TRANSCENDANCE ET INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DE VALEURS DE FONCTIONS MODULAIRES

par **Michel WALDSCHMIDT**

L'exposé donné à l'Université d'Ottawa le 21 Août 1996 dans le cadre de la cinquième conférence de l'Association de Théorie des Nombres du Canada présentait, dans un contexte historique, les deux principaux résultats récents sur la transcendance de valeurs de fonctions modulaires:

- le *théorème stéphanois* (K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain, G. Philibert), selon lequel, pour tout nombre complexe ou p-adique q satisfaisant $0<|q|<1$, l'un au moins des deux nombres q, $J(q)$ est transcendant
- le théorème de Yu.V. Nesterenko, qui donne l'indépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$ des trois nombres π, e^π et $\Gamma(1/4)$.

Ces résultats font l'objet d'un exposé au Séminaire Bourbaki [26], où on trouvera d'autres informations sur ce sujet, ainsi qu'une liste de références.

Nous donnons ici des variantes des démonstrations originales de chacun de ces deux résultats, seulement esquissées dans [26]. Pour le théorème stéphanois, la variante a été suggérée par D. Bertrand, tandis que pour le théorème de Nesterenko, c'est P. Philippon qui l'a proposée. Nous complétons ce texte par quelques remarques sur la conjecture des quatre exponentielles, en liaison avec les propriétés arithmétiques de la fonction J.

Ce texte a bénéficié de remarques pertinentes de Guy Diaz que je suis heureux de remercier ici.

Nous utiliserons les notations suivantes: la *longueur* $\mathrm{L}(A)$ d'un polynôme A à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est la somme des valeurs absolues (ordinaires) de ses coefficients. La *mesure de Mahler* d'un nombre algébrique γ de polynôme minimal $a_0(z-\gamma_1)\cdots(z-\gamma_d)$ est le nombre

$$\mathrm{M}(\gamma)=a_0\prod_{i=1}^d\max\{1,|\gamma_i|\},$$

tandis que sa *hauteur* est

$$\mathrm{h}(\gamma)=\frac{1}{d}\log\mathrm{M}(\gamma).$$

L'inégalité de Liouville s'écrit

$$\log|\gamma|\ge-[\mathbb{Q}(\gamma):\mathbb{Q}]\mathrm{h}(\gamma)\qquad\text{pour tout nombre }\gamma\text{ algébrique non nul.}$$

On désignera par $\mathcal{C}$ soit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, soit le complété $\mathbb{C}_p$ d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, pour p premier; la valeur absolue sur $\mathcal{C}$ sera le plus souvent notée $|\cdot|$. Pour un nombre rationnel $a\in\mathbb{Q}$, s'il y a risque de confusion, on notera $|a|_\infty$ sa valeur absolue ordinaire (archimédienne) et, pour p premier, $|a|_p$ sa valeur absolue p-adique.

Soient r un nombre réel ≥ 0 et f une fonction analytique dans un ouvert de $\mathcal{C}$ contenant le disque $|z|\le r$. Si $\mathcal{C}=\mathbb{C}$, on pose $|f|_r=\sup_{|z|=r}|f(z)|$. Supposons maintenant $\mathcal{C}=\mathbb{C}_p$. On désigne par G le *groupe des valeurs*: c'est l'image de $\mathbb{C}_p$ dans $\mathbb{R}_{\ge0}$ par l'application $x\mapsto|x|$, et c'est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}_{\ge0}$. Si r appartient à G, on pose encore $|f|_r=\sup_{|z|=r}|f(z)|$. Si r n'appartient pas au groupe des valeurs, on définit

$$|f|_r=\lim_{\substack{\varrho\in G\\ \varrho\to r}}|f|_\varrho.$$

Ainsi le principe du maximum s'écrit, dans tous les cas,

$$|f(z)|\le|f|_r\quad\text{pour }z\in\mathcal{C},\ |z|\le r.$$

1. Le théorème Stéphanois

On considère les séries d'Eisenstein de poids 2, 4 et 6:

$$P(z)=1-24\sum_{n=1}^\infty\frac{nz^n}{1-z^n},$$

$$Q(z)=1+240\sum_{n=1}^\infty\frac{n^3z^n}{1-z^n},$$

$$R(z)=1-504\sum_{n=1}^\infty\frac{n^5z^n}{1-z^n}.$$

On définit ([1])

$$\Delta=12^{-3}(Q^3-R^2)\quad\text{et}\quad J=Q^3/\Delta.$$

Ainsi

$$J(z)=\frac{1}{z}+744+196884z+\cdots$$

Le théorème suivant [5] est appelé *théorème stéphanois.*

Théorème 1. – *Soit $q\in\mathcal{C}$ vérifiant $0<|q|<1$. Alors l'un au moins des deux nombres q, $J(q)$ est transcendant.*

Suivant une suggestion de Bertrand [7] (voir aussi [4], lemme 2), nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme 1. – *Il existe une constante absolue $C_1>0$ ayant la propriété suivante: pour N et k entiers rationnels vérifiant $0\le k\le N$ et $N\ge1$, on écrit le développement de Taylor de $\Delta^{2N}J^k$ à l'origine:*

$$\Delta(z)^{2N}J(z)^k=\sum_{n=1}^\infty c_{Nk}(n)z^n.$$

Alors, pour tout $n\ge1$, le nombre $c_{Nk}(n)$ est entier rationnel, de valeur absolue (usuelle) majorée par

$$|c_{Nk}(n)|\le C_1^Nn^{12N}.$$

([1]) La fonction notée Δ dans [25] est le produit de la nôtre par $(2\pi)^{12}$

Démonstration du lemme 1. Les coefficients de Taylor du développement de la fonction Q à l'origine sont clairement des entiers rationnels:

$$Q(z) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)z^n, \quad \text{avec} \quad \sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3.$$

Il en est de même pour Δ, comme le montre le produit infini de Jacobi (q-développement)

$$\Delta(z) = z\prod_{n\geq 1}(1-z^n)^{24}.$$

Par conséquent on a $c_{Nk}(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 1$.

Afin d'estimer les valeurs absolues de ces entiers, on reprend la démonstration du théorème de Hecke majorant les coefficients du développement de Taylor d'une forme modulaire ([25], théorème 5, §4.3, Chap. VII; voir aussi [4], lemme 2).

Pour $\tau = x+iy \in \mathbb{C}$ avec x et y réels, si on pose $z = e^{2i\pi\tau}$, on a $\log(1/|z|) = 2\pi y$. Les fonctions $\Delta(e^{2i\pi\tau})^2$ et $(\Delta^2 J)(e^{2i\pi\tau})$ sont des formes modulaires paraboliques de poids 24. Cela permet de montrer que chacune des deux fonctions

$$\varphi_1(z) = |\Delta(z)^2|\bigl(\log(1/|z|)\bigr)^{12} \quad \text{et} \quad \varphi_2(z) = |\Delta(z)^2 J(z)|\bigl(\log(1/|z|)\bigr)^{12}$$

est bornée sur le disque unité du plan complexe. On définit une constante absolue $C_2 > 0$ par

$$C_2 = \max\bigl\{1\,,\ \sup_{|z|<1}\varphi_1(z)\,,\ \sup_{|z|<1}\varphi_2(z)\bigr\}.$$

Pour $|z| < 1$ et $0 \leq k \leq N$ on a donc

$$|\Delta^{2N}(z)J(z)^k| \leq C_2^N\bigl(\log(1/|z|)\bigr)^{-12N}.$$

On déduit alors le lemme 1 des inégalités de Cauchy.

Le deuxième lemme ([5], lemme 2) fait intervenir la fonction arithmétique

$$\psi(n) = n\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

qui satisfait

$$\limsup_{n\to\infty}\bigl(n(\log\log n)\bigr)^{-1}\psi(n) < \infty.$$

Lemme 2. – *Il existe une constante absolue $c > 0$ ayant la propriété suivante. Soit n un entier positif. Il existe un polynôme non nul $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X,Y]$, symétrique en X et Y, de degré $\psi(n)$ en chaque variable, de longueur $\leq e^{cn^2}$, tel que*

$$\Phi_n\bigl(J(q), J(q^n)\bigr) = 0.$$

Le résultat de P. Cohen [11] cité dans [5] donne une borne $n^{c\psi(n)}$ pour la longueur, mais nous aurons besoin seulement de l'estimation plus faible que nous avons énoncée, et qui résulte de la borne antérieure $e^{cn^{3/2}}$ donnée par K. Mahler [14].

Un troisième lemme permettra d'estimer la hauteur d'un nombre algébrique connaissant un polynôme (à coefficients algébriques) dont il est racine: c'est le lemme 5 de [5]. A propos, le lemme 3 ci-dessous peut être remplacé par le lemme 2 de [7]; on dispose donc de deux outils différents.

Lemme 3. – *Soit $P \in \mathbb{Z}[X,Y]$ un polynôme en deux variables à coefficients entiers et soient α, β deux nombres algébriques. On suppose que le polynôme $P(\alpha,Y) \in \mathbb{Q}(\alpha)[Y]$ a un degré ≥ 1 et s'annule au point β. Alors*

$$\log \mathrm{M}(\beta) \leq [\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]\bigl(\log \mathrm{L}(P) + \deg_X(P)\mathrm{h}(\alpha)\bigr).$$

Démonstration du théorème 1 dans le cas complexe

Nous utiliserons la méthode de [5] qui introduit une fonction auxiliaire. Notons cependant que P. Philippon ([23], §6a) évite le recours au lemme de Thue-Siegel grâce à la méthode des déterminants d'interpolation de M. Laurent.

Premier pas: choix des paramètres

La première étape consiste à introduire des paramètres pour que les estimations qui vont suivre soient valides. On choisit deux entiers positifs suffisamment grands L et N. Un choix convenable consiste a prendre pour N un entier, suffisamment grand, puis à définir $L = [N^2/2]$. Pendant les quatre premiers pas, il suffit que N soit plus grand qu'une constante absolue (effectivement calculable) pour que les estimations soient valables. On désignera par $C_3, \ldots, C_6$ des constantes absolues. A partir du cinquième pas, on fera intervenir des constantes $C_7, \ldots, C_{13}$ dépendant de q. Au septième et dernier pas, pour obtenir la conclusion, on fera tendre N vers l'infini.

Deuxième pas: la fonction auxiliaire

On va montrer l'existence d'un polynôme non nul $A \in \mathbb{Z}[X,Y]$, de degré $< N$ par rapport à chaque variable, tel que la fonction analytique $F(z) = \Delta(z)^{2N}A\bigl(z, J(z)\bigr)$ ait un zéro à l'origine de multiplicité $\geq L$.

Ecrivons le polynôme inconnu

$$A(X,Y) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} a_{ik}X^iY^k.$$

En utilisant les notations du lemme 1, on peut écrire

$$F(z) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} a_{ik}z^i\Delta(z)^{2N}J(z)^k = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=1}^{\infty} a_{ik}c_{Nk}(n)z^{i+n}.$$

Le système d'équations que l'on veut résoudre est

$$\sum_{i=0}^{\min\{\nu,N-1\}}\sum_{k=0}^{N-1} a_{ik}c_{Nk}(\nu-i) = 0, \qquad (0 \leq \nu < L).$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène de L équations en N^2 inconnues, à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Grâce à la condition $N^2 \geq 2L$ et à la borne

$$\max_{0\leq\nu<L}\sum_{i=0}^{\min\{\nu,N-1\}}\sum_{k=0}^{N-1}|c_{Nk}(\nu-i)| \leq N^2C_1^NL^{12N},$$

on déduit du lemme de Thue-Siegel (voir par exemple [5], lemme 3) qu'il existe une solution non triviale vérifiant

$$\mathrm{L}(A) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}|a_{ik}| \leq C_3^NL^{12N}.$$

Comme N est suffisamment grand, *on peut majorer simplement la longueur de A par N^{25N}.*

Troisième pas: définition de M

Les fonctions z et $J(z)$ sont algébriquement indépendantes (cf. [5], lemme 4), donc la fonction F n'est pas identiquement nulle. *On désigne par $M = \mathrm{ord}_0F$ sa multiplicité à l'origine.* D'après le second pas, on a $M \geq L$.

Quatrième pas: majoration de $|F|$ sur le disque unité
On établit l'estimation suivante:

$$|F(z)| < C_4^N M^{30N} \frac{|z|^M}{(1-|z|)^{12N+1}} \qquad \textit{pour } |z|<1.$$

En effet, comme F a un zéro de multiplicité M à l'origine, la fonction $G(z) = z^{-M}F(z)$ est analytique dans le disque unité $|z| < 1$. Ecrivons son développement de Taylor à l'origine:

$$G(z) = \sum_{\nu \geq 0} b_\nu z^\nu \quad \text{avec} \quad b_\nu = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_{ik} c_{Nk}(M+\nu-i).$$

Du lemme 1 et de la construction de A on déduit, pour tout $\nu \geq 0$,

$$|b_\nu| \leq C_5^N L^{12N}(M+\nu)^{12N}.$$

On a, pour $|z| < 1$,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (M+\nu)^{12N}|z|^\nu \leq (M+1)^{12N}\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{12N}|z|^\nu\right) \leq 2M^{12N}\frac{(12N)!}{(1-|z|)^{12N+1}}.$$

On en déduit, encore pour $|z| < 1$,

$$|G(z)| \leq C_5^N L^{12N} \sum_{\nu=0}^{\infty}(M+\nu)^{12N}|z|^\nu \leq C_6^N(LMN)^{12N}\frac{1}{(1-|z|)^{12N+1}}.$$

On trouve ainsi, toujours pour $|z| < 1$,

$$|F(z)| \leq |z|^M C_6^N (LMN)^{12N}\frac{1}{(1-|z|)^{12N+1}}.$$

Pour conclure on utilise les majorations $L \leq M$ et $N^2 < 2(L+1)$.

On utilisera la majoration de $|F(z)|$ sous la forme suivante: *pour tout nombre réel r dans l'intervalle $0 < r < 1$, si N est suffisamment grand en fonction de r, on a*

$$|F(z)| \leq |z|^M M^{31N} \qquad \textit{pour } |z| \leq r.$$

Cinquième pas: définition et majoration de S
C'est maintenant que q rentre en scène. Pour l'instant, q est un nombre complexe vérifiant $0 < |q| < 1$, et N est suffisamment grand par rapport à q. *On désigne par S le plus petit entier ≥ 1 tel que* $F(q^S) \neq 0$. L'existence de S vient du fait que la fonction F n'est pas identiquement nulle. *On va établir la majoration $S^2 \leq \gamma N \log M$, avec $\gamma = 63\big(\log(1/|q|)\big)^{-1}$.*

Soit $r = (1+|q|)/2$. On applique le principe du maximum $|H(0)| \leq |H|_r$ à la fonction

$$H(z) = \frac{F(z)}{z^M}\prod_{s=1}^{S-1}\frac{r^2 - z\overline{q}^s}{r(z-q^s)}.$$

D'après le quatrième pas, on a

$$|H|_r = r^{-M}|F|_r \leq M^{31N}.$$

D'un autre côté, puisque les coefficients du développement de Taylor de Δ^2 et de $\Delta^2 J$ à l'origine sont des entiers rationnels, le nombre $G(0) = b_0 = (1/M!)F^{(M)}(0)$ est un entier rationnel non nul. Comme $\mathcal{C} = \mathbb{C}$, on minore sa valeur absolue usuelle par 1, et on trouve

$$|H(0)| \geq r^{S-1}|q|^{-S(S-1)/2}.$$

On obtient ainsi

$$S(S-1)\log(1/|q|) \leq 2(S-1)\log(1/r) + 62N\log M.$$

On peut supposer $S \geq 189$. Alors $(S-2)(S-1) > \frac{62}{63}S^2$, donc

$$S(S-1)\log(1/|q|) - 2(S-1)\log(1/r) > \frac{62}{\gamma}S^2;$$

on en déduit la majoration annoncée pour S^2.

Sixième pas: minoration de $|F(q^S)|$
On suppose maintenant que q est un nombre complexe, $0 < |q| < 1$, tel que q et $J(q)$ soient algébriques. *On va montrer l'existence d'une constante $C_7 > 0$, ne dépendant que de q, telle que*

$$|F(q^S)| \geq \exp\big\{-C_7 NS(S+\log N)\log\log(3S)\big\}.$$

On reprend pour cela le quatrième pas de la démonstration de [5]. On majore la hauteur logarithmique absolue du nombre algébrique

$$\xi = \Delta(q^S)^{-2N}F(q^S) = A\big(q^S, J(q^S)\big)$$

de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(\xi) &\leq \log \mathrm{L}(A) + N\mathrm{h}(q^S) + N\mathrm{h}\big(J(q^S)\big) \\ &\leq 25N\log N + NS\mathrm{h}(q) + N\mathrm{h}\big(J(q^S)\big). \end{aligned}$$

On utilise une première fois le lemme 2 qui donne $\Phi_S\big(J(q), J(q^S)\big) = 0$, puis on applique le lemme 3 avec $P = \Phi_S$, $\alpha = J(q)$, $\beta = J(q^S)$:

$$[\mathbb{Q}\big(J(q^S)\big):\mathbb{Q}]\mathrm{h}\big(J(q^S)\big) \leq [\mathbb{Q}\big(J(q)\big):\mathbb{Q}]\Big(\log \mathrm{L}(\Phi_S) + \psi(S)\mathrm{h}\big(J(q)\big)\Big).$$

On utilise encore le lemme 2, qui donne d'abord

$$[\mathbb{Q}\big(J(q^S)\big):\mathbb{Q}] \leq C_8\psi(S),$$

puis

$$\log \mathrm{L}(\Phi_S) \leq C_9 S^2.$$

Par conséquent on a

$$[\mathbb{Q}\big(J(q^S)\big):\mathbb{Q}]\mathrm{h}\big(J(q^S)\big) \leq C_{10}S^2,$$

ce qui permet de conclure

$$[\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}]\mathrm{h}(\xi) \leq C_{11}NS(S+\log N)\log\log(3S).$$

Comme $|q^{-S}\Delta(q^S)|$ est minoré par $C_{12} > 0$, la minoration annoncée pour $|F(q^S)|$ résulte de l'inégalité de Liouville:

$$\log|\xi| \geq -[\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}]\mathrm{h}(\xi).$$

Septième pas: conclusion
En rapprochant la majoration du quatrième pas

$$|F(q^S)| \le |q|^{MS} M^{31N}$$

de la minoration du sixième, on trouve

$$M \le C_{13} N(S + \log M) \log\log(3S).$$

Mais cette majoration n'est pas compatible avec les inégalités

$$M \ge L = [N^2/2], \qquad S^2 \le \gamma N \log M.$$

Cela montre que l'hypothèse faite au sixième pas, suivant laquelle q et $J(q)$ sont tous deux algébriques, n'est pas réalisable.

Démonstration du théorème 1 dans le cas p-adique

Pas 1, 2 *et* 3.
On suppose $\mathcal{C} = \mathbb{C}_p$. On utilise les trois premiers pas de la démonstration précédente. En particulier on dispose d'un polynôme non nul $A \in \mathbb{Z}[X, Y]$, de degré $< N$ en chaque variable, de longueur $\le N^{25N}$, tel que la fonction $F = \Delta^{2N} A(z, J)$ ait un zéro de multiplicité M à l'origine, avec $M \ge [N^2/2]$.

Quatrième pas: majoration de $|F|$ sur le disque unité
Comme le développement de Taylor à l'origine de la fonction $G(z) = z^{-M} F(z)$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$, on a $|G(z)| \le 1$ pour $|z| < 1$, donc

$$|F(z)| \le |z|^M \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

La démonstration est donc plus simple (et l'estimation plus précise) que pour la quatrième étape du cas complexe. Cependant nous aurons besoin d'une information qui a été démontrée dans le cas complexe: il s'agit de la majoration de la valeur absolue ordinaire $|b_0|_\infty$ du nombre rationnel $b_0 = G(0)$:

$$|b_0|_\infty \le C_5^N (LM)^{12N}.$$

Cinquième pas: définition et majoration de S
Soit q un élément de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $0 < |q| < 1$. On suppose que N est suffisamment grand par rapport à q, et on désigne par S le plus petit entier ≥ 1 tel que $F(q^S) \ne 0$. *On va établir la majoration $S^2 \le \gamma N \log M$, avec $\gamma = 51\bigl(\log(1/|q|)\bigr)^{-1}$.*

Soit $r = (1 + |q|)/2$. On applique le principe du maximum $|H(0)| \le |H|_r$ à la fonction

$$H(z) = \frac{F(z)}{z^M} \prod_{s=1}^{S-1} \frac{r}{z - q^s}.$$

D'après le quatrième pas, on a

$$|H|_r = r^{-M} |F|_r \le 1.$$

D'un autre côté le nombre $G(0) = b_0 = (1/M!) F^{(M)}(0)$ est un entier rationnel non nul, et sa valeur absolue (p-adique – on la notera $|b_0|_p$ pour éviter toute confusion) est minorée par l'inverse de sa valeur absolue archimédienne:

$$|b_0|_p \ge |b_0|_\infty^{-1} \ge C_5^{-N} (LM)^{-12N}.$$

On en déduit

$$|H(0)| = |b_0|_p r^{S-1} |q|^{-S(S-1)/2} \ge M^{-25N} r^{S-1} |q|^{-S(S-1)/2}.$$

On obtient ainsi

$$S(S-1)\log(1/|q|) \le 2(S-1)\log(1/r) + 50N \log M.$$

Sixième pas: minoration de $|F(q^S)|$
On suppose maintenant que q est un élément de $\mathbb{C}_p$, $0 < |q| < 1$, tel que q et $J(q)$ soient algébriques. La même démonstration que dans le cas complexe entraîne l'existence d'une constante $C_7 > 0$, ne dépendant que de q, telle que

$$|F(q^S)| \ge \exp\bigl\{-C_7 N S(S + \log N) \log\log(3S)\bigr\}.$$

Pour établir cette estimation on a besoin de la majoration de la longueur de A établie dans le second pas. Ainsi, même dans le cas $\mathcal{C} = \mathbb{C}_p$, il faut contrôler les valeurs absolues archimédiennes des coefficients a_{ik} de A.

Septième pas: conclusion
La majoration du quatrième pas s'écrit ici

$$|F(q^S)| \le |q|^{MS}.$$

La conclusion s'obtient donc comme dans le cas complexe.

Remarque. Le lemme de zéros suivant, dû à G. Philibert [19], permet de vérifier la majoration $M \le 19L$. La démonstration de [19] est donnée dans le cas complexe, mais le cas p-adique s'en déduit.

Proposition 1. – *Soient $L_1 \ge 0$ et $L_2 \ge 1$ deux entiers et $A \in \mathcal{C}[X, Y]$ un polynôme non nul vérifiant $\deg_X A \le L_1$ et $\deg_Y A \le L_2$. Alors*

$$\mathrm{ord}_0 A\bigl(z, J(z)\bigr) \le 9L_1L_2 + \frac{3}{2}L_2 - \frac{1}{2}.$$

Pour majorer M par $19L$, on applique la proposition 1 avec $L_1 = L_2 = N$, $L = [N^2/2]$, et on utilise la relation

$$\mathrm{ord}_0 F(z) = 2N + \mathrm{ord}_0 A\bigl(z, J(z)\bigr).$$

Remarque. Le cinquième pas montre qu'il existe un entier s, dans l'intervalle $1 \le s \le (\gamma N \log M)^{1/2}$, tel que $F(q^s)$ ne soit pas nul. On peut aussi minorer le module d'un de ces nombres par voie analytique (en l'absence de toute hypothèse arithmétique). Au lieu d'utiliser un lemme de Schwarz, on utilise une formule d'interpolation [4] lemme 6 (comparer avec les lemmes 5 et 6 ci-dessous). Cela est utile pour obtenir des résultats quantitatifs, comme l'a fait K. Barré dans [3] et [4].

2. Le théorème de Nesterenko

Le résultat principal de [16] et [17] s'énonce ainsi:

Soit $q \in \mathcal{C}$ satisfaisant $0 < |q| < 1$. Alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$\mathbb{Q}\bigl(q, P(q), Q(q), R(q)\bigr)$$

est supérieur ou égal à 3.

Nous allons le démontrer sous l'hypothèse additionnelle que $J(q)$ est algébrique, ce qui s'énonce ainsi:

Théorème 2. – *Soit $q \in \mathcal{C}$ satisfaisant $0 < |q| < 1$ et tel que $J(q)$ soit algébrique. Alors les trois nombres q, $P(q)$ et $\Delta(q)$ sont algébriquement indépendants.*

Il est intéressant de noter que le théorème de Chudnovsky [10] sur l'indépendance algébrique des deux nombres ω/π et η/π, ainsi que son analogue p-adique (dû à D. Bertrand [6]; voir aussi [2]) peuvent être formulés de la manière suivante:

> *Soit $q \in \mathcal{C}$ vérifiant $0 < |q| < 1$. On suppose que $J(q)$ est algébrique. Alors les deux nombres $P(q)$ et $\Delta(q)$ sont algébriquement indépendants.*

On obtient l'indépendance algébrique des nombres π, e^π et $\Gamma(1/4)$, ainsi que celle des nombres π, $e^{\pi\sqrt{3}}$ et $\Gamma(1/3)$ en spécialisant $q = e^{-2\pi}$ et $q = -e^{-\pi\sqrt{3}}$ respectivement (cf. par exemple [1]). En appendice on donne les valeurs spéciales non seulement des fonctions P, Q, R et Δ, mais aussi des trois fonctions thêta θ_2, θ_3 et θ_4 (voir [26]), ainsi que de leurs dérivées logarithmiques, aux points $e^{2i\pi\tau}$ pour les quatre premières et $e^{i\pi\tau}$ pour les suivantes, avec $\tau = i$, puis $\tau = \varrho = e^{2i\pi/3}$.

La démonstration de Y.V. Nesterenko [16], [17] utilise le critère d'indépendance algébrique de P. Philippon [20]. Elle nécessite aussi un nouveau lemme de zéros ([17], Théorème 3). Suivant une suggestion de P.Philippon ([22], §5), nous allons remplacer ces deux ingrédients par une mesure d'indépendance algébrique; c'est elle qui impose l'hypothèse que $J(q)$ est algébrique. La mesure que nous utiliserons (théorème 3 ci-dessous) a été établie par G. Philibert [18]. Un raffinement séparant degré et hauteur est du à E.M. Jabbouri [13]; l'énoncé encore plus précis proposé par G.V. Chudnovsky dans le chap.8 de [10] a récemment été enfin démontré par P. Philippon [24].

Il est vrai que le théorème 3 demande encore une démonstration transcendante, faisant intervenir un critère d'indépendance algébrique et un lemme de zéros. Cependant ces deux outils sont plus faciles à élaborer dans le cadre de [18]: le critère d'indépendance algébrique de P. Philippon utilisé dans [18] ne fait intervenir que deux nombres algébriquement indépendants, tandis que le lemme de zéros (lemme 6 de [18], et [8]) repose sur des arguments analytiques plus simples que la démonstration de Nesterenko. On peut d'ailleurs aussi utiliser le lemme de zéros de Philippon sur les groupes algébriques [21].

Le but de l'argument transcendant est de construire une suite de polynômes non nuls qui, au point $\big(q, P(q), Q(q), R(q)\big)$, prennent des valeurs non nulles dont on peut majorer le module.

Proposition 2. – *Soit $q \in \mathcal{C}$, $0 < |q| < 1$. Il existe deux constantes positives c et κ, (dépendant de $|q|$), ayant la propriété suivante: pour tout entier N suffisamment grand, il existe un entier $M \geq N^4$ et un polynôme non nul $A_N \in \mathbb{Z}[z, X_1, X_2, X_3]$ tel que*

$$\deg A_N \leq cN \log M, \qquad \log H(A_N) \leq cN(\log M)^2,$$

et

$$0 < \big|A_N\big(q, P(q), Q(q), R(q)\big)\big| \leq e^{-\kappa M}.$$

Démonstration de la proposition 2 dans le cas complexe

Ici encore nous utiliserons le lemme de Thue-Siegel pour construire une fonction auxiliaire. Voir [23], §7a pour une démonstration ne faisant intervenir que des déterminants d'interpolation.

Premier pas: choix des paramètres
On désigne par N un entier suffisamment grand. On pose $L = [N^4/2]$.

Deuxième pas: la fonction auxiliaire: [17], lemme 2.1
Il existe un polynôme non nul $A \in \mathbb{Z}[z, X_1, X_2, X_3]$, de degré $\leq N$ par rapport à chacune des quatre variables, tel que la fonction $F(z) = A\big(z, P(z), Q(z), R(z)\big)$ ait, à l'origine, un zéro de multiplicité $\geq L$. Le lemme de Thue-Siegel permet de majorer la longueur d'un tel polynôme A:

$$\mathrm{L}(A) \leq N^{85N}.$$

Troisième pas: définition de M
Soit $M = \mathrm{ord}_0 F$ l'ordre de F en $z = 0$. La construction de A donne $M \geq L$. Contrairement à Nesterenko nous ne majorons pas M par cN^4 avec $c = 2 \cdot 10^{45}$.

Quatrième pas: majoration de $|F|$ sur le disque unité
En utilisant le fait que la fonction F a un zéro de multiplicité M à l'origine, on déduit (par des arguments analogues à ceux du quatrième pas du paragraphe 1 — cf. [17] lemme 2.2)

$$|F(z)| \leq |z|^M N^{103N}(M+1)^{17N} \frac{(17N)!}{(1-|z|)^{17N+1}}.$$

En particulier, *pour tout r dans l'intervalle $0 < r < 1$, si N a été choisi suffisamment grand par rapport à r, on a*

$$|F(z)| \leq |z|^M M^{48N} \quad \textit{pour } |z| \leq r.$$

Cinquième pas: définition et majoration de T
Posons $r = \min\{(1+|q|)/2, 2|q|\}$. Notons que l'on a $|q| < r < 1$. Le but de ce cinquième pas est de montrer que *le nombre $T = \mathrm{ord}_q F$ est majoré par $T \leq \gamma N \log M$, avec $\gamma = 48\big(\log(r/|q|)\big)^{-1}$.*

Pour cela on introduit la fonction

$$H(z) = \frac{F(z)}{z^M} \cdot \left(\frac{r^2 - \overline{q}z}{r(z-q)}\right)^T.$$

Comme H est holomorphe dans $|z| < 1$, on déduit du quatrième pas,

$$|H|_r = r^{-M}|F|_r \leq M^{48N}.$$

D'un autre côté le nombre $(1/M!)F^{(M)}(0)$ est entier et n'est pas nul, donc

$$|H(0)| \geq (r/|q|)^T.$$

Du principe du maximum $|H(0)| \leq |H|_r$ on déduit donc

$$(r/|q|)^T \leq M^{48N},$$

ce qui fournit la majoration annoncée pour T.

Sixième pas: construction de A_N
Les trois fonctions P, Q, R vérifient le système d'équations différentielles

$$DP = \frac{1}{12}(P^2 - Q), \qquad DQ = \frac{1}{3}(PQ - R), \qquad DR = \frac{1}{2}(PR - Q^2),$$

avec $D = z(d/dz)$. On introduit donc l'opérateur de dérivation

$$D = z\frac{d}{dz} + \frac{1}{12}(X_1^2 - X_2)\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{3}(X_1X_2 - X_3)\frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2}(X_1X_3 - X_2^2)\frac{\partial}{\partial X_3}$$

sur l'anneau $\mathcal{C}[z, X_1, X_2, X_3]$, de telle sorte que la dérivée de notre fonction auxiliaire F vérifie

$$z\frac{d}{dz}F(z) = (DA)\big(z, P(z), Q(z), R(z)\big).$$

On pose

$$A_N(z, X_1, X_2, X_3) = (12z)^T(z^{-1}D)^T A(z, X_1, X_2, X_3).$$

On vérifie

$$\deg A_N \leq 4N + T \leq (\gamma+1)N\log M,$$
$$\mathrm{L}(A_N) \leq N^{85N}5^{4N}(48N + 24T)^T \leq \exp\{2\gamma N(\log M)^2\}$$

et

$$\big|A_N\big(q, P(q), Q(q), R(q)\big)\big| \leq 12^T T!(r - |q|)^{-T} r^M M^{48N} \leq e^{-\kappa M}.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2 dans le cas complexe.

Démonstration de la proposition 2 dans le cas p-adique.

Nous avons vu, dans la situation du théorème stéphanois, quels changements il convenait d'apporter pour passer du cas complexe au cas p-adique. Ici, comme le nombre entier $b_0 = G(0)$ n'est pas nul, il suffit de remarquer que la valeur absolue usuelle $|b_0|_\infty$ de b_0 est majorée par

$$|b_0|_\infty \le C^N M^{16N},$$

avec une constante absolue $C > 0$, et d'utiliser l'inégalité $|b_0|_p \ge |b_0|_\infty^{-1}$. On vérifie en effet que, pour k_0, k_1, k_2, k_3 entiers dans l'intervalle $[0, N-1]$, le coefficient de z^n dans le développement de Taylor de

$$z^{k_0} P(z)^{k_1} Q(z)^{k_2} R(z)^{k_3}$$

est majoré par le coefficient de z^n dans le développement de Taylor de

$$\frac{(24 \cdot 2!)^{k_1} (240 \cdot 4!)^{k_2} (504 \cdot 6!)^{k_3}}{(1-z)^{k_0+3k_1+5k_2+7k_3}}.$$

On majore $k_0 + 3k_1 + 5k_2 + 7k_3$ par $16N$.

Dans le cinquième pas de la démonstration, on veut montrer que le nombre $T = \mathrm{ord}_q F$ est majoré par $T \le \gamma N \log M$, avec $\gamma = 17\big(\log(r/|q|)\big)^{-1}$ et $r = \min\{(1+|q|)/2, 2|q|\}$. Pour cela on introduit la fonction

$$H(z) = \frac{F(z)}{z^M} \cdot \left(\frac{r}{z-q}\right)^T.$$

Puisque le développement de Taylor de la fonction $G(z) = z^{-M} F(z)$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$, on a

$$|H|_r = r^{-M} |F|_r \le 1.$$

Comme $H(0) = b_0(-r/q)^T$, la minoration précédente pour $|b_0|_p$ donne

$$|H(0)| \ge (r/|q|)^T C^{-N} M^{-16N}.$$

De l'inégalité $|H(0)| \le |H|_r$ on déduit donc

$$T \log(r/|q|) \le 17 N \log M.$$

Pour déduire le théorème 2 de la proposition 2, on utilise la mesure d'indépendance algébrique de G. Philibert [18] pour les nombres ω/π et η/π: quand B est un polynôme non nul à coefficients complexes, on désigne par $t(B)$ la somme du degré total de B et du logarithme de sa longueur.

Proposition 3. *– Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstraß d'invariants g_2 et g_3 algébriques. Soit ω une période non nulle de $\wp$ et soit η la quasi-période correspondante de la fonction ζ de Weierstraß attachée à $\wp$:*

$$\zeta' = -\wp, \qquad \zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \eta.$$

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $C = C(\epsilon, g_2, g_3, \omega) > 0$ vérifiant la propriété suivante: si $B \in \mathbb{Z}[X, Y]$ est un polynôme non nul, on a

$$|B(\omega/\pi, \eta/\pi)| > \exp\{-Ct(B)^{3+\epsilon}\}.$$

On utilisera encore le petit lemme suivant

Lemme 4. *– Soient $\theta_1, \ldots, \theta_t, \xi_1, \ldots, \xi_m$ des éléments de $\mathcal{C}$. On suppose que chacun des m nombres ξ_i, $(1 \le i \le m)$ est algébrique sur le corps $\mathbb{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_t)$. Il existe une constante positive C telle que, si T est un nombre réel ≥ 1 et $A \in \mathbb{Z}[Y_1, \ldots, Y_m]$ un polynôme non nul vérifiant $t(A) \le T$ et $A(\xi_1, \ldots, \xi_m) \ne 0$, alors il existe un polynôme $B \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_t]$ tel que $t(B) \le CT$ et*

$$0 < |B(\theta_1, \ldots, \theta_t)| \le e^{CT} |A(\xi_1, \ldots, \xi_m)|.$$

Démonstration. Pour $1 \le i \le m$, comme ξ_i est algébrique sur le corps $\mathbb{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_t)$, il existe un polynôme $A_i \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_m, Y]$ tel que $A_i(\theta_1, \ldots, \theta_t, Y)$ soit irréductible dans l'anneau $\mathbb{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_t)[Y]$ et s'annule au point ξ_i.

La démonstration consiste à éliminer, dans l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_t, Y_1, \ldots, Y_m]$, les m variables $Y_1, \ldots, Y_m$ entre les $m+1$ polynômes $A, A_1, \ldots, A_m$.

Quitte à remplacer t par $t+m$, on peut supposer $\theta_i = \xi_i$ pour $1 \le i \le t$. Par recurrence, il suffit alors de traiter le cas $m = t+1$. On écrira ξ pour ξ_{t+1}.

Comme $A_{t+1}(\theta_1, \ldots, \theta_t, Y)$ s'annule au point ξ, il ne divise pas $A(\theta_1, \ldots, \theta_t, Y)$ dans l'anneau $\mathbb{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_t)[Y]$. Mais il est aussi irréductible dans cet anneau. Donc le résultant de $A(\theta_1, \ldots, \theta_t, Y)$ et $A_{t+1}(\theta_1, \ldots, \theta_t, Y)$ est un élément non nul de $\mathbb{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_t]$; on l'écrit $B(\theta_1, \ldots, \theta_t)$, où B appartient à l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_t]$ et vérifie les propriétés voulues.

Démonstration du théorème 2. Soit q un nombre complexe, $0 < |q| < 1$, tel que le nombre $J(q)$ soit algébrique. Il existe τ dans le demi-plan supérieur $\mathfrak{H}$ tel que $q = e^{2i\pi\tau}$. On choisit aussi une racine douzième de $\Delta(q)$ et on pose $\omega = 2\pi\Delta(q)^{1/12}$. La fonction elliptique $\wp$ de Weierstraß attachée au réseau $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)\omega$ a pour invariants g_2, g_3 des nombres algébriques, et on a, avec les notations de la proposition 3,

$$P(q) = 3\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{\eta}{\pi}, \quad Q(q) = \frac{3}{4}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 g_2, \quad R(q) = \frac{27}{8}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^6 g_3$$

et

$$\Delta(q) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{12} (g_2^3 - 27g_3^2).$$

Si les trois nombres q, $P(q)$ et $\Delta(q)$ sont algébriquement dépendants, alors $(\omega/\pi, \eta/\pi)$ est une base de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}\big(g_2, g_3, q, P(q), Q(q), R(q)\big)$. Grâce à la proposition 2, on peut appliquer le lemme 4 avec $t = 2$, $m = 4$, $\theta_1 = \omega/\pi$, $\theta_2 = \eta/\pi$, $\xi_1 = q$, $\xi_2 = P(q)$, $\xi_3 = Q(q)$, $\xi_4 = R(q)$ et $T = 2N(\log M)^2$. On trouve ainsi une contradiction avec la mesure de transcendance fournie par la proposition 3 avec $\epsilon = 1/2$.

Remarque. Au cinquième pas on s'est contenté de trouver une valeur non nulle pour une dérivée de F en $z = q$. On peut faire un peu mieux et trouver une telle valeur qui ne soit pas trop petite en module:

$$|D^T F(q)| \ge \left(\frac{1}{2}|q|\right)^{2M}.$$

L'existence de cet entier T repose sur une formule d'interpolation (voir la démonstration du lemme 2.3 de [17]). Bien que cela n'ait pas d'utilité directe dans la démonstration précédente du théorème 2, nous indiquons comment se fait cette autre approche car elle est utile pour obtenir des énoncés d'approximation diophantienne.

Voici donc le résultat, d'abord dans le cas complexe $\mathcal{C} = \mathbb{C}$, puis dans le cas ultramétrique.

Lemme 5. *– Soient M et T deux entiers ≥ 0, r un nombre réel et q un nombre complexe vérifiant $0 < |q| \le r$. Soit F une fonction analytique dans un ouvert du plan complexe contenant le disque $|z| \le r$. On suppose que F a un zéro de multiplicité $\ge M$ à l'origine. Alors*

$$\frac{r^M}{M!}|F^{(M)}(0)| \le \left(\frac{r}{|q|}\right)^{-T} |F|_r + 2^{M+T}\left(\frac{r}{|q|}\right)^M \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{|q|}{2}\right)^t \frac{1}{t!}|F^{(t)}(q)|.$$

Démonstration. Pour $|q| = r$, ainsi que pour $T = 0$, la majoration résulte des inégalités de Cauchy (et le second terme est alors superflu). On peut donc supposer $|q| < r$ et $T \geq 1$. La démonstration consiste à intégrer la fonction méromorphe

$$G(z) = \frac{F(z)}{z^{M+1}} \left(\frac{r^2 - \overline{q}z}{r(z-q)} \right)^T$$

sur le cercle $|z| = r$. L'intégrale

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} G(z) dz$$

est clairement majorée par

$$|I| \leq r^{-M} |F|_r.$$

Le résidu en $z = 0$ est

$$\left(-\frac{r}{q} \right)^T \frac{1}{M!} F^{(M)}(0),$$

tandis que le résidu en $z = q$ peut s'écrire (cf. [17] p.72)

$$\frac{1}{(T-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{T-1} \left(\frac{F(z)(r^2 - \overline{q}z)^T}{z^{M+1} r^T} \right) \Bigg|_{z=q} = \sum_{t=0}^{T-1} c_t \frac{F^{(t)}(q)}{t! r^T},$$

avec des nombres complexes

$$c_t = \frac{1}{(T-t-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{T-t-1} \left(\frac{(r^2 - \overline{q}z)^T}{z^{M+1}} \right) \Bigg|_{z=q} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-q|=|q|/2} \frac{(r^2 - \overline{q}z)^T}{(z-q)^{T-t}} \cdot \frac{dz}{z^{M+1}}$$

qui satisfont

$$|c_t| \leq r^{2T} (2/|q|)^{M+T-t}, \qquad (0 \leq t < T);$$

(on a majoré $|r^2 - \overline{q}z|$ par r^2 sur le cercle $|z - q| = |q|/2$). Ceci termine la démonstration du lemme 5.

Passons au cas ultramétrique.

Lemme 6. – *Soient p un nombre premier, M et T deux entiers ≥ 0, r un nombre réel dans l'intervalle $0 < r < 1$ et q un élément de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $0 < |q| \leq r$. Soit F une fonction analytique dans le disque unité de $\mathbb{C}_p$, ayant un zéro de multiplicité $\geq M$ à l'origine. Alors*

$$r^M \left| \frac{1}{M!} F^{(M)}(0) \right| \leq \max \left\{ \left(\frac{r}{|q|} \right)^{-T} |F|_r \, ; \, \left(\frac{r}{|q|} \right)^M \max_{0 \leq t < T} \left| \frac{q^t}{t!} F^{(t)}(q) \right| \right\}.$$

Démonstration. Les inégalités de Cauchy permettent de supposer $|q| < r$. On écrit le développement de Taylor de F en $z = 0$ et en $z = q$:

$$F(z) = \sum_{m=M}^{\infty} a_m z^m = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-q)^n,$$

et on pose

$$B = \max_{0 \leq t < T} |q^t b_t|.$$

Ainsi la conclusion s'écrit

$$r^M |a_M| \leq \max \left\{ \left(\frac{r}{|q|} \right)^{-T} |F|_r \, ; \, \left(\frac{r}{|q|} \right)^M B \right\}.$$

On va déjà montrer qu'il existe des éléments $c_0, \ldots, c_{T-1}$ de $\mathbb{C}_p$ tels que la fonction

$$G(z) = F(z) - z^M \sum_{t=0}^{T-1} c_t (z-q)^t$$

admette en $z = q$ un zéro de multiplicité $\geq T$. En écrivant le développement de Taylor en $z = q$ de z^M:

$$z^M = \sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} q^{M-m} (z-q)^m,$$

on peut écrire celui de la fonction G cherchée:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n - \sum_{\substack{0 \leq m \leq M \\ 0 \leq t < T \\ m+t=n}} \binom{M}{m} q^{M-m} c_t \right) (z-q)^n.$$

Pour obtenir l'existence de G, il suffit de remarquer que le système d'équations

$$\sum_{m+t=n} \binom{M}{m} q^{M-m} c_t = b_n, \qquad (0 \leq n < T)$$

est triangulaire; il admet donc une solution unique. De plus on vérifie, par récurrence sur t,

$$|c_t| \leq |q|^{-M-t} B, \qquad (0 \leq t < T).$$

La fonction

$$H(z) = z^{-M} G(z) = z^{-M} F(z) - \sum_{t=0}^{T-1} c_t (z-q)^t$$

a un zéro de multiplicité $\geq T$ en $z = q$. Le lemme de Schwarz ultramétrique, que l'on obtient en appliquant le principe du maximum à la fonction $(z-q)^{-T} H(z)$, donne:

$$|H(0)| \leq \left(\frac{r}{|q|} \right)^{-T} |H|_r.$$

Or

$$H(0) = a_M - \sum_{t=0}^{T-1} c_t (-q)^t$$

et

$$|H|_r \leq \max \left\{ r^{-M} |F|_r \, ; \, |q|^{-M} \left(\frac{r}{|q|} \right)^T B \right\}.$$

D'où

$$|a_M| \leq \max\left\{|H(0)|\,;\,|q|^{-M}B\right\}$$

avec

$$|H(0)| \leq \max\left\{\left(\frac{r}{|q|}\right)^{-T} r^{-M}|F|_r\,;\,|q|^{-M}B\right\}.$$

Finalement

$$|a_M| \leq \max\left\{\left(\frac{r}{|q|}\right)^{-T} r^{-M}|F|_r\,;\,|q|^{-M}B\right\}.$$

Remarque. La démonstration du lemme 6 s'adapte au cas archimédien et fournit une variante du lemme 5: on y remplace la conclusion par

$$\frac{r^M}{M!}|F^{(M)}(0)| \leq \left(\frac{r}{|q|}\right)^{-T}|F|_r + (2^T+1)(2M)^T\left(\frac{r}{|q|}\right)^M \cdot \max_{0\leq t<T}\frac{|q|^t}{t!}|F^{(t)}(q)|.$$

Pour obtenir ce résultat on remplace, dans la démonstration du lemme 6, le corps $\mathbb{C}_p$ par $\mathbb{C}$. La majoration de $|c_t|$ devient

$$|c_t| \leq \left(\frac{2M}{|q|}\right)^t |q|^{-M}B, \qquad (0\leq t<T).$$

Le lemme de Schwarz

$$|H(0)| \leq \left(\frac{r}{|q|}\right)^{-T}|H|_r$$

s'obtient en appliquant le principe du maximum à la fonction

$$H(z)\left(\frac{r^2-\overline{q}z}{r(z-q)}\right)^T.$$

On a

$$|a_M| \leq |H(0)| + (2M)^T|q|^{-M}B$$

et

$$|H|_r \leq r^{-M}|F|_r + (2M)^T|q|^{-M}B\left(\frac{r}{|q|}+1\right)^T,$$

donc

$$H(0) = \left(\frac{r}{|q|}\right)^{-T} r^{-M}|F|_r + (4M)^T|q|^{-M}B.$$

3. Liens avec la conjecture des quatre exponentielles

Dans le cas complexe, le théorème stéphanois peut être vu comme un cas particulier d'un problème des quatre exponentielles mixtes, pour un produit du groupe multiplicatif par une courbe elliptique.

La version "usuelle" du problème des quatre exponentielles (pour un tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$) peut s'énoncer de plusieurs manières équivalentes; en voici une (voir par exemple [26], §1.1). On désigne par $\mathcal{L}$ le $\mathbb{Q}$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ formé des logarithmes de nombres algébriques:

$$\mathcal{L} = \exp^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}^\times) = \left\{z\in\mathbb{C}\,;\,e^z\in\overline{\mathbb{Q}}\right\},$$

où $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne le corps des nombres algébriques (clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$).

Conjecture des quatre exponentielles. – *On considère une matrice*

$$M = \begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_3\\ \ell_2 & \ell_4\end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{L}$. Si les deux lignes sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, et si les deux colonnes sont aussi linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, alors le déterminant de M ne s'annule pas.

G. Diaz [12] a remarqué que cette conjecture avait des conséquences très intéressantes sur la fonction modulaire J. Supposons en effet qu'elle soit vraie. On commence par en déduire:

- *pour $z\in\mathbb{C}$, z non rationnel, la condition $|z|^2\in\mathbb{Q}$ implique la transcendance du nombre $e^{2i\pi z}$.*

En effet, si z est un nombre complexe tel que $e^{2i\pi z}$ soit algébrique, alors le nombre $\ell = 2i\pi z$ appartient à $\mathcal{L}$, de même que son conjugué complexe $\overline{\ell} = -2i\pi\overline{z}$. Si, de plus, le nombre $r = |z|^2$ est rationnel, la conjecture des quatre exponentielles, appliquée à la matrice

$$\begin{pmatrix}\ell & -2i\pi r\\ 2i\pi & \overline{\ell}\end{pmatrix},$$

entraîne que $z = \ell/(2i\pi)$ est rationnel.

Ainsi, selon la conjecture des quatre exponentielles, la courbe $w = e^{2i\pi z}$ pour $|z| = 1$ (voir la figure annexée à l'appendice 2), devrait éviter tous les points algébriques à part $w = 1$. Un phénomène semblable s'observe pour certaines droites ou certains cercles (par exemple les cercles centrés en un point algébrique et de rayon transcendant). Comme me le fait remarquer F. Amoroso, un autre exemple est la courbe plane $z = t+ie^t$, $t\in\mathbb{R}$, qui ne passe que par des points transcendants, à part le point $z = i$.

M. Kaneko a noté que cette remarque de G. Diaz (avec $|z| = 1$) avait la conséquence immédiate suivante: désignons par $\mathcal{D}$ le domaine fondamental usuel du demi-plan supérieur $\mathfrak{H}$ pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\mathcal{D} = \left\{\tau\in\mathfrak{H}\,;\,-\frac{1}{2}\leq\Re e\tau<\frac{1}{2}\,,\,|\tau|>1\right\}\bigcup\left\{\tau\in\mathfrak{H}\,;\,-\frac{1}{2}\leq\Re e\tau\leq 0\,,\,|\tau|=1\right\};$$

si $\tau\in\mathcal{D}$ est tel que $j(\tau)$ appartienne à l'intervalle réel $[0,1728]$, *alors le nombre $q = e^{2i\pi\tau}$ est transcendant.* En effet, on sait ([9], Chap. VI, §4) que les seuls éléments, dans $\mathcal{D}$, où j prenne une valeur dans l'intervalle réel $[0,1728]$, sont situés sur le cercle unité.

On peut étendre cette remarque à $\mathfrak{H}$ (toujours en admettant la conjecture des quatre exponentielles):

- *Soit $\tau \in \mathfrak{H}$ tel que $j(\tau)$ appartienne à l'intervalle réel $[0, 1728]$ et tel que le nombre $q = e^{2i\pi\tau}$ soit algébrique. Alors on peut écrire*

$$\tau = \frac{1}{2} + k + iy, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi le nombre q appartient à l'intervalle réel $[-e^{-\pi/\sqrt{3}}, -e^{-\pi\sqrt{3}}]$.

Notons que la conclusion est optimale: pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et tout nombre algébrique α dans l'intervalle réel $e^{\pi/\sqrt{3}} < \alpha < e^{\pi\sqrt{3}}$, le nombre $\tau = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\log\alpha$ vérifie les deux propriétés $j(\tau) \in [0, 1728]$ et $q = e^{2i\pi\tau} \in \overline{\mathbb{Q}}$ (les bornes de l'intervalle sont exclues car $e^{\pi\sqrt{3}}$ est transcendant). Il s'agit donc de voir qu'il n'y a pas d'autre solution (sous la conjecture des quatre exponentielles).

Supposons donc $j(\tau) \in [0, 1728]$ et $q = e^{2i\pi\tau} \in \overline{\mathbb{Q}}$. Alors le nombre $\ell = 2i\pi\tau$ appartient à $\mathcal{L}$. Comme $j(\tau) \in [0, 1728]$, il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{telle que le nombre} \quad \tau_0 = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{satisfasse} \quad |\tau_0| = 1.$$

En écrivant $\overline{\tau_0} = 1/\tau_0$, on trouve

$$\frac{a\bar{\ell} - 2i\pi b}{c\bar{\ell} - 2i\pi d} = \frac{c\ell + 2i\pi d}{a\ell + 2i\pi b},$$

c'est-à-dire que le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a\bar{\ell} - 2i\pi b & c\ell + 2i\pi d \\ c\bar{\ell} - 2i\pi d & a\ell + 2i\pi b \end{pmatrix}$$

est nul. Mais on a $\mathfrak{H} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, donc τ_0 est irrationnel, et par conséquent les lignes de M sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Donc les colonnes sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} \lambda a\bar{\ell} - \mu c\ell - 2i\pi(\lambda b + \mu d) = 0 \\ \lambda c\bar{\ell} - \mu a\ell - 2i\pi(\lambda d + \mu b) = 0 \end{cases}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$. Comme ni ℓ ni $\bar{\ell}$ n'est multiple rationnel de $2i\pi$, les deux formes linéaires

$$(z_0, z_1, z_2) \mapsto \lambda a z_1 - \mu c z_2 - (\lambda b + \mu d) z_0 \quad \text{et} \quad (z_0, z_1, z_2) \mapsto \lambda c z_1 - \mu a z_2 - (\lambda d + \mu b) z_0$$

sont proportionnelles:

$$a^2 = c^2, \qquad c(\lambda b + \mu d) = a(\lambda d + \mu b).$$

En utilisant encore la relation $ad - bc = 1$, on déduit

$$a^2 = c^2 = 1, \quad b = c(ad - 1), \quad \lambda = \mu ac, \quad \bar{\ell} - \ell = 2i\pi a(2b + c).$$

On trouve ainsi $\tau = \frac{1}{2} + k + iy$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. On vérifie enfin que sur la demi-droite $(\frac{1}{2} + i\mathbb{R}) \cap \mathfrak{H}$, les τ équivalents, modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, à un élément de $\mathcal{D}$ de module 1 sont ceux dont la partie imaginaire appartient à l'intervalle $[1/(2\sqrt{3}), \sqrt{3}/2]$.

Suivant [12], nous déduisons maintenant de la conjecture des quatre exponentielles l'énoncé suivant:

- *La fonction J est injective sur l'ensemble des nombres algébriques α du domaine $0 < |\alpha| < 1$.*

Supposons $J(\alpha_1) = J(\alpha_2)$ avec α_1 et α_2 algébriques, $0 < |\alpha_h| < 1$, $(h = 1, 2)$. Pour $h = 1$ et $h = 2$ on choisit $\tau_h \in \mathfrak{H}$ tel que $\alpha_h = e^{2i\pi\tau_h}$ et on pose $\ell_h = 2i\pi\tau_h$. Ainsi ℓ_h appartient à $\mathcal{L}$. L'hypothèse $J(\alpha_1) = J(\alpha_2)$ implique l'existence d'entiers rationnels a, b, c, d vérifiant $ad - bc = 1$ et

$$\tau_1 = \frac{a\tau_2 + b}{c\tau_2 + d}.$$

Alors le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & a\ell_2 + 2i\pi b \\ 2i\pi & c\ell_2 + 2i\pi d \end{pmatrix}$$

est nul. Comme les nombres $\tau_1 = \ell_1/2i\pi$ et $\tau_2 = \ell_2/2i\pi$ sont irrationnels (ils sont dans le demi-plan supérieur), la conjecture des quatre exponentielles implique $c = 0$, donc $\tau_1 - \tau_2$ est un entier rationnel, et $\alpha_1 = \alpha_2$.

La conjecture suivante, proposée par D. Bertrand ([7], conjecture 2), fait apparaître un autre lien entre le problème des quatre exponentielles et les propriétés arithmétiques de la fonction modulaire :

Conjecture. – *Si α_1 et α_2 sont deux nombres algébriques multiplicativement indépendants dans le disque pointé $\{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < |z| < 1\}$, alors les deux nombres $J(\alpha_1)$ et $J(\alpha_2)$ sont algébriquement indépendants.*

Suivant [7], montrons que cette conjecture contient le cas particulier de la conjecture des quatre exponentielles où deux des nombres algébriques $\alpha_i = e^{\ell_i}$ sont des racines de l'unité, tandis que les deux autres sont de module $\neq 1$. Il n'y a pas de restriction à supposer que les deux racines de l'unité sont α_2 et α_3. Il s'agit donc de démontrer que si une matrice

$$\begin{pmatrix} \ell & 2i\pi a \\ 2i\pi b & \ell' \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } \ell \text{ et } \ell' \text{ dans } \mathcal{L} \setminus i\mathbb{R},\ a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{Q}^\times,$$

a un déterminant nul, alors $\ell/2i\pi$ et $\ell'/2i\pi$ sont tous deux rationnels. Après multiplication éventuelle des lignes ou des colonnes par un nombre rationnel convenable, on peut aussi supposer que ℓ et ℓ' ont une partie réelle strictement négative. Alors, si on pose

$$\tau = \ell/(2i\pi), \quad \alpha = e^{\ell} = e^{2i\pi\tau} \quad \text{et} \quad \tau' = \ell'/(2i\pi), \quad \alpha' = e^{\ell'} = e^{2i\pi\tau'},$$

on a

$$\tau \in \mathfrak{H}, \quad |\alpha| < 1 \quad \text{et} \quad \tau' \in \mathfrak{H}, \quad |\alpha'| < 1.$$

La nullité du déterminant montre que le nombre $\tau\tau'$ est rationnel. Utilisant l'équation modulaire, on en déduit que $j(\tau)$ et $j(\tau')$ sont algébriquement dépendants. La conjecture de Bertrand entraîne alors que α_1 et α_2 sont multiplicativement dépendants, d'où il résulte que les trois nombres $\tau, \tau', 1$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$. Utilisant encore la rationalité du nombre $\tau\tau'$, on voit que $\ell/2i\pi$ est algébrique (de degré ≤ 2 sur $\mathbb{Q}$), donc (théorème de Gel'fond-Schneider) rationnel. On obtient ainsi la conclusion souhaitée.

Voici un analogue elliptique de la conjecture des quatre exponentielles (pour le carré d'une courbe elliptique — on peut aussi énoncer une conjecture semblable pour le produit de deux courbes elliptiques non isogènes), suivi d'une analogue "mixte" pour le produit du groupe multiplictatif par une courbe elliptique.

On introduit la notation suivante. Soit $\mathbb{E}$ une courbe elliptique définie sur le corps des nombres algébriques. On choisit un plongement de Weierstraß de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{P}_2$ et on note $\exp_{\mathbb{E}} : \mathbb{C} \to \mathbb{E}(\mathbb{C})$ l'application qui envoie $z \in \mathbb{C}$ sur $\bigl(1 : \wp(z) : \wp'(z)\bigr)$, de sorte que les invariants g_2 et g_3 de $\wp$ sont algébriques. On désigne alors par $\mathcal{L}_{\mathbb{E}}$ l'image inverse dans $\mathbb{C}$ du groupe $\mathbb{E}(\overline{\mathbb{Q}})$ par $\exp_{\mathbb{E}}$. C'est un module sur l'anneau des endomorphismes $\mathrm{End}\mathbb{E}$ de $\mathbb{E}$ (c'est même un espace vectoriel sur le corps $\mathrm{End}^0\mathbb{E} = \mathrm{End}\mathbb{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ des endomorphismes de $\mathbb{E}$).

La conjecture pour le carré d'une courbe elliptique s'énonce ainsi:

Conjecture. - *Soient $\mathbb{E}$ une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et soient u_1, u_2, u_3, u_4 des éléments de $\mathcal{L}_{\mathbb{E}}$. On suppose que les deux lignes de la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes sur $\mathrm{End}\mathbb{E}$, *et aussi que les deux colonnes de cette matrice sont linéairement indépendantes sur* $\mathrm{End}\mathbb{E}$. *Alors le déterminant de M n'est pas nul.*

Pour finir, on énonce la conjecture pour le produit d'une courbe elliptique par le groupe multiplicatif:

Conjecture. - *Soient $\mathbb{E}$ une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, u_1, u_2 deux éléments de $\mathcal{L}_{\mathbb{E}}$ et ℓ_1, ℓ_2 deux éléments de $\mathcal{L}$. On suppose $(u_1, u_2) \neq (0,0)$ et $(\ell_1, \ell_2) \neq (0,0)$. On suppose de plus que les deux lignes de la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & \ell_1 \\ u_2 & \ell_2 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$. Alors le déterminant de M n'est pas nul.

Le théorème stéphanois résout cette dernière conjecture dans le cas de trois périodes: u_1 et u_2 sont dans le noyau de $\exp_{\mathbb{E}}$, et ℓ_1 est un multiple rationnel de $2i\pi$. On verra dans [26] des références à cette question dans le cas de deux périodes (soit u_1 et u_2, soit u_1 et ℓ_1). Le cas particulier $\ell_1 = 2i\pi$, $u_1 \in \ker \exp_{\mathbb{E}}$ fait l'objet de [15], mais la démonstration n'est pas convaincante (dans le membre de droite de la relation (12) de [15], il faut remplacer f par g).

Appendice 1

Nous indiquons dans le tableau ci-dessous les valeurs des fonctions P, Q, R et Δ aux points $e^{-2\pi}$ et $-e^{-\pi\sqrt{3}}$. Nous considérons aussi les valeurs, aux points $e^{-\pi}$ et $ie^{-\pi\sqrt{3}/2}$, des trois fonctions thêta de Jacobi

$$\theta_2(z) = 2z^{1/4} \sum_{n \geq 0} z^{n(n+1)}, \qquad \theta_3(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n^2}, \qquad \theta_4(z) = \theta_3(-z)$$

et de leurs dérivées logarithmiques $D\theta_i/\theta_i$, avec $D = z(d/dz)$. Ces nombres satisfont les relations

$$\theta_3^4 = \theta_2^4 + \theta_4^4, \qquad Q(z^2) = 2^{-1}\bigl(\theta_2(z)^8 + \theta_3(z)^8 + \theta_4(z)^8\bigr),$$

$$\Delta(z^2) = 2^{-8}\bigl(\theta_2(z)\theta_3(z)\theta_4(z)\bigr)^8$$

et

$$\theta_2^4 = 4(D\theta_3/\theta_3 - D\theta_4/\theta_4), \qquad \theta_4^4 = 4(D\theta_2/\theta_2 - D\theta_3/\theta_3),$$

$$P(z^2) = 4\bigl(D\theta_2/\theta_2 + D\theta_3/\theta_3 + D\theta_4/\theta_4\bigr)(z),$$

On notera que les nombres $\theta_i(z)^4$, $(i = 2,3,4)$ sont racines du polynôme $\bigl(X^3 - XQ(z^2)\bigr)^2 - 2^8\Delta(z^2)$.

Les trois premières lignes concernent la courbe elliptique $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, dont l'invariant modulaire est j, tandis que ω_1 est la plus petite période réelle positive, $\tau = \omega_2/\omega_1$ est le quotient de deux périodes fondamentales et enfin η_1, η_2 les quasi-périodes de la fonction ζ de Weierstraß.

LEMNISCATE

$$g_2 = 4, \quad g_3 = 0, \quad j = 1728, \quad \tau = i$$
$$\omega_1 = \frac{\Gamma(1/4)^2}{\sqrt{8\pi}} = 2.6220575542\ldots$$
$$\eta_1 = i\eta_2 = \frac{\pi}{\omega_1}$$

$$P(e^{-2\pi}) = \frac{3}{\pi}$$
$$Q(e^{-2\pi}) = 3\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^4$$
$$R(e^{-2\pi}) = 0$$
$$\Delta(e^{-2\pi}) = \frac{1}{2^6}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{12}$$

$$\theta_2(e^{-\pi}) = \left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{1/2}$$
$$\theta_3(e^{-\pi}) = 2^{1/4}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{1/2}$$
$$\theta_4(e^{-\pi}) = \left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{1/2}$$
$$\frac{D\theta_2}{\theta_2}(e^{-\pi}) = \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{4}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^2$$
$$\frac{D\theta_3}{\theta_3}(e^{-\pi}) = \frac{1}{4\pi}$$
$$\frac{D\theta_4}{\theta_4}(e^{-\pi}) = \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^2$$

ANHARMONIQUE

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 4, \quad j = 0, \quad \tau = \varrho$$
$$\omega_1 = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}\pi} = 2.428650648\ldots$$
$$\eta_1 = \varrho\eta_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{\omega_1}$$

$$P(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$$
$$Q(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = 0$$
$$R(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = \frac{27}{2}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^6$$
$$\Delta(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = -\frac{27}{256}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{12}$$

$$\theta_2(ie^{-\pi\sqrt{3}/2}) = e^{i\pi/8}3^{1/8}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{1/2}$$
$$\theta_3(ie^{-\pi\sqrt{3}/2}) = e^{i\pi/24}3^{1/8}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{1/2}$$
$$\theta_4(ie^{-\pi\sqrt{3}/2}) = e^{-i\pi/24}3^{1/8}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{1/2}$$
$$\frac{D\theta_2}{\theta_2}(ie^{-\pi\sqrt{3}/2}) = \frac{\sqrt{3}}{6\pi} + \frac{1}{4}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^2$$
$$\frac{D\theta_3}{\theta_3}(ie^{-\pi\sqrt{3}/2}) = \frac{\sqrt{3}}{6\pi} + \frac{1}{4}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^2\varrho$$
$$\frac{D\theta_4}{\theta_4}(ie^{-\pi\sqrt{3}/2}) = \frac{\sqrt{3}}{6\pi} + \frac{1}{4}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^2\varrho^2$$

Appendice 2: la courbe de Guy Diaz $e^{2i\pi z}$, $|z| = 1$

Les dessins ci-dessous (tracés par Claude Leclerc, de l'Université de Saint-Etienne) représentent la courbe $e^{2i\pi z}$ quand z décrit le cercle unité. D'après la conjecture des quatre exponentielles, le seul point algébrique sur cette courbe est 1 (correspondant à $z = \pm 1$).

Pour que les petites boucles soient bien visibles, deux zooms ont été nécessaires. Le premier dessin donne l'allure générale de la courbe; le second montre plus précisément ce qui se passe au voisinage de l'intervalle réel $[0,1]$, et le troisième est un agrandissement au voisinage de l'origine.

La courbe de Guy Diaz $e^{2i\pi z}$, $|z| = 1$

Inclure ici le dessin qui a été envoyé

RÉFÉRENCES

[1] M. ABRAMOVITZ and I.A. STEGUN - *Handbook of mathematical functions*, Dover Books on Advanced Mathematics, Dover Publ., 1965; 9th. ed., 1972.

[2] Y. ANDRÉ - *G-fonctions et transcendance*, J. reine angew. Math. **476** (1996), 95–125.

[3] K. BARRÉ - *Mesures de transcendance pour l'invariant modulaire*, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. 1 **323** (1996), 447–452.

[4] K. BARRÉ - *Mesure d'approximation simultanée de q et $J(q)$*, J. Number Theory, à paraître.

[5] K. BARRÉ-SIRIEIX, G. DIAZ, F. GRAMAIN, G. PHILIBERT - *Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin*, Invent. Math. **124** (1996), 1–9.

[6] D. BERTRAND - *Fonctions modulaires, courbes de Tate et indépendance algébrique*, Sém. Delange-Pisot-Poitou (Théorie des Nombres) 19ème année (1977/78), n°36, 11 pp.

[7] D. BERTRAND - *Theta functions and transcendence*, Madras Number Theory Symposium 1996, The Ramanujan J. Math., à paraître.

[8] W.D. BROWNAWELL, D.W. MASSER - *Multiplicity estimates for analytic functions (I)*, J. für reine angew. Math. **314** (1979), 200–216.

[9] K. CHANDRASEKHARAN - *Elliptic functions*, Grund. der math. Wiss. **281** Springer-Verlag 1985.

[10] G.V. CHUDNOVSKY - *Contributions to the theory of transcendental numbers*, Math. Surveys and Monographs N°19, Amer. Math. Soc., 1984, 450 pp.

[11] P. COHEN - *On the coefficients of the transformation polynomials for the elliptic modular function*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **95** (1984), 389–402.

[12] G. DIAZ - *La conjecture des quatre exponentielles et les conjectures de D. Bertrand sur la fonction modulaire*, J. Th. Nombres Bordeaux, à paraître.

[13] E.M. JABBOURI - *Sur un critère pour l'indépendance algébrique de P. Philippon*, Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1990, éd. P. Philippon, W. De Gruyter, 1992, 285–307.

[14] K. MAHLER - *On the coefficients of transformation polynomials for the modular function*, Bull. Austral. Math. Soc. **10** (1974), 197–218.

[15] N.D. NAGAEV - *Division of independent variable and transcendence*, Mat. Zam. **57** (1995), 422–433; Math. Notes **57** (1995), 292–299.

[16] Yu.V. NESTERENKO - *Modular functions and transcendence problems — Un théorème de transcendance sur les fonctions modulaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. 1 **322** (1996), 909–914.

[17] Yu.V. NESTERENKO - *Modular functions and transcendence questions*, Math. Sb., **187** N° 9 (1996), 65–96. Engl. Transl., Sbornik Math., **187** N° 9-10 (1996), 1319–1348.

[18] G. PHILIBERT - *Une mesure d'indépendance algébrique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **38** (1988), 85–103.

[19] G. PHILIBERT - *Un lemme de zéros modulaire*, J. Number Theory, à paraître.

[20] P. PHILIPPON - *Critères pour l'indépendance algébrique*, Inst. Hautes Et. Sci. Publ. Math., **64** (1986), 5–52.

[21] P. PHILIPPON - *Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 355–383, et **115** (1987), 397–398.

[22] P. PHILIPPON - *Indépendance algébrique et K-fonctions*, J. reine angew. Math., à paraître.

[23] P. PHILIPPON - *Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques*, J. Number Theory, à paraître.

[24] P. PHILIPPON - *Mesures d'approximation de valeurs de fonctions analytiques*, soumis.

[25] J-P. SERRE - *Cours d'arithmétique*, Coll. SUP, Presses Univ. France, 1970; trad. angl.: *A course in arithmetic*, Graduate Texts in Math. **7** Springer-Verlag 1973.

[26] M. WALDSCHMIDT - *Sur la nature arithmétique des valeurs de fonctions modulaires*, Sém. Bourbaki 49ème année (1996/97), N° 824; à paraître dans Astérisque.

Michel WALDSCHMIDT
Institut de Mathématiques de Jussieu
Problèmes Diophantiens Case 247
4, place Jussieu
F–75252 PARIS CEDEX 05
e-mail: `miw@math.jussieu.fr`
internet: `http://www.math.jussieu.fr/~miw/`