14 janvier 1995

DENSITÉ DE POINTS RATIONNELS SUR UN GROUPE ALGÉBRIQUE

par Michel Waldschmidt

A Wolfgang Schmidt pour son 60ème anniversaire

Résumé

Partant d'une conjecture de Mazur concernant la topologie des points rationnels sur une variété algébrique, nous étudions la densité des sous-groupes de type fini du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique commutatif sur un corps de nombres. Dans le cas particulier des groupes linéaires, le problème considéré se ramène à une conjecture bien connue sur l'indépendance algébrique de logarithmes linéairement indépendants de nombres algébriques.

Abstract

Starting from a conjecture of Mazur concerning the topology of rational points on an algebraic variety, we consider the density properties of finitely generated subgroups of rational points on a commutative algebraic group over a number field. In the special case of linear algebraic groups, this problem reduces to a well known conjecture on algebraic independence of linearly independent logarithms of algebraic numbers.

§1. Introduction

Dans son article [Mazur 1992] sur la topologie des points rationnels, Mazur propose la conjecture suivante :

Conjecture de Mazur. – *Soit V une variété lisse définie sur $\mathbb{Q}$; on suppose que $V(\mathbb{Q})$ est dense dans V pour la topologie de Zariski ; alors l'adhérence de $V(\mathbb{Q})$ dans $V(\mathbb{R})$ pour la topologie réelle est ouverte (donc est réunion de composantes connexes de $V(\mathbb{R})$).*

Nous discutons ici ce type de problème quand V est un groupe algébrique commutatif ; au lieu de considérer tous les points rationnels, on en considère seulement un sous-groupe de type fini ; accessoirement, on remplace le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels par un corps de nombres K plongé dans $\mathbb{R}$ (ce sera suffisant, comme nous le verrons au paragraphe 5, pour traiter aussi le cas d'un corps de nombres plongé dans $\mathbb{C}$).