'annule pas. Le cas particulier le plus important est celui où β est rationnel : il s'agit alors de minorer non trivialement un nombre qui s'écrit $|\alpha_1^{b_1}\alpha_2^{b_2} - 1|$. Une minoration "triviale" est $|\alpha_1^{b_1}\alpha_2^{b_2} - 1| \geq e^{-cB}$, avec $B = \max\{|b_1|, |b_2|\}$, et c est un nombre positif qui ne dépend que de α_1 et α_2 (et qu'il est facile d'expliciter). On déduit cette minoration de l'argument qu'avait utilisé J. Liouville en 1844 pour construire les premiers exemples de nombres transcendants. Un exemple typique est l'inégalité élémentaire

$$\left|\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{b_1}\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{b_2} - 1\right| \geq \frac{1}{q_1^{b_1}q_2^{b_2}} \geq e^{-cB} \quad \text{avec} \quad c = \log(q_1 q_2),$$

quand $p_1, p_2, q_1, q_2, b_1, b_2$ sont des entiers rationnels positifs soumis à la condition

$$\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{b_1}\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{b_2} \neq 1.$$

A.O. Gel'fond obtient des minorations non triviales, de la forme $\exp\{-c(\log B)^2\}$, avec une nouvelle "constante" $c = c(\alpha_1, \alpha_2)$, qui est "effectivement calculable". Il en déduit de remarquables conséquences sur différentes questions diophantiennes (ces résultats "effectifs" de Gel'fond seront rendus "explicites" par A. Schinzel en 1967). Il avait mis en évidence l'intérêt qu'il y aurait à étendre ce type d'estimations à des produits plus généraux $\alpha_1^{b_1}\cdots\alpha_n^{b_n}$. Il avait obtenu des estimations non triviales, mais aussi non effectives, pour la distance entre un tel nombre et 1, à l'aide du théorème de Thue-Siegel-Roth. La difficulté était de donner des minorations dans lesquelles toutes les "constantes" puissent être calculées. C'est précisément ce qu'a fait A. Baker en 1966, en développant la méthode de Gel'fond.

La méthode de Gel'fond-Baker permet de minorer des "formes linéaires" non nulles

$$\beta_0 + \beta_1 \log\alpha_1 + \cdots + \beta_n \log\alpha_n$$

quand les α_i sont des nombres algébriques non nuls (dont on choisit une détermination complexe du logarithme) et les β_i sont des nombres algébriques. Le "cas rationnel", où $\beta_0 = 0$ tandis que $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont des entiers rationnels, est le plus important pour beaucoup d'applications. Voici cependant un exemple, en dehors de la théorie des nombres transcendants, développé par A.O. Gel'fond, où une minoration non triviale pour une combinaison linéaire de logarithmes à coefficients algébriques joue un rôle clef : il s'agit du *problème du nombre de classes* 1. C.F. Gauss avait remarqué en 1802 que les 9 discriminants fondamentaux

$$d = -3,\ -4,\ -7,\ -8,\ -11,\ -19,\ -43,\ -67,\ -163$$

ont pour nombre de classes 1 (ce qui signifie que l'anneau des entiers du corps de nombres quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ correspondant est principal), et il avait suggéré qu'il n'y en avait pas d'autre. A.O. Gel'fond a montré qu'une minoration effective pour des combinaisons linéaires de trois logarithmes permettrait de répondre à cette question de Gauss. Mais c'est seulement pour deux logarithmes que Gel'fond arrivait à une telle estimation. Cette question a motivé les premières recherches de A. Baker sur les formes linéaires de logarithmes. Le problème du nombre de classes 1 devait d'ailleurs être résolu simultanément par A. Baker lui-même et par H.M. Stark en 1967, mais par une méthode algébrique. Le fait qu'il n'existe pas de dixième discriminant se ramène à déterminer les solutions entières des équations diophantiennes $8x^6 \pm 1 = y^2$ et $x^6 \pm 1 = 2y^2$. Ces équations apparaissent déjà dans un travail de K. Heegner en 1952, mais les résultats qu'il utilisait, concernant les formes modulaires, et énoncés dans le livre de H. Weber à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, ne seront démontrés qu'en 1968 par M. Deuring

(puis en 1969 par H.M. Stark et B.J. Birch). H.M. Stark et N.G. Chudakov (indépendamment) devaient d'ailleurs montrer, peu de temps après, comment A.O. Gel'fond aurait pu modifier légèrement sa démonstration et la compléter à l'aide de ses minorations effectives de combinaisons linéaires de deux logarithmes ! Les méthodes transcendantes ont permis ensuite à A. Baker et H.M. Stark, dans un travail commun, de résoudre le problème du *nombre de classes* 2. Ici encore, des équations diophantiennes sont au rendez-vous. L'équation hyperelliptique $13y^2 = x^6 + 10x^3 - 27$, introduite dans ce contexte par J.A. Antoniadis, a été résolue par B.M.M. de Weger en 1992. Mais d'autres arguments (D. Goldfeld 1976, B. Gross et D.B. Zagier 1986), reposant sur l'arithmétique des courbes elliptiques, permettent maintenant de déterminer effectivement tous les corps quadratiques imaginaires de nombre de classes donné.

C'est par la méthode de Gel'fond-Baker qu'ont été obtenus les premiers raffinements effectifs de l'exposant dans l'inégalité de Liouville. Le chemin suivi va en direction inverse de celui de Thue : on démontre d'abord un résultat explicite sur les équations de Thue, et de cette estimation on déduit l'amélioration de l'exposant de Liouville.

En 1968, donc, N.I. Fel'dman a démontré que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres algébriques, il existe une constante $C > 0$ (que l'on peut expliciter en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et n) telle que, pour tout $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $\alpha_1^{b_1}\cdots\alpha_m^{b_m} \neq 1$, on ait

$$\left|\alpha_1^{b_1}\cdots\alpha_m^{b_m} - 1\right| \geq B^{-C},$$

avec $B = \max\{|b_1|, \ldots, |b_m|, 2\}$. Il en déduit une borne explicite pour l'équation de Thue (3) en fonction de k :

- *Pour tout polynôme homogène irréductible $F \in \mathbb{Z}[X,Y]$ de degré ≥ 3, il existe deux constantes positives C et θ, que l'on peut expliciter, telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, on ait*

$$|F(x,y)| \geq C\big(\max\{|x|,|y|\}\big)^{\theta}.$$

Une conséquence importante de cette estimation est un raffinement effectif de l'inégalité de Liouville :

- *Pour tout nombre algébrique α de degré $d \geq 3$, il existe deux constantes positives $c(\alpha)$ et $\eta(\alpha)$, effectivement calculables, telles que, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$,*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^{d-\eta(\alpha)}}.$$

Des énoncés explicites et des généralisations au cas de corps de nombres ont été obtenus par beaucoup de mathématiciens ; K. Győry notamment, partiellement en collaboration avec Z.Z. Papp, et ensuite avec Y. Bugeaud, a donné de nombreuses estimations précises et complètement explicites sur ces questions. Signalons aussi un travail de A. Baker et C.L. Stewart qui explicitent l'amélioration de l'inégalité de Liouville que donne la méthode de Gel'fond-Baker pour les racines cubiques.

Ces problèmes de minorations de combinaisons linéaires de logarithmes ont des liens avec la conjecture *abc* de D.W. Masser et J. Œsterlé, qui s'énonce ainsi :

- **Conjecture** *abc***.** *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\kappa(\epsilon) > 0$ possédant la propriété suivante : si a, b et c sont trois entiers rationnels positifs sans facteur commun, vérifiant $a+b=c$, et si*
$$r = r(abc) = \prod_{p|abc} p$$
désigne le radical (partie sans facteur carré) du produit abc, alors
$$c < \kappa(\epsilon) r^{1+\epsilon}.$$

L'exemple $a=1$, $c=3^{2^n}$, $b=c-a$ (noter que 2^{n+2} divise b quand $n \geq 1$) montre que l'exposant $1+\epsilon$ ne peut pas être remplacé par 1. Un analogue polynomial de la conjecture *abc* est un théorème de W.W. Stothers (1981) redécouvert en 1984 par R. Mason. Grâce à des minorations (p-adiques) de combinaisons linéaires de logarithmes, R. Tijdeman, C.L. Stewart et Yu Kunrui ont obtenu les premières estimations en direction de la conjecture *abc* :
$$\log c \leq \kappa(\epsilon) r^{(1/3)+\epsilon}.$$

Plusieurs variantes de la conjecture *abc* ont été proposées.

N. Elkies a montré que la conjecture *abc* entraîne celle de Mordell (qui est maintenant le théorème de Faltings). Des travaux de M. Langevin, N. Elkies et E. Bombieri établissent des liens entre la conjecture *abc* et le théorème de Thue-Siegel-Roth. Des spéculations sur la dépendance de $\kappa(\epsilon)$ en fonction de ϵ ont été suggérées par A. Baker, en liaison avec la conjecture suivante, proposée par S. Lang et M. Waldschmidt :

Conjecture. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ ayant la propriété suivante. Soient $a_1, \ldots, a_m$ des entiers rationnels positifs, $b_1, \ldots, b_m$ des entiers rationnels tels que le nombre $a_1^{b_1} \cdots a_m^{b_m} - 1$ ne soit pas nul. On pose*
$$B = \max\{|b_1|, \ldots, |b_m|, 2\} \quad et \quad A = \max\{a_1, \ldots, a_m, 2\}.$$
Alors
$$\left| a_1^{b_1} \cdots a_m^{b_m} - 1 \right| \geq \frac{C(\epsilon)^m}{B^{m-1+\epsilon} A^{m+\epsilon}}. \tag{13}$$

Cette inégalité permettrait de résoudre la conjecture de S. Pillaï, selon laquelle la distance entre deux puissances parfaites consécutives tend vers l'infini (une *puissance parfaite* est un entier positif de la forme a^n avec $n \geq 2$). Autrement dit, d'après Pillaï, pour chaque $k \geq 1$, l'équation $x^p - y^q = k$ n'a qu'un nombre fini de solutions (x, y, p, q) en entiers ≥ 2. Seul le cas $k=1$ est connu, et cela nous amène à l'étude des équations diophantiennes.

5.2 Équations diophantiennes

En un sens restreint, une *équation diophantienne* est une équation de la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, où f est un polynôme fixé à coefficients rationnels, tandis que les inconnues $x_1, \ldots, x_n$ sont soit des nombres entiers, soit des nombres rationnels. Nous considérerons principalement le cas entier, qui habituellement nécessite le plus d'outils d'approximation diophantienne ; mais avec les travaux récents de E. Bombieri, G. Faltings, P. Vojta,…, le cas rationnel (qui fait intervenir davantage de géométrie algébrique) aurait mérité certainement d'être davantage développé dans ce survol.

Souvent, on remplace le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels par un corps de nombres (et l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels par celui des entiers du corps de nombres, ou bien par un anneau de S-entiers). Enfin on considérera aussi des *équations diophantiennes exponentielles*, dans lesquelles certains exposants sont considérés comme des inconnues.

La méthode de Gel'fond-Baker est une des plus efficaces pour résoudre explicitement en nombres entiers de vastes classes d'équations diophantiennes. Elle incorpore des idées de C.L. Siegel, K. Mahler et S. Lang. Elle permet notamment de donner des majorations explicites

- pour les points entiers sur des courbes de genre 0 ou 1 (version effective du théorème de Siegel due à A. Baker et J.H. Coates, et raffinée par W.M. Schmidt) ;
- pour les solutions des *équations de Thue* (3) que nous avons déjà rencontrées : $F(x,y)=k$, où F est un polynôme homogène à coefficients algébriques, k un nombre algébrique non nul donné, et le polynôme $F(X,1)$ est supposé avoir au moins trois racines distinctes ;
- pour les solutions des équations elliptiques, hyperelliptiques et superelliptiques $y^n = f(x)$ de genre ≥ 1, où n est un entier ≥ 2 donné et $f(x)$ un polynôme à coefficients algébriques ; par exemple, si $n=2$ et $f(x)$ possède au moins trois racines distinctes, ou encore si $n \geq 3$ et $f(x)$ a au moins deux racines distinctes ;
- pour les revêtements galoisiens de la droite projective de genre ≥ 1. En d'autres termes, il s'agit des courbes d'équation $F(x,y)=0$, où $F(X,Y)$, considéré comme polynôme en Y avec des coefficients dans $\mathbb{C}(X)$, définit une extension galoisienne du corps $\mathbb{C}(X)$. Cela généralise l'équation superelliptique, car le polynôme $y^m - f(x)$ est galoisien. Des versions effectives du théorème de Siegel pour ces courbes ont été obtenues par Yu. Bilu (1988), puis U. Zannier (1994) et D. Poulakis (1996) ;
- pour les points entiers sur les courbes modulaires $X(N)$ avec $N \geq 2$, $X_1(N)$ avec $N \geq 4$, et $X_0(N)$ avec $N \neq 1,2,3,5,7,13$. Le cas $X(N)$ est essentiellement dû à D. Kubert et S. Lang. Il résulte aussi de la version effective du théorème de Siegel pour les revêtements galoisiens, car j :

$X(N) \to \mathbb{P}^1$ est un revêtement galoisien. Les cas de $X_1(N)$ et $X_0(N)$ sont dus à Yu. Bilu (1995).

Cette liste n'épuise pas le champ d'applications de la méthode ; ainsi K. Győry a montré comment l'utiliser pour certaines classes d'équations formes décomposables (8). En 1976 il a donné les premières bornes explicites pour les solutions d'équations *formes discriminants* et *formes indices* (en anglais *discriminant form equations* et *index form equations*). Il s'agit des équations (8) dans lesquelles les valeurs de la forme F en des points $\underline{x} \in \mathbb{Z}^m$ sont précisément les *discriminants* ou les *indices* des entiers d'un corps de nombres. Dire que la forme indice vaut ± 1 revient à dire que l'anneau des entiers du corps de nombres est *monogène*, c'est-à-dire de la forme $\mathbb{Z}[\alpha]$. De ses résultats Győry a déduit diverses applications en théorie des nombres algébriques. Par exemple, il a montré que, à translation près par des éléments de $\mathbb{Z}$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments α de K tels que l'anneau des entiers de K soit de la forme $\mathbb{Z}[\alpha]$, et il a fournit une borne explicite pour la hauteur de ces α. De plus, à translation $f(X) \mapsto f(X+a)$ près avec $a \in \mathbb{Z}$, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes unitaires $f \in \mathbb{Z}[X]$ de discriminant non nul donné, et tous ces f peuvent être déterminés effectivement. En 1978, K. Győry et Z.Z. Papp ont donné une version effective du théorème de finitude de W.M. Schmidt pour une classe d'équations normiques. Ces résultats ont diverses applications et généralisations (K. Győry, Z.Z. Papp, L.A. Trelina, S.V. Kotov, I. Gaál, Y. Bugeaud...). Par exemple, grâce à un argument effectif de spécialisation, K. Győry a généralisé les résultats précédents aux équations sur des anneaux quelconques de type fini sur $\mathbb{Z}$.

D'après des théorèmes classiques de J-L. Lagrange et Ch. Hermite, il n'y a qu'un nombre fini de classes de formes quadratiques ou cubiques respectivement, deux à deux non équivalentes (sous le groupe unimodulaire), à coefficients entiers, de discriminant non nul donné ; ces énoncés sont effectifs. Une généralisation non effective avait été obtenue par B.J. Birch et J.R. Merriman pour les formes de degré $n > 3$. En utilisant la méthode de Gel'fond-Baker, une version quantitative effective a été obtenue par J.H. Evertse et K. Győry en 1991. Cet énoncé est important par exemple en géométrie des nombres.

Les majorations provenant de la méthode transcendante concernent la *taille* des solutions, soit dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres, soit plus généralement dans l'anneau des S-entiers de K. Ainsi, quand K est un corps de nombres et S un ensemble fini de valeurs absolues de K, il n'y a qu'un nombre fini de courbes elliptiques sur K avec bonne réduction en dehors de S, et la méthode de Gel'fond-Baker permet de les déterminer effectivement. Par exemple, M. Agrawal, J.H. Coates, D.C. Hunt et A.J. van der Poorten ont montré que la liste connue des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ de *conducteur* 11 était complète. Les courbes de genre 2 qui ont mauvaise réduction en 2 seulement sont aussi connues grâce à N.P. Smart. À ce propos, un argument de crible a permis à R.G.E. Pinch de ramener la conjecture de Shimura-Taniyama à la vérification du fait que toutes les solutions de certaines équations diophantiennes, telles que $y^2 = x^3 + 1728k$, sont

exactement celles que l'on connaît.

Dans certains cas, on peut aussi faire varier les exposants et traiter les *équations diophantiennes exponentielles.* Dès 1940, A.O. Gel'fond avait étudié des équations de la forme $\alpha^x + \beta^y = \gamma^z$, où α, β, γ sont des nombres algébriques non nuls fixés, et les inconnues x, y, z sont des entiers rationnels. On peut maintenant traiter des équations bien plus générales (celle de Gel'fond est un cas particulier d'équations (10) en S-unités). Un des exemples les plus célèbres d'équations diophantiennes exponentielles est l'équation de Catalan, et le théorème de R. Tijdeman (1976) s'énonce : *il n'y a qu'un nombre fini de quadruplets (x, y, p, q) d'entiers, tous ≥ 2, vérifiant*

$$x^p - y^q = 1.$$

La seule solution connue de l'équation de Catalan est $(x, y, p, q) = (3, 2, 2, 3)$. Catalan a conjecturé en 1844 qu'il n'y en avait pas d'autres. La première majoration explicite pour une solution de cette équation a été fournie par M. Langevin : $y^q < x^p < \exp\exp\exp\exp(730)$. Le point essentiel consiste à borner le plus grand facteur premier de pq, et la borne de Langevin est e^{241}. Grâce à des estimations raffinées de combinaisons linéaires de deux logarithmes qu'il a obtenues en collaboration avec M. Laurent et Yu.V. Nesterenko, M. Mignotte a démontré, pour toute solution x, y, p, q, l'encadrement $10^6 \leq \max\{p, q\} \leq 10^{18}$. Il a montré aussi qu'il n'y avait pas de solution avec $\min\{p, q\} \leq 10^5$. Un groupe de mathématiciens de Bowling Green (Ohio, USA) travaille également sur cette question. Ces résultats numériques sont loin de permettre une solution complète de la conjecture de Catalan, et il semble qu'une idée nouvelle soit encore nécessaire.

Le théorème de Tijdeman a connu diverses généralisations, par exemple aux corps de nombres, ou encore au cas non archimédien (A.J. van der Poorten, B. Brindza, K. Győry, R. Tijdeman...).

Le principe de base consiste à ramener les équations polynomiales considérées ci-dessus à des équations à deux inconnues en S-unités. Ceci explique le fait qu'un résultat clef dans les applications de la méthode de Gel'fond-Baker aux équations diophantiennes soit le suivant : *si K est un corps de nombres et S un ensemble fini de valeurs absolues de K (contenant les valeurs absolues archimédiennes), l'équation (5) n'a qu'un nombre fini de solutions (u_1, u_2) en S-unités de K. De plus on peut donner des bornes explicites pour la hauteur de ces solutions.*

La démonstration de cet énoncé à son tour repose sur une estimation provenant de la théorie des nombres transcendants. On écrit u_1 et u_2 en utilisant une base $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r$ du groupe des S-unités modulo la torsion. Alors une "grande" solution (u_1, u_2) de l'équation diophantienne (5) fournit une "petite" valeur pour une expression de la forme

$$|a\zeta\epsilon_1^{b_1} \cdots \epsilon_r^{b_r} - 1|_v, \tag{14}$$

où a est l'un des coefficients de (5), ζ est une racine de l'unité, $b_1, \ldots, b_r$ sont des entiers rationnels et $v \in S$. La "théorie des formes linéaires de logarithmes" fournit une minoration de tels nombres, qui est précise en fonction de $\max\{|b_1|,\ldots,|b_r|\}$. Cette minoration, jointe au lien que nous avons expliqué entre de grandes solutions de l'équation (5) et de petites valeurs de (14), fournit finalement une majoration de la hauteur des solutions.

Cet argument permet de résoudre les équations de Thue (3). En fait le passage par une équation en unités (5) n'est performant que pour majorer le nombre de solutions. Quand on veut estimer la taille des solutions elles-mêmes, il est plus efficace de raisonner directement de manière légèrement différente. Partant d'une solution $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ d'une équation (3), on peut supposer $|y|$ "grand" ; alors x/y est "proche" d'une des racines complexes du polynôme $F(T,1)\in\mathbb{Z}[T]$, disons α_1. Soient α_2 et α_3 deux autres racines. Le nombre

$$\mu=\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\cdot\frac{x-\alpha_2y}{x-\alpha_3y}=\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\cdot\frac{x/y-\alpha_2}{x/y-\alpha_3}$$

est proche de 1, comme on le voit en remplaçant x/y par α_1. Le théorème des unités de Dirichlet montre que les deux nombres $x-\alpha_2y$ et $x-\alpha_3y$ appartiennent à un groupe multiplicatif de type fini. Il en est donc de même de μ, et on peut écrire

$$\mu=\eta_0\eta_1^{b_1}\cdots\eta_r^{b_r}$$

avec des nombres algébriques connus $\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_r$, et des entiers rationnels $b_1,\ldots,b_r$. Les inégalités à la Baker permettent enfin de minorer

$$|\eta_0\eta_1^{b_1}\cdots\eta_r^{b_r}-1|.$$

Les bornes obtenues initialement par la méthode de Gel'fond-Baker provenant de minorations de combinaisons linéaires de logarithmes étaient astronomiques. Par exemple, en 1970, le résultat de Baker et Coates sur les courbes de genre 1 donnait une borne totalement explicite

$$\max\{|x|,|y|\}<\exp\exp\exp\left((2H)^{10^{n^{10}}}\right),$$

pour les points entiers $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sur une courbe $f(x,y)=0$ de genre 1, le polynôme $f\in\mathbb{Z}[X,Y]$ étant absolument irréductible, de degré n, et de coefficients en valeur absolue majorés par H. En 1992, la borne a été considérablement améliorée par W.M. Schmidt : il n'y a plus qu'une exponentielle au lieu de trois, et $10^{n^{10}}$ est remplacé par $(4n)^{13}$ (mais le coefficient 2 de $2H$ est aussi remplacé par une fonction de n). Les mêmes arguments permettent aussi de majorer explicitement les points entiers sur les courbes de genre 0 dans le cas où le théorème de Siegel s'applique, à savoir quand il y a au moins trois *places* à l'infini (Yu. Bilu, D. Poulakis).

Dans le même ordre d'idées, A. Baker a montré en 1968 que *l'équation de Mordell* $y^2=x^3+k$, pour k entier rationnel non nul, a toutes ses solutions (x,y) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ majorées par

$$\max\{|x|,|y|\}<\exp\Big(\big(10^{10}|k|\big)^{10^4}\Big).$$

Le meilleur énoncé théorique pour l'équation de Mordell reste celui de H.M. Stark en 1973 : pour tout $\epsilon>0$ il existe une constante $c(\epsilon)>0$ effectivement calculable telle que

$$\max\{|x|,|y|\}<\exp\big(c(\epsilon)|k|^{1+\epsilon}\big), \tag{15}$$

mais on est loin de la *conjecture de Hall* qui prédit

$$\max\{|x|^3,y^2\}<c|k|^6,$$

avec une constante absolue c. Il se pourrait cependant que cette estimation soit un peu trop optimiste : la conjecture (13) ne prédit qu'un exposant $6+\epsilon$ (avec une constante c remplacée par $c(\epsilon)$), et les travaux de P. Vojta fournissent, pour des situations analogues, des exemples où un tel ϵ ne peut pas être omis.

Pour résoudre explicitement des équations diophantiennes concrètes, il faut combiner la méthode de Gel'fond-Baker avec des algorithmes de réduction. En 1969, A. Baker et H. Davenport ont introduit un procédé reposant sur une utilisation ingénieuse des fractions continues qui, associé à la méthode de Gel'fond-Baker, leur permet de résoudre explicitement le système d'équations

$$3x^2-2=y^2,\qquad 8x^2-7=z^2;$$

il n'y a pas d'autre solution en entiers positifs (x,y,z) que $(1,1,1)$ et $(11,19,31)$. Cette méthode permet de résoudre complètement des équations de Thue de degré 3 ou 4.

En 1982, A.K. Lenstra, H.W. Lenstra et L. Lovász ont développé un analogue de la théorie des fractions continues en dimension supérieure qui fournit un algorithme efficace (en abrégé LLL) de *réduction d'une base d'un réseau.* Cet outil, avec la méthode de Gel'fond-Baker, permit dans les années 80 à B.M.M. de Weger et N. Tzanakis de décrire un procédé général et concrètement applicable pour résoudre toute équation de Thue ne faisant intervenir que des invariants algébriques (degré, discriminant, unités fondamentales) de taille raisonnable. Ils ont ainsi résolu des équations de Thue jusqu'en degré 6, et P. Voutier est parvenu au degré 14 avec l'exemple suivant :

- *Soit* $f(X)$ *le polynôme minimal de* $2\cos(2\pi/29)$ *(le degré de* f *est* 14*). Posons* $F(X,Y)=Y^{14}f(X/Y)$ *; si* x *et* y *sont des entiers rationnels vérifiant* $F(x,y)=\pm1,\pm29$, *alors* $\max\{|x|,|y|\}\le 2$.

Des équations de Thue *relatives* (dont les coefficients et les inconnues sont dans un corps de nombres) ont été aussi résolues : effectivement (V.G. Sprindžuk, S.V. Kotov…), puis explicitement (B.M.M. de Weger, I. Gaál, N.P. Smart…).

La liste complète des solutions de certaines familles d'équations diophantiennes peut maintenant être fournie (travaux de E. Thomas, M. Mignotte, N. Tzanakis, A. Pethő, P. Voutier, R. Tichy, R. Roth, F. Lemmermeyer, N.P. Smart et G. Niklasch...). Ainsi, pour $n \geq 4$, l'équation diophantienne

$$x^3 - (n-1)x^2y - (n+2)xy^2 - y^3 = 1$$

n'a que les solutions triviales $(1,0)$, $(0,-1)$ et $(-1,1)$.

Un pas supplémentaire a été franchi par Yu. Bilu et G. Hanrot ; au lieu d'approcher simultanément plusieurs nombres, ils arrivent à se contenter d'approcher un seul nombre réel par des rationnels. En travaillant avec des unités vivant dans un petit sous-corps, ils peuvent ainsi résoudre une équation de Thue de degré 2505 et montrer que le 5011$^{\text{ème}}$ terme d'une *suite de Lucas ou de Lehmer* possède toujours un diviseur primitif (un nombre premier p est un *diviseur primitif* de u_n si p divise u_n mais p ne divise pas u_m pour $m < n$). Cette étude des diviseurs primitifs (A. Schinzel, C.L. Stewart, P. Voutier) a considérablement progressé par ces méthodes, et finalement en 1997, Yu. Bilu, G. Hanrot et P. Voutier ont pu donner une réponse définitive à ce problème : *tout élément u_n d'indice $n \geq 30$, d'une suite de Lucas ou de Lehmer, admet un diviseur primitif.*

Il existe bien d'autres applications diophantiennes de la méthode de Gel'fond-Baker. Par exemple, en théorie algébrique des nombres, pour savoir si un anneau d'entiers d'une extension finie d'un corps de nombres est *monogène*, on est amené à résoudre des équations formes indices, comme nous l'avons mentionné ci-dessus. Celles-ci ont fait l'objet de travaux approfondis de K. Győry et de son école (ainsi que d'une étude p-adique par L.A. Trelina). I. Gaál, A. Pethő, M. Pohst et N.P. Smart ont développé un algorithme efficace pour résoudre des équations formes discriminants et formes indices de petit degré. En particulier, on peut pratiquement décider si un corps de nombres cubique, ou même quartique, est monogène ou non. J. Cougnard et V. Fleckinger ont prouvé que certains anneaux d'entiers d'une extension finie d'un corps quadratique imaginaire ne sont pas monogènes en montrant, par la méthode de Gel'fond-Baker, que certaines courbes elliptiques n'ont pas de point à coordonnées entières.

Dès les années 30, K. Mahler et A.O. Gel'fond ont aussi établi des estimations p-adiques. Après A. Schinzel (en 1967, pour deux logarithmes), V.G. Sprindžuk et J.H. Coates (indépendamment) ont obtenu les premières minorations effectives de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques. Sprindžuk a appliqué ses estimations pour majorer les solutions de nombreuses équations diophantiennes (par exemple les équations de Thue-Mahler). Ces recherches ont été poursuivies, parallèlement à la théorie archimédienne (S.V. Kotov, J.H. Loxton, A.J. van der Poorten, C.L. Stewart, Yu Kunrui, Dong Ping Ping, Y. Bugeaud et M. Laurent...). Grâce à B.M.M. de Weger et N. Tzanakis, on dispose maintenant d'algorithmes efficaces pour résoudre explicitement de telles équations.

Les estimations p-adiques sont utiles dans de multiples questions diophantiennes, par exemple celles liées aux suites récurrentes linéaires et aux suites de Lucas

(C.L. Stewart, M. Mignotte, N. Tzanakis, A. Pethő, P. Voutier, M.A. Bennett...), l'étude du plus grand facteur premier de valeurs de polynômes ou d'entiers en progression arithmétique (travaux de K. Ramachandra, T.N. Shorey, R. Tijdeman, M. Langevin, R. Balasubramanian, M. Keates, S.V. Kotov, M. Mignotte, V.G. Sprindžuk, J. Turk, N. Tzanakis et B.M.M. de Weger...), l'étude de formes décomposables en des points entiers (K. Győry, Z.Z. Papp, L.A. Trelina, S.V. Kotov...), ou encore l'étude des propriétés arithmétiques de discriminants des polynômes, des formes binaires ou bien des nombres algébriques (K. Győry, Z.Z. Papp, L.A. Trelina, J.H. Evertse...).

Certains problèmes requièrent l'emploi de divers arguments : la méthode transcendante de Gel'fond-Baker est parfois combinée avec d'autres outils. Un exemple où des raisonnements de nature combinatoire (remontant à J.J. Sylvester au XIX$^{\text{ème}}$ siècle) sont associés avec des résultats de théorie analytique des nombres premiers concerne la *conjecture de C.A. Grimm* (1969) : *si n et k sont des entiers positifs et si aucun des entiers consécutifs $n+1, n+2, \ldots, n+k$ n'est premier, alors il existe des nombres premiers deux à deux distincts $p_1, \ldots, p_k$ tels que p_i divise $n+i$ pour $1 \leq i \leq k$* (grâce à des énoncés de théorie analytique des nombres des années 1930 — G. Hoheisel et A.E. Ingham—, on sait que l'hypothèse n'est vérifiée que pour $k \leq n^{2/3}$). Selon P. Erdős et J.L. Selfridge, cette conjecture implique que la suite $(p_{n+1} - p_n)/\sqrt{p_n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, $(p_n)_{n \geq 1} = (2, 3, 5, \ldots)$ désignant la suite des nombres premiers. Une autre conséquence de la conjecture de Grimm concerne la fonction *plus grand facteur premier* notée P :

$$P\bigl((n+1)\cdots(n+k)\bigr) \geq \min\{n+1, p_k\}. \tag{16}$$

La méthode de Gel'fond-Baker a permis à K. Ramachandra, T.N. Shorey et R. Tijdeman d'une part, M. Langevin de l'autre, d'obtenir des résultats partiels sur ces questions. Ainsi l'inégalité (16) est vraie à un nombre fini d'exceptions éventuelles près.

Une conjecture plus générale que celle de Grimm a aussi été proposée par M. Langevin : *si $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ sont des entiers multiplicativement dépendants, il existe un nombre premier dans l'intervalle $[n_1, n_k]$.* Par exemple, les inégalités $N^2 < N(N+1) < (N+1)^2$ montrent que cette conjecture entraîne l'existence d'un nombre premier dans tout intervalle $[N^2, (N+1)^2]$, pour $N \geq 1$.

Au lieu d'appliquer directement des minorations de formes linéaires de logarithmes, comme le faisaient K. Ramachandra, T.N. Shorey et R. Tijdeman, M. Langevin a aussi utilisé la majoration (15) de H.M. Stark pour les solutions de l'équation de Mordell ; cela lui a permis de donner des résultats plus précis sur ces questions, en faisant intervenir la fonction radical (qui intervient dans la conjecture *abc* au §5.1) à la place de la fonction plus grand facteur premier. À ce propos, une conjecture d'Erdős stipule qu'entre deux entiers rationnels $a < b$ qui vérifient $r(a) = r(b)$, il existe toujours un nombre premier. La méthode de Baker-Stark, combinée à des résultats de C.L. Stewart et Yu Kunrui, permet à

M. Langevin de minorer $b-a$ par $c(\epsilon)(\log b)^{(2/3)-\epsilon}$ quand les entiers rationnels $a<b$ vérifient $r(a)=r(b)$. C'est encore la méthode de Gel'fond-Baker qui permet à R. Tijdeman d'obtenir un résultat essentiellement optimal concernant la suite croissante $(n_i)_{i\geq 1}$ des entiers tels que $r(n_i)$ divise une constante : elle vérifie

$$n_{i+1}-n_i \geq n_i(\log n_i)^{-c},$$

avec une constante c positive.

Enfin une conjecture de P. Erdős et A. Woods, motivée par une question de logique, affirme l'existence d'un entier positif k tel que les conditions $r(n+i)=r(m+i)$ pour $i=1,\ldots,k$ impliquent $n=m$. On soupçonne que $k=3$ convient : cela voudrait dire que *si deux entiers distincts n et m ont les mêmes facteurs premiers, et si $n+1$ et $m+1$ ont aussi les mêmes facteurs premiers, alors $n+2$ et $m+2$ ne peuvent pas avoir encore les mêmes facteurs premiers.* En revanche les exemples

$$(n=75, \quad m=1215) \quad \text{et} \quad \bigl(n=2^h-2, \quad m=2^h(2^h-2)\bigr), \quad (h\geq 1)$$

montrent que $k=2$ ne convient pas. La méthode de Gel'fond-Baker conduit à des résultats partiels, comme cela a été montré sous l'impulsion de T.N. Shorey, tandis que M. Langevin déduit cette conjecture d'Erdős-Woods (à un nombre fini d'exceptions près) de la conjecture *abc*.

Nous avons dit que des liens étroits existaient entre les différents paragraphes ; en fait bien souvent la solution d'une équation diophantienne nécessite le recours à différentes méthodes. Les résultats que nous venons de mentionner utilisent quelque part la méthode de Gel'fond-Baker, mais fréquemment d'autres outils sont simultanément employés, par exemple des approximants de Padé (§1.5). Un exemple où une grande variété de techniques diverses d'approximation diophantienne entre en jeu est le travail de M.A. Bennett et B.M.M. de Weger sur l'équation diophantienne $|ax^n-by^n|=1$: *pour $b\geq a>0$ et $n\geq 3$ entier rationnels, avec un ensemble fini explicite d'exceptions éventuelles (a,b,n), cette équation possède au plus une solution.*

5.3 Groupes algébriques et géométrie diophantienne

En liaison avec la méthode de Gel'fond-Baker vont être développés de nouveaux travaux sur les groupes algébriques. Le problème de l'indépendance linéaire de périodes d'intégrales elliptiques ou abéliennes fit l'objet des recherches de A. Baker, J.H. Coates, puis D.W. Masser et aussi S. Lang. D.W. Masser allait avoir une grande influence sur ce sujet. En désignant par (ω_1,ω_2) une base du groupe des périodes d'une fonction elliptique d'invariants g_2, g_3 algébriques, et par η_1,η_2 les quasi-périodes correspondantes de la fonction zêta associée, il montre que l'espace vectoriel engendré sur le corps des nombres algébriques par les six nombres $1,\omega_1,\omega_2,\eta_1,\eta_2,2i\pi$ a pour dimension 4 dans le cas où la courbe admet des endomorphismes non triviaux (cas CM — *multiplication complexe*), et 6 sinon. Des

énoncés partiels avaient déjà été établis par A. Baker et J.H. Coates. D.W. Masser résout aussi le problème de l'analogue elliptique du théorème de Baker, d'abord dans le cas de multiplication complexe dans sa thèse, puis dans le cas où il n'y a pas de multiplication complexe, dans un article avec D. Bertrand. L'argument qu'ils emploient est surprenant : il déduisent le résultat attendu du critère de Schneider-Lang, qui était connu avant les travaux de Baker. Leur argument vaut non seulement sur les courbes elliptiques, mais aussi sur le groupe multiplicatif. Ainsi le théorème de transcendance sur l'indépendance linéaire de logarithmes de nombres algébriques, démontré par A. Baker en 1966, était déjà contenu (implicitement, il est vrai !) dans la littérature. Mais le point important de la méthode de Gel'fond-Baker est la possibilité de fournir des estimations diophantiennes effectives, et même explicites.

Vers 1985, G. Wüstholz parvint à démontrer l'extension attendue aux groupes algébriques du théorème de transcendance de Baker.

- **Théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz.** *Soit G un groupe algébrique commutatif défini sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. Notons T_G l'espace tangent de G à l'origine, de sorte que $T_G(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie de $G(\mathbb{C})$, et $\exp_G : T_G(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C})$ l'application exponentielle du groupe de Lie $G(\mathbb{C})$. Soit $u\in T_G(\mathbb{C})$ tel que $\exp_G(u)\in G(\overline{\mathbb{Q}})$. Alors le sous-espace vectoriel de $T_G(\mathbb{C})$, rationnel sur $\overline{\mathbb{Q}}$, engendré par u, est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique de G.*

Cet énoncé permet de résoudre plusieurs questions concernant la transcendance de valeurs de fonctions spéciales. Le théorème du sous-groupe analytique est un énoncé très général sur l'indépendance linéaire, avec des coefficients algébriques, de "logarithmes" (en un sens étendu) de points algébriques sur des groupes algébriques. Ainsi la transcendance de valeurs d'intégrales abéliennes peut être établie sous des hypothèses naturelles. Ce théorème de Wüstholz est l'outil principal dans les recherches de J. Wolfart sur la question de la transcendance des valeurs de fonctions hypergéométriques de Gauss ; une réponse complète est ainsi connue, au moins dans le cas où le *groupe de monodromie* est *arithmétique*.

Le théorème du sous-groupe analytique ne contient pas, par exemple, le théorème des six exponentielles. Mais le théorème du sous-groupe algébrique, auquel nous avons fait allusion plus haut (§3.3), contient à la fois le théorème de Wüstholz et les minorations connues pour le rang de matrices à coefficients logarithmes de nombres algébriques (§ 3.2 et § 3.3).

On sait maintenant obtenir des minorations pour des combinaisons linéaires de logarithmes sur des groupes algébriques. Les estimations ne sont pas encore tout-à-fait aussi bonnes que pour les logarithmes usuels, mais, à la suite des travaux de N. Hirata-Kohno notamment, elles n'en sont pas trop loin. On doit à S. David une version complètement explicite d'une minoration d'une combinaison linéaire de logarithmes elliptiques. Cette estimation diophantienne joue un rôle crucial dans une approche originale, proposée initialement par S. Lang et développée ensuite par D.B. Zagier, pour déterminer les points entiers sur une courbe elliptique dont on connaît une base du *groupe de Mordell-Weil*. Un algorithme de Yu.V. Manin permet de trouver une telle base quand la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est vérifiée. Cette méthode a été mise en œuvre concrètement par J. Gebel, A. Pethő et H.G. Zimmer d'une part, R.J. Stroeker et N. Tzanakis d'autre part. En voici deux applications : la liste complète des solutions de l'équation diophantienne

$$y^2 = (x+p)(x^2+p^2) \qquad \text{avec} \qquad p = 337$$

est donnée par

$$(x, \pm y) = \quad (-337, 0), \quad (-287, 3130), \quad (2113, 105910), \quad (56784, 13571615).$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, $0 < |k| < 10^4$, toutes les solutions de l'équation $y^2 = x^3 + k$ vérifient $|y| < 10^{13}$. Récemment Pethő et Zimmer ont étendu leur méthode à la détermination des solutions en S-entiers.

Un analogue p-adique (pour deux logarithmes elliptiques seulement) de l'énoncé de S. David, obtenu par G. Rémond et F. Urfels, a été utilisé de manière similaire par N.P. Smart pour déterminer tous les points S-entiers sur certaines courbes elliptiques.

Baker avait expliqué comment sa démonstration, permettant de minorer des combinaisons linéaires non nulles de logarithmes de nombres algébriques, pouvait s'adapter à l'étude de combinaisons linéaires nulles : si $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ sont des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement *dépendants* de nombres algébriques, alors il obtient l'existence d'une relation $b_1\log\alpha_1 + \cdots + b_n\log\alpha_n = 0$, avec des entiers rationnels $b_1, \ldots, b_n$ non tous nuls qu'il sait majorer. On peut convertir cet énoncé en évitant tout recours à des nombres transcendants : si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres algébriques multiplicativement dépendants, c'est-à-dire s'il existe des entiers rationnels $b_1, \ldots, b_n$ non tous nuls tels que $\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_n^{b_n} = 1$, alors on peut trouver une telle relation avec une bonne majoration des $|b_i|$. En fait, H.M. Stark a remarqué que des arguments de géométrie des nombres permettent de donner des bornes plus précises que les arguments transcendants de Baker, et ce point de vue a été poursuivi par plusieurs auteurs, parmi lesquels J. Loxton et A.J. van der Poorten, puis E.M. Matveev, et enfin D. Bertrand. Ce dernier propose une nouvelle approche pour contrôler l'ensemble des relations entre des nombres algébriques multiplicativement dépendants. Il calcule le covolume de cet ensemble en fonction du degré d'un sous-groupe algébrique d'un tore. Les mêmes outils (théorie de la dualité de réseaux d'un espace euclidien) lui permettent d'établir une formule reliant les degrés de sous-variétés abéliennes orthogonales dans une variété abélienne polarisée.

Cependant la géométrie des nombres ne permet pas (jusqu'à présent) de traiter des questions analogues portant sur des périodes de variétés abéliennes, alors que l'approche transcendante par la méthode de Gel'fond-Baker s'y révèle efficace. Ainsi le *théorème d'isogénie* de G. Faltings, étape importante dans la démonstration par ce dernier de la *conjecture de Mordell*, peut être démontré par

des arguments de la théorie des nombres transcendants. La première tentative dans cette direction est due à S. Lang, et a été poursuivie par D.W. Masser et D. Bertrand, puis D.V. et G.V. Chudnovsky suivis de M. Laurent, enfin et surtout par D.W. Masser et G. Wüstholz. Quand A est une variété abélienne sur un corps de nombres K, on peut majorer (en fonction de A et K) le degré d'une isogénie entre A et une autre variété abélienne définie sur K. Pour des courbes elliptiques, S. David obtient même une version totalement explicite (et son estimation a été raffinée par F. Pellarin). Les travaux de D.W. Masser et G. Wüstholz ont été revisités par J-B. Bost dans le cadre de la *théorie des intersections arithmétiques* d'Arakelov.

Un autre domaine de la géométrie diophantienne où les méthodes transcendantes apportent des résultats originaux concerne la recherche de minorations pour la hauteur de points rationnels. Dans le cas d'un groupe multiplicatif, nous avons rencontré le problème de Lehmer. L'analogue de cette question sur les courbes elliptiques et plus généralement les variétés abéliennes a été développé par D.W. Masser et M. Anderson, dont les estimations ont ensuite été raffinées, notamment par S. David. Pour les courbes elliptiques de type CM, M. Laurent a obtenu une estimation de même qualité que le théorème de Dobrowolski : il minore la hauteur de Néron-Tate des points rationnels (sur un corps de nombres) qui ne sont pas de torsion. Cette estimation a été étendue par S. David et M. Hindry aux variétés abéliennes de type CM.

P. Philippon s'est aussi intéressé à la hauteur de sous-variétés algébriques de dimension ≥ 0 d'une variété abélienne A. Il définit des hauteurs normalisées (étendant la hauteur de Néron-Tate) et il conjecture un analogue dans cette situation du théorème de Kronecker : les sous-variétés dont la hauteur normalisée est nulle sont les translatées de sous-variétés abéliennes. Cela a été en effet établi par E. Ullmo et S. Zhang dans leur solution d'une conjecture de F.A. Bogomolov. L'analogue multiplicatif de cette conjecture a fait l'objet de travaux de S. Zhang, D.B. Zagier, F. Beukers, W.M. Schmidt, E. Bombieri, U. Zannier, Yu. Bilu, tandis que le cas des variétés abéliennes a été considéré par E. Bombieri et U. Zannier. P. Philippon et S. David ont fait un pas de plus en direction de l'analogue du problème de Lehmer, car ils obtiennent une minoration de la hauteur des sous-variétés de hauteur non nulle.

6. Lemmes de zéros

Les démonstrations de la théorie des nombres transcendants reposent toutes sur des arguments d'approximation diophantienne : on trouve toujours, plus ou moins caché dans la preuve, le fait qu'un entier rationnel non nul a une valeur absolue supérieure ou égale à 1. La démonstration consiste généralement à construire, par divers moyens, un nombre algébrique non nul, que l'on minore habituellement à l'aide d'une inégalité à la Liouville, et que l'on majore le plus souvent de manière analytique (lemme de Schwarz). Le point délicat est presque toujours de montrer que le nombre en question n'est pas nul : c'est là qu'intervient le *lemme de zéros*. Sous ce nom sont regroupés divers résultats : majoration du nombre de zéros (ou de la multiplicité) de certaines fonctions ou de certains polynômes, non-nullité de certains déterminants…

La difficulté que soulève ce problème de démontrer qu'un certain nombre n'est pas nul apparaît déjà dans les travaux d'Hermite ; le nombre en question est alors un déterminant. Ch. Hermite explique comment sa démonstration serait simple si ce déterminant ne s'annulait pas, et il doit utiliser des arguments plus compliqués dans le cas où il s'annule.

Ce problème apparaît dans chaque démonstration de transcendance, que ce soit chez F. Lindemann, K. Weierstraß, A.O. Gel'fond, Th. Schneider, ou encore A. Thue, F. Dyson, K.F. Roth, W.M. Schmidt. Dans le travail de Gel'fond en 1949 sur l'indépendance algébrique est énoncé, explicitement, un lemme de zéros pour une démonstration de la théorie des nombres transcendants. Il concerne les polynômes exponentiels complexes. Dans le cas réel, le résultat, bien plus simple, est dû à G. Pólya ; A.O. Gel'fond et Yu. Linnik l'ont utilisé pour donner des démonstrations "élémentaires" de transcendance. K. Mahler, puis R. Tijdeman ont sensiblement simplifié le lemme de zéros de Gel'fond pour les polynômes exponentiels complexes.

- *Soient* $a_1, \dots, a_n$ *des polynômes dans* $\mathbb{C}[z]$ *de degrés* $d_1, \dots, d_n$, *et soient* $w_1, \dots, w_n$ *des nombres complexes deux à deux distincts. On pose*

$$\Omega = \max\{|w_1|, \dots, |w_n|\}.$$

Alors le nombre de zéros (comptés avec multiplicités) de la fonction

$$z \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i(z) e^{w_i z}$$

dans le disque $|z| \le R$ *de* $\mathbb{C}$ *est majoré par* $2(d_1 + \cdots + d_n + n - 1) + 5R\Omega$.

À partir des années 70, D.W. Masser étudie les lemmes de zéros de façon systématique. Il introduit divers types d'arguments, d'abord dans sa thèse, puis dans son étude de l'indépendance linéaire de logarithmes abéliens dans le cas CM, ensuite dans des travaux en commun avec W.D. Brownawell. L'utilisation du résultant que proposent Brownawell et Masser, puis des méthodes d'élimination et en particulier des formes de Chow introduites dans ce contexte par Yu.V. Nesterenko, vont être à la source des principaux progrès récents. C'est encore une méthode d'élimination qui permet en 1980 à D.W. Masser d'obtenir un lemme de zéros en plusieurs variables, aussi bien pour les polynômes que pour les polynômes exponentiels, ouvrant ainsi la voie d'une part à une nouvelle approche de la transcendance en plusieurs variables, d'autre part aux lemmes de zéros sur les groupes algébriques. Ce dernier thème va faire l'objet de recherches communes de D.W. Masser et G. Wüstholz (qui appliquent leur lemme de zéros à des problèmes

d'indépendance algébrique), puis de G. Wüstholz qui obtient alors le lemme de multiplicité que l'on attendait pour pouvoir étendre aux groupes algébriques le théorème de Baker. Ce lemme de zéros a été achevé par P. Philippon (avec un petit raffinement ultérieur par L. Denis), dont l'énoncé est maintenant utilisé dans de très nombreux travaux. C'est devenu un outil indispensable pour la transcendance.

Dans une autre direction, le lemme que Dyson avait introduit dans ses recherches sur l'approximation diophantienne a fait l'objet de plusieurs travaux. C. Viola en a donné une variante qui, nous l'avons vu, s'est révélée très utile dans un travail de E. Bombieri en approximation diophantienne. H. Esnault et E. Viehweg ont généralisé ce lemme de Dyson grâce à des arguments plus sophistiqués de géométrie algébrique. Après le travail de P. Vojta qui révèle des liens profonds entre l'approximation diophantienne (ainsi que la géométrie diophantienne) et la théorie de Nevanlinna, G. Faltings a démontré un nouveau type de lemme de zéros qu'il appelle *théorème du produit*. En 1993, G. Faltings et G. Wüstholz ont généralisé cet énoncé en liaison avec le théorème des sous-espaces de W.M. Schmidt. M. Nakamaye en a étudié une extension aux groupes algébriques non commutatifs. Le théorème du produit (qui est contenu dans les versions les plus récentes du lemme de zéros de P. Philippon) a été raffiné par J.H. Evertse (et indépendamment R. Ferretti). Sa version explicite du théorème du produit permet à Evertse d'améliorer le lemme de Roth, et c'est ce qui lui permet de raffiner les bornes explicites de W.M. Schmidt pour le nombre de sous-espaces exceptionnels dans le théorème des sous-espaces (voir §1.3).

Hilbert Nullstellensatz

Un autre sujet, étroitement lié aux lemmes de zéros, est le théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz). En 1893, D. Hilbert a démontré :

- *Soit* $\mathcal{A}$ *un idéal de l'anneau* $R = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ *; soit* $Q \in R$ *un polynôme qui s'annule sur les zéros de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathbb{C}$ *; alors il existe un entier positif* k *tel que* $Q^k \in \mathcal{A}$.

En particulier, si $\mathcal{A}$ n'a pas de zéros, alors $1 \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = R$. En 1929, J.L. Rabinowitsch a montré comment déduire le cas général du cas particulier $\mathcal{A} = R$. Si l'idéal $\mathcal{A} = (P_1, \dots, P_m)$ est égal à R, c'est-à-dire si le système d'équations

$$A_1 P_1 + \cdots + A_m P_m = 1,$$

où les inconnues sont $A_1, \dots, A_m$, admet une solution dans R, on voudrait pouvoir montrer qu'il existe une telle solution avec une borne aussi bonne que possible pour les degrés. De telles majorations avaient été produites en 1926 par G. Hermann, mais les bornes étaient doublement exponentielles en le nombre n de variables. D. Lazard a amélioré ces bornes en 1977 ; puis D.W. Masser et G. Wüstholz, en 1983, étendent la méthode de Hermann aux corps de nombres pour développer un procédé d'élimination qu'ils appliquent à des questions d'indépendance algébrique.

D.W. Masser et P. Philippon ont donné des exemples montrant que la borne doit être au moins exponentielle. De plus, un exemple dû à E. Mayr et A. Meyer

(1982) montrait qu'une exponentielle double ne pouvait pas être évitée quand on veut exprimer les éléments d'un idéal en termes des générateurs. En 1987, W.D. Brownawell a obtenu la borne :

$$\max_{1\leq i\leq m} \deg A_i \leq n^2 D^n + nD,$$

où D est le maximum des degrés de $P_1,\ldots,P_m$. Sa démonstration utilisait des estimés analytiques dus à Berenstein et Yger. Le résultat de Brownawell a ensuite été amélioré et étendu par différents auteurs, en particulier W.D. Brownawell lui-même, mais aussi F. Amoroso, C. Berenstein, J. Kollàr, P. Philippon, B. Shiffman, A. Yger. La meilleure estimation actuellement connue vaut en toute caractéristique : $\max_{1\leq i\leq m} \deg A_i \leq D^n$ pour $D \geq 3$. On dispose aussi d'estimations pour les coefficients des A_i quand les polynômes considérés ont des coefficients algébriques.

7. Transcendance dans les corps de fonctions

Le corps $\mathcal{C} = K((T^{-1}))$ des séries de Laurent sur un corps commutatif K possède des propriétés similaires à celles du corps des nombres réels. Le rôle de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers est joué par $K[T]$, celui de $\mathbb{Q}$ par les fractions rationnelles $K(T)$. Un élément de $\mathcal{C}$ est appelé *algébrique* s'il est algébrique sur $K(T)$. On définit une valuation sur $\mathcal{C}$, donc sur $K(T)$, en choisissant $|T| > 1$ et en posant $|\alpha| = |T|^k$ si $\alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^{-n}$ est un élément non nul de $\mathcal{C}$, l'entier rationnel $k = \deg(\alpha)$ étant le plus petit élément de $\mathbb{Z}$ tel que $a_k \neq 0$. Ainsi $\mathcal{C}$ est le complété de $K(T)$ pour cette valeur absolue.

On peut développer une théorie de l'approximation diophantienne sur $\mathcal{C}$ analogue à celle que l'on a vue plus haut pour l'approximation d'un nombre réel par des nombres rationnels.

En caractéristique nulle, les résultats sur les corps de fonctions sont au moins aussi bons que ceux que l'on connaît pour le cas classique réel. En 1960, S. Uchiyama a montré que le théorème de Thue-Siegel-Roth se transposait. Puis E. Dubois (1977) et M. Ratliff (1978) ont établi l'analogue du théorème de W.M. Schmidt sur l'approximation simultanée de nombres algébriques. Tout élément de $\mathcal{C}$, algébrique sur $K(T)$, vérifie une équation différentielle algébrique ; l'étude de l'approximation diophantienne des solutions d'une telle équation a été commencée par E.R. Kolchin en 1959, poursuivie par C.F. Osgood en 1974. En rendant explicites des énoncés d'Osgood, W.M. Schmidt a obtenu en 1976 des bornes explicites pour les solutions des équations de Thue sur des corps de fonctions en caractéristique nulle. Peu après, il étendait cette méthode pour obtenir des versions effectives du théorème de Yu.V. Manin et H. Grauer (analogue de la conjecture de Mordell).

En revanche, pour un corps K de caractéristique p positive, la situation est bien plus compliquée et demeure encore mystérieuse. En 1949, K. Mahler a établi

l'analogue du théorème de Liouville : *si α est un élément de $\mathcal{C}$, algébrique de degré $[K(T)(\alpha) : K(T)] = d$ sur $K(T)$, il existe une constante $c(\alpha) > 0$ telle que, pour tout $P/Q \in K(T)$ vérifiant $P/Q \neq \alpha$, on ait*

$$\left|\alpha - \frac{P}{Q}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{|Q|^d}.$$

Mais, en même temps, Mahler remarquait que, pour certains éléments algébriques de $\mathcal{C}$, cette "inégalité de Liouville" pouvait être optimale : l'exemple qu'il donnait est $\alpha = \sum_{n\geq 0} T^{-p^n}$, qui est la racine du polynôme $X^p - X + 1/T \in K(T)[X]$ pour laquelle $|\alpha| = |T|^{-1}$. D'autres exemples ont été construits plus tard : par C.F. Osgood en 1975, L. Baum et M. Sweet en 1976, W. Mills et D. Robbins en 1986. Ces derniers obtiennent le développement en fraction continue explicite de certains éléments algébriques de $\mathcal{C}$; ils en trouvent qui ne sont pas quadratiques et qui ont des quotients partiels bornés. Un autre exemple de développement en fraction continue explicite pour un élément algébrique de $\mathcal{C}$ est donné en 1995 par M.W. Buck et D. Robbins. Notons à ce propos que le développement en fraction continue explicite du contre-exemple de Mahler ci-dessus a été trouvé par A. Lasjaunias.

Pour un élément α de $\mathcal{C}$, algébrique de degré d sur $K(T)$, ne satisfaisant pas d'équation de Riccati

$$\alpha' = a\alpha^2 + b\alpha + c,$$

avec a, b et c dans $K(T)$, C.F. Osgood a démontré en 1974 l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{P}{Q}\right| > C(\alpha)|Q|^{-[d/2]-1}$$

pour tout $P/Q \in K[T]$, avec une constante $C(\alpha) > 0$.

La classe $\mathcal{H}$ (Homographie-Frobenius), formée des éléments de $\mathcal{C}$ vérifiant une équation de la forme

$$X = \frac{AX^{p^s} + B}{CX^{p^s} + D}$$

avec A, B, C, D dans $K[T]$, $AD - BC \neq 0$, et s entier ≥ 1, contient des éléments algébriques qui ne vérifient pas l'analogue du théorème de Roth. J.F. Voloch (1995) a produit d'autres exemples liés a des courbes elliptiques sur des corps finis.

L'étude de l'approximation rationnelle des éléments de $\mathcal{H}$ a fait l'objet de travaux de B. de Mathan et J.F. Voloch. Les éléments α de $\mathcal{H}$ sont solutions d'une équation de Riccati (mais il existe des éléments algébriques en dehors de $\mathcal{H}$ qui vérifient aussi une équation de Riccati). L'analogue du théorème de Thue pour les éléments algébriques de $\mathcal{C}$ n'appartenant pas à $\mathcal{H}$ a été établi en 1996 par B. de Mathan et A. Lasjaunias : *si $\alpha \notin \mathcal{H}$ est un élément algébrique de $\mathcal{C}$ de degré d,* *pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $Q_0(\alpha,\epsilon)$ telle que, pour tout $P/Q \in K(T)$ vérifiant $|Q| \geq Q_0(\alpha,\epsilon)$, on ait*

$$\left|\alpha - \frac{P}{Q}\right| \geq \frac{1}{|Q|^{[d/2]+1+\epsilon}}.$$

L'analogie développée systématiquement par P. Vojta entre l'approximation diophantienne et la théorie de Nevanlinna porte aussi ses fruits dans le domaine des corps de fonctions, comme l'ont montré les travaux de C.F. Osgood, J.F. Voloch, Min Ru, J. T.-Y. Wang et I. Noguchi notamment.

Il existe aussi une théorie de la transcendance en caractéristique finie, qui est très active pendant cette fin du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Le point de départ est un travail de L. Carlitz. Il introduit des fonctions, définies sur un complété d'un corps de séries formelles sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, qui représentent des analogues de la fonction exponentielle complexe. Pendant la première époque, marquée principalement par les travaux de L.I. Wade dans les années 40, puis plus tard ceux de J.M. Geijsel, et ensuite par les premières recherches de Jing Yu sur ce sujet au début des années 80, les résultats obtenus en caractéristique finie sont des analogues de ceux que l'on connaît pour les nombres complexes (ou p-adiques). Puis, Jing Yu étend le domaine d'investigation en considérant, plus généralement, les *modules de Drinfeld*, avant d'élargir encore le champ aux *motifs de G. Anderson.* Alors commence une période où vont être démontrés, en caractéristique finie, des énoncés qui correspondent, dans le cas complexe, à des problèmes encore ouverts :

- *Quelle est la nature arithmétique des valeurs de la fonction zêta de Riemann ? La constante d'Euler γ est-elle irrationnelle ? Et e^γ ? Les nombres e et π sont-ils algébriquement indépendants ?*

On dispose de plusieurs approches pour étudier les problèmes de transcendance en caractéristique finie. Après J. Yu, L. Denis, D. Thakur, A. Thiery ont utilisé le point de vue des modules de Drinfeld et des t-motifs d'Anderson. Une majoration du degré d'une isogénie entre modules de Drinfeld, parallèle au résultat de Masser et Wüstholz sur les variétés abéliennes, a été établie par S. David et L. Denis ; la démonstration nécessite un raffinement quantitatif du théorème du sous-groupe analytique de Yu (analogue du théorème de Wüstholz), et l'outil essentiel est un lemme de zéros, encore dû à Jing Yu, qui est l'analogue du résultat de P. Philippon.

L. Denis a introduit une dérivation par rapport à la variable du corps de fonctions, et cela sera repris par W.D. Brownawell. P.G. Becker, R. Tubbs et W.D. Brownawell obtiennent des énoncés d'indépendance algébrique, qui seront ensuite étendus dans un travail en commun de W.D. Brownawell et L. Denis.

La méthode initialement utilisée par Wade permet également de montrer la transcendance de valeurs de la fonction zêta de Carlitz (Y. Hellegouarch et G. Damamme). Y. Hellegouarch étend aussi la définition des modules de Drinfeld en caractéristique quelconque (même nulle). Dans ce contexte, Y. Hellegouarch introduit une notion de σ-transcendance qui a fait l'objet de travaux de

F. Recher et R. Müller ; ce dernier généralise aussi des critères de transcendance et d'indépendance algébriques antérieurs de P. Bundschuh et H.B. Sieburg, qui deviennent ainsi valables sur des corps valués non archimédiens très généraux.

Des résultats fins d'approximation diophantienne sont donnés par H. Cherif et B. de Mathan ; coïncidence assez curieuse : ils sont obtenus par la méthode d'Apéry. Le *critère de transcendance de de Mathan* permet de rassembler un grand nombre de résultats connus, et d'en démontrer de nouveaux. Ce critère est étonnamment stable par addition, si bien que l'on obtient beaucoup d'exemples de combinaisons linéaires d'éléments transcendants qui sont encore transcendantes.

La théorie des automates a conduit J-P. Allouche à proposer une approche entièrement différente, à la fois naturelle, facile et élégante. Cette méthode a été exploitée ensuite par V. Berthé, D. Thakur, M. Mendès France et J.Y. Yao ; ces derniers résolvent finalement le problème de la transcendance des valeurs de la fonction Gamma de Carlitz-Goss en des points entiers. Le lien avec le critère de de Mathan a été fait par M. Koskas, et une version plus générale (et effective) de ce critère a fait l'objet d'un travail en commun de J. Fresnel, M. Koskas et B. de Mathan.

Le résultat profond sous-jacent à l'approche *automatique* de la transcendance en caractéristique finie est un critère d'algébricité pour des séries formelles, dû à G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France et G. Rauzy (1980) ; on suppose $K = \mathbb{F}_q$, corps fini à q éléments.

- *Un élément $\alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^{-n}$ de $\mathcal{C}$ (avec $a_n = 0$ pour $n < \deg\alpha$) est algébrique si et seulement si son q-noyau est fini.*

Le *q-noyau de α* est l'ensemble des suites $(a_{nq^s+r})_{n\in\mathbb{Z}}$, quand s et r décrivent les couples d'entiers rationnels tels que $s \geq 0$ et $0 \leq r < q^s$.

En combinant ce critère avec un théorème de A. Cobham (1969), on en déduit, pour une suite croissante $(n_i)_{i\geq 1}$ d'entiers positifs, que si la série $\sum_{i\geq 1} z^{n_i}$ est irrationnelle algébrique en une caractéristique finie, alors elle est transcendante en toute autre caractéristique finie. La méthode de Mahler (§2), développée par J.H. Loxton et A.J. van der Poorten, devrait permettre de montrer dans ces conditions que le nombre réel $\sum_{i\geq 1} 10^{-n_i}$ est alors transcendant — mais la démonstration actuelle n'est pas encore complète.

Profitons de cette occasion pour énoncer une autre problème ouvert, encore proposé par Mahler :

- *Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\{0,1\}$. On suppose que les deux nombres réels*

$$\sum_{n\geq 0} \epsilon_n 2^{-n} \quad \textit{et} \quad \sum_{n\geq 0} \epsilon_n 3^{-n}$$

  sont algébriques. Alors ces deux nombres sont rationnels.

Enfin P. Philippon a introduit la notion d'*anneau diophantien* qui lui permet d'unifier les méthodes de transcendance en toute caractéristique et d'obtenir des énoncés très généraux qui s'appliquent aussi bien aux fonctions exponentielles des groupes algébriques et aux fonctions modulaires complexes ou p-adiques qu'aux modules de Drinfeld et aux motifs d'Anderson.

En guise de conclusion.

Des progrès importants ont été accomplis au cours de ce demi-siècle, mais l'abondance des problèmes ouverts montre que cette théorie est loin d'avoir atteint sa pleine maturité. De nombreuses questions, faciles à énoncer, ne sont toujours pas résolues. Et pourtant, les méthodes développées sont riches d'applications diverses et profondes. Nul doute que ce domaine a encore de beaux jours devant lui.

Une version préliminaire de ce texte a été relue par une quarantaine de spécialistes : qu'ils soient remerciés pour leurs nombreuses et pertinentes remarques. Mais l'auteur est le seul à blâmer pour les erreurs, omissions et autres défauts qui ne manqueront pas de subsister.

Références

Nous donnons ci-dessous quelques références de textes où le lecteur intéressé trouvera de plus amples informations sur ce sujet.

Les *Reviews in Number Theory*, trois ensembles de six volumes chacun, publiés à l'initiative de W.J. LeVeque et R. Guy par l'American Mathematical Society en 1974, 1984 et 1998 respectivement, constituent une source précieuse de renseignements pour toute la théorie des nombres jusqu'en 1996. Des moyens d'information plus modernes (Mathematical Reviews et Zentralblatt-MATH sur CD Rom ou serveur Internet) se développent : le lecteur ayant accès à ces sources informatiques et désirant trouver des références bibliographiques précises pour des résultats cités dans le texte ne devrait pas rencontrer de difficulté majeure.

Les comptes-rendus des Journées Arithmétiques contiennent souvent des rapports sur la transcendance. De nombreux autres "surveys" ont été écrits. Voici une petite liste de différents articles de synthèse. Le premier est un panorama extrêmement complet de la théorie, couvrant toute la période qui précède 1966, jusqu'au théorème de Baker (qui a été mentionné dans une note ajoutée aux épreuves).

- Fel'dman, Naum I. ; Šidlovskiĭ, Andrei B. – The development and present state of the theory of transcendental numbers. Uspehi Mat. Nauk **22** 1967 no. 3 (135) 3–81 ; traduction anglaise dans Russian Math. Surveys **22** (1967), 1–79.
  `MR` 35 #5400

Une série d'exposés donnés par Wolfgang Schmidt sur l'approximation diophantienne en 1971 a été publiée dans l'Enseignement Mathématique :

- Schmidt, Wolfgang M. – Approximation to algebraic numbers. Enseignement Math. (2) **17** (1971), 187–253.
  `MR` 48 #6014

Serge Lang a écrit deux "surveys" sur ce sujet :

- Lang, Serge – Transcendental numbers and diophantine approximations. Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971) 635–677.
  `MR` 44 #6615
- Lang, Serge – Higher dimensional diophantine problems. Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 779–787.
  `MR` 50 #12914

La cinquième référence met l'accent sur les applications de la méthode de Gel'fond-Baker à des problèmes diophantiens :

- Tijdeman, Robert – Hilbert's seventh problem : on the Gel'fond-Baker method and its applications. *Mathematical developments arising from Hilbert problems* (Proc. Sympos. Pure Math. **28**, Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974), pp. 241–268. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976.
  `MR` 55 #7936

Un ouvrage collectif a été publié par la Société Mathématique de France, à la suite d'une journée consacrée aux nombres transcendants le 22 janvier 1983 :

- Bertrand, Daniel ; Emsalem, Michel ; Gramain, François ; Huttner, Marc ; Langevin, Michel ; Laurent, Michel ; Mignotte, Maurice ; Moreau, Jean-Charles ; Philippon, Patrice ; Reyssat, Éric ; Waldschmidt, Michel. *Les nombres transcendants.* Mém. Soc. Math. France (N.S.) (Supplément au Bull. Soc. Math. France **112**) No. 13 (1984), 60 pp.
  `MR` 87c :11059

Enfin deux "surveys" viennent de paraître dans les comptes rendus de la conférence de la Ramanujan Mathematical Society à Tiruchirapalli (Inde) du 3 au 6 janvier 1996 (*Number Theory*, éd. V. Kumar Murty et Michel Waldschmidt, Amer. Math. Soc., Contemporary Math. **210** (1998)) : le premier par Brownawell, W. Dale est intitulé : *Transcendence in positive characteristic*, pp. 317–332, le second par Thakur, Dinesh : *Automata and transcendence*, pp. 387–399.

Nous présentons maintenant, par ordre chronologique, une liste de livres sur la théorie des nombres transcendants.

- Siegel, Carl Ludwig – *Transcendental Numbers.* Annals of Mathematics Studies, no. **16**. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949. viii+102 pp.
  `MR` 11,330c
- Gel'fond, Aleksandr O. – *Transcendentnye i algebraičeskie čisla.* Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1952. 224 pp.
  `MR` 15,292e

Transcendental and algebraic numbers. Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron Dover Publications, Inc., New York 1960 vii+190 pp.
MR 22 #2598

- Schneider, Theodor – *Einführung in die transzendenten Zahlen.* Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957. v+150 pp.
  MR 19,252f
  Introduction aux nombres transcendants. Traduit de l'allemand par P. Eymard ; Gauthier-Villars, Paris 1959 viii+151 pp.
  MR 21 #5620
- Lipman, Joseph – *Transcendental numbers.* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, No. **7** Queen's University, Kingston, Ont., 1966 vii+83 pp.
  MR 35 #4170
- Lang, Serge – *Introduction to transcendental numbers.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1966 vi+105 pp.
  MR 35 #5397
- Ramachandra, Kanakanahalli – *Lectures on transcendental numbers.* The Ramanujan Institute Lecture Notes, **1** The Ramanujan Institute, Madras 1969 iii+73 pp.
  MR 41 #5302
- Waldschmidt, Michel – *Nombres transcendants.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. **402**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974. viii+277 pp.
  MR 50 #12931
- Baker, Alan – *Transcendental number theory.* Cambridge University Press, London-New York, 1975. x+147 pp.
  MR 54 #10163
  Second edition, Cambridge, 1979 and 1990 x+165 pp.
  MR 91f :11049
- Masser, David – *Elliptic functions and transcendence.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. **437**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. xiv+143 pp.
  MR 52 #296
- Mahler, Kurt – *Lectures on transcendental numbers.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. **546**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. xxi+254 pp.
  MR 58 #10772
- Waldschmidt, Michel – *Nombres transcendants et groupes algébriques.* With appendices by Daniel Bertrand and Jean-Pierre Serre. Astérisque, **69–70**. Société Mathématique de France, Paris, 1979. 218 pp.
  MR 82k :10041 et MR 88i :11047
- Waldschmidt, Michel – *Transcendence methods.* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, **52**. Queen's University, Kingston, Ont., 1979. 126 pp.
  MR 83a :10068

- Fel'dman, Naum I. – *Hilbert's seventh problem* (En russe) Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1982. 312 pp.
  MR 85b :11001
- Chudnovsky, Gregory V. – *Contributions to the theory of transcendental numbers.* Mathematical Surveys and Monographs, **19**. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1984. xi+450 pp.
  MR 87a :11004
- Šidlovskiĭ, Andrei B. – *Transtsendentnye chisla.* “Nauka”, Moscow, 1987. 448 pp.
  MR 88m :11057
  Transcendental numbers. Translated from the Russian by Neal Koblitz. With a foreword by W. Dale Brownawell. de Gruyter Studies in Mathematics, **12**. Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1989. xx+466 pp.
  MR 90j :11066
- Waldschmidt, Michel – *Linear independence of logarithms of algebraic numbers.* The Institute of Mathematical Sciences, IMSc Report **116**, Madras (1992), 168 pp.
- Nishioka, Kumiko – *Mahler functions and transcendence.* Lecture Notes in Mathematics, **1631**. Springer-Verlag, Berlin, 1996. viii+185 pp.
  MR 1 439 966
- Fel'dman, N.I. ; Nesterenko, Yuri V. – *Number theory. IV. Transcendental Numbers.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **44**. Springer-Verlag, Berlin, 1998. iii+345 pp.

Plusieurs colloques ou séminaires consacrés principalement à ce sujet, ont donné lieu à publication :

- *Transcendence theory : advances and applications.* Proceedings of a Conference held at the University of Cambridge, Cambridge, January-February, 1976. Edited by Alan Baker and David William Masser. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1977. x+236 pp.
  MR 56 #15573
- *Fonctions abéliennes et nombres transcendants.* Conférence à l'École Polytechnique, Palaiseau, 23–26 Mai 1979. Edité par Daniel Bertrand et Michel Waldschmidt. Mém. Soc. Math. France (N.S.) 1980/81, no. **2**. Bordas, Paris, 1981. pp. 1–119. Supplément au Bull. Soc. Math. France **108** (1980).
  MR 82c :10047
- *Approximations diophantiennes et nombres transcendants.* Conférence à Luminy, 13–19 Juin 1982. Edité par Daniel Bertrand et Michel Waldschmidt. Progress in Mathematics, **31**. Birkhäuser, Boston, Mass., 1983. vii+336 pp.
  MR 84e :10003
- *Diophantine approximation and transcendence theory.* Papers from the seminar on number theory held in Bonn, May–June 1985. Edited by Gisbert

Wüstholz. Lecture Notes in Mathematics, **1290**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987. vi+243 pp.
MR 88j :11036

- *New advances in transcendence theory.* Proceedings of the Symposium on Transcendental Number Theory held at the University of Durham, Durham, July 1986. Edited by Alan Baker. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1988. xii+434 pp.
  MR 89f :11091
- *Approximations diophantiennes et nombres transcendants.* Conférence à Luminy, 18–22 Juin 1990. Edité par Patrice Philippon. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992. viii+307 pp.
  MR 93b :11001

Nous n'avons pas parlé des problèmes métriques en théorie des nombres transcendants. On pourra à ce sujet consulter le livre de Sprindžuk,

- Sprindžuk, Vladimir G. – *Metricheskaya teoriya diofantovykh priblizheniĭ.* (Russian) Izdat. "Nauka", Moscow, 1977. 143 pp.
  MR 58 #16576
  Metric theory of Diophantine approximations. Translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman. With a foreword by Donald J. Newman. Scripta Series in Mathematics. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C. ; A Halsted Press Book, John Wiley & Sons, New York-Toronto, Ont.-London, 1979. xiii+156 pp.
  MR 80k :10048

ainsi que son excellent article de synthèse :

- Sprindžuk, Vladimir G. – Achievements and problems of the theory of Diophantine approximations. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **35** (1980), no. 4(214), 3–68, 248.
  MR 81j :10039

Terminons par une liste (non exhaustive) de quelques autres livres dont une partie au moins a trait à notre sujet :

- Lang, Serge – *Elliptic curves : Diophantine analysis.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **231**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. xi+261 pp.
  MR 81b :10009
- Schmidt, Wolfgang M. – *Diophantine approximation.* Lecture Notes in Mathematics, **785**. Springer, Berlin, 1980. x+299 pp. 2ème éd., 1996.
  MR 81j :10038
- Győry, Kàlmàn – *Résultats effectifs sur la représentation des entiers par des formes décomposables.* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics,

56. Queen's University, Kingston, Ont., 1980. iii+142 pp.
MR 83c :10021

- Shorey, Tarlok N. ; Tijdeman, Robert – *Exponential Diophantine equations.* Cambridge Tracts in Mathematics, **87**. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1986. x+240 pp.
  MR 88h :11002
- Schmidt, Wolfgang M. – *Diophantine approximations and Diophantine equations.* Lecture Notes in Mathematics, **1467**. Springer-Verlag, Berlin, 1991. viii+217 pp.
  MR 94f :11059
- *The arithmetic of function fields.* Proceedings of the workshop held at The Ohio State University, Columbus, Ohio, June 17–26, 1991. Edited by David Goss, David R. Hayes and Michael I. Rosen. Ohio State University Mathematical Research Institute Publications, **2**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992. viii+482 pp.
  MR 93f :11002
- Sprindžuk, Vladimir G. – *Klassicheskie diofantovy uravneniya ot dvukh neizvestnykh.* "Nauka", Moscow, 1982. 288 pp.
  MR 85d :11022
  Classical Diophantine equations. Translation edited by Ross Talent and Alf van der Poorten. With a foreword by van der Poorten. Lecture Notes in Mathematics, **1559**. Springer-Verlag, Berlin, 1993. xii+228 pp.
  MR 95g :11017
- Ribenboim, Paulo – *Catalan's conjecture. Are* 8 *and* 9 *the only consecutive powers ?* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994. xvi+364 pp.
  MR 95a :11029
- André, Yves – *G-functions and geometry.* Aspects of Mathematics, **E13**. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989. xii+229 pp.
  MR 90k :11087
- Duverney, Daniel – *Théorie des Nombres.* Enseignement des Mathématiques, Editions Masson (Paris), en préparation.

Michel Waldschmidt
Université P. et M. Curie (Paris VI)
Institut Mathématique de Jussieu
Problèmes Diophantiens, Case 247
4, Place Jus
e-mail : miw@math.jussieu.fr
internet : http://www.math.jussieu.fr/~miw/