EXTRAPOLATION ET ALTERNANTS

par

Michel WALDSCHMIDT

1. Introduction : le théorème de Pólya

Le but de ce texte est de montrer comment extrapoler dans les démonstrations de transcendance utilisant les alternants de Michel Laurent.

Prenons comme exemple le théorème de Pólya : soit f une fonction entière transcendante vérifiant $f(\mathbf{N}) \subset \mathbf{Z}$. On veut minorer

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R}\log|f|_R, \qquad \text{où} \qquad |f|_R = \sup_{|z|=R}|f(z)|.$$

On choisit pour cela deux entiers L_0 et L_1, et on considère l'application $F_L : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^L$, avec $L = L_0L_1$, qui envoie z sur

$$\big(z^{\lambda_0} f(z)^{\lambda_1}\big)_{0\le\lambda_0<L_0,0\le\lambda_1<L_1}.$$

Si l'image de $\mathbf{N}$ par F_L est contenue dans un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^L$ de dimension $< L$, alors il existe des polynômes $P_1,\dots,P_{L_1}$ dans $\mathbf{C}[X]$, non tous nuls, tels que la fonction

$$\Psi(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{L_1} P_{\lambda_1}(z) f(z)^{\lambda_1}$$

s'annule sur tout $\mathbf{N}$; le lemme de Schwarz permet de minorer le type exponentiel de Ψ, donc celui de f, ce qui donne la minoration désirée.

Si $F_L(\mathbf{N})$ n'est pas contenu dans un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^L$ de dimension $< L$, alors il existe des entiers $n_1,\dots,n_L$, avec $0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_L$, tels que le déterminant (défini au signe près, dépendant de l'ordre dans lequel on écrit les couples (λ_0,λ_1))

$$\Delta = \det\left(\binom{n_\mu}{\lambda_0} f(n_\mu)^{\lambda_1}\right)_{\binom{0\le\lambda_0<L_0,0\le\lambda_1<L_1}{1\le\mu\le L}}$$

ne soit pas nul. On choisit le L-uplet $(n_1,\dots,n_L)$ satisfaisant cette propriété et minimal pour l'ordre lexicographique dans $\mathbf{N}^L$. Comme Δ est un entier rationnel non nul, sa valeur absolue est au moins 1. Tout le problème consiste à majorer cette valeur absolue.

On considère la fonction de L variables complexes

$$\Phi(z_1,\dots,z_L) = \det\left(\binom{z_\mu}{\lambda_0} f(z_\mu)^{\lambda_1}\right)_{\binom{0\le\lambda_0<L_0,0\le\lambda_1<L_1}{1\le\mu\le L}},$$

où on a posé

$$\binom{z}{\ell} = \frac{z(z-1)\cdots(z-\ell+1)}{\ell!}$$

pour ℓ entier > 0, et $\binom{z}{0} = 1$. Ainsi $(n_1,\dots,n_L)$ est le plus petit élément pour l'ordre lexicographique de $\mathbf{N}^L$ pour lequel $\Phi(n_1,\dots,n_L)$ n'est pas nul. Numérotons les fonctions

$$\binom{z}{\lambda_0} f(z)^{\lambda_1}, \qquad (0\le\lambda_0<L_0,\ 0\le\lambda_1<L_1)$$

en les écrivant $\{\varphi_1,\dots,\varphi_L\}$, de sorte que

$$\Phi(z_1,\dots,z_L) = \det\Big(\varphi_\lambda(z_\mu)\Big)_{1\le\lambda,\mu\le L}.$$

Les fonctions $\varphi_1,\dots,\varphi_L$ s'annulent toutes en $0,1,\dots,n_1-1$, mais pas en n_1. Pour $n = n_1, n_1+1,\dots,n_2-1$, le vecteur (dans $\mathbf{C}^L$)

$$\big(\varphi_1(n),\dots,\varphi_L(n)\big)$$

appartient à la droite définie par $\big(\varphi_1(n_1),\dots,\varphi_L(n_1)\big)$. Plus généralement, pour $1\le\mu<L$, et pour $n_\mu \le n < n_{\mu+1}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(n_1) & \cdots & \varphi_1(n_\mu) & \varphi_1(n)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \varphi_L(n_1) & \cdots & \varphi_L(n_\mu) & \varphi_L(n)\end{pmatrix}$$

a pour rang μ. Il s'agit, dans ces conditions, de majorer le nombre (non nul) $\Phi(n_1,\dots,n_L)$. C'est l'objet de la section suivante. Dans la troisième section nous complétons la démonstration du théorème de Pólya. Pour terminer, nous donnons un lemme de Schwarz plus général, avec des multiplicités.

2. Un lemme de Schwarz pour des alternants

Commençons par établir le lemme (bien connu) suivant :

Lemme 1.
a) *Soient ζ et z deux nombres complexes et r, ϱ et R trois nombres réels, vérifiant*

$$|z| = r,\quad |\zeta| = \varrho,\qquad r\le R,\quad \varrho\le R \quad\text{et}\quad r\varrho < R^2.$$

Alors

$$\frac{|r-\varrho|}{R^2-r\varrho} \le \left|\frac{z-\zeta}{R^2-z\bar\zeta}\right| \le \frac{r+\varrho}{R^2+r\varrho}$$

b) *Soient $\zeta\in\mathbf{C}$ et $R>0$ avec $|\zeta|\le R$; la fonction $z\longmapsto(z-\zeta)/(R^2-z\bar\zeta)$ est holomorphe dans un ouvert contenant le disque fermé $|z|\le R$, et vérifie*

$$\left|\frac{z-\zeta}{R^2-z\bar\zeta}\right| = \frac{1}{R} \qquad \textit{pour} \quad |z| = R.$$

Démonstration.
a) Si $r=0$ ou $\varrho=0$ le résultat est banal. Sinon on peut écrire

$$\left|\frac{z-\zeta}{R^2-z\bar\zeta}\right|^2=\frac{r^2+\varrho^2-(\bar z\zeta+z\bar\zeta)}{R^4-R^2(\bar z\zeta+z\bar\zeta)+r^2\varrho^2}=f\left(\frac{\bar z\zeta+z\bar\zeta}{r\varrho}\right),$$

où la fonction

$$f(x)=\frac{r^2+\varrho^2-r\varrho x}{R^4-R^2r\varrho x+r^2\varrho^2}$$

est monotone décroissante sur l'intervalle $-2\le x\le 2$: le dénominateur est positif sur cet intervalle, puisque

$$R^4-R^2r\varrho x+r^2\varrho^2\ge(R^2-r\varrho)^2>0,$$

et la décroissance provient de

$$(R^4+r^2\varrho^2)r\varrho-(r^2+\varrho^2)R^2r\varrho=r\varrho(R^2-r^2)(R^2-\varrho^2)\ge 0.$$

On a donc $f(2)\le f(x)\le f(-2)$ pour $-2\le x\le 2$. Mais

$$f(2)=\left(\frac{r-\varrho}{R^2-r\varrho}\right)^2\qquad\text{et}\qquad f(-2)=\left(\frac{r+\varrho}{R^2+r\varrho}\right)^2.$$

b) La deuxième partie du lemme 1 résulte immédiatement de la première si $|\zeta|<R$ (prendre $r=R$ et $\varrho=|\zeta|<R$). Si $|\zeta|=R$, la fonction $z\longmapsto(z-\zeta)/(R^2-z\bar\zeta)$ est constante, égale à $-\zeta/R^2$ (on la prolonge donc implicitement en $z=\zeta$), et la conclusion du lemme 1 est alors évidente. □

Soit L un entier positif. On considère l'anneau $\mathcal{A}_L$ des fonctions entières dans $\mathbf{C}^L$; quand f et g sont deux éléments non nuls de $\mathcal{A}_L$, on dit que g divise f si la fonction f/g appartient encore à $\mathcal{A}_L$; cela revient à dire que f appartient à l'idéal principal de $\mathcal{A}_L$ engendré par g. Par exemple si $\zeta_1,\dots,\zeta_N$ sont des nombres complexes deux-à-deux distincts et $t_1,\dots,t_N$ des entiers positifs, une fonction entière $f(z_1,\dots,z_L)$ est divisible dans $\mathcal{A}_L$ par le polynôme

$$\prod_{\nu=1}^{N}(z_1-\zeta_\nu)^{t_\nu}$$

si et seulement si, pour $1\le\nu\le N$ et $0\le t<t_\nu$, la fonction $(\partial/\partial z_1)^t f(\zeta_\nu,z_2,\dots,z_L)$ est identiquement nulle dans $\mathcal{A}_{L-1}$.

Si P_1 et P_2 sont deux polynômes premiers entre eux dans $\mathbf{C}[X]$, et si $P_1(z_1)$ et $P_2(z_1)$ divisent $f(z_1,\dots,z_L)$ dans $\mathcal{A}_L$, alors le produit $P_1(z_1)P_2(z_1)$ divise aussi $f(z_1,\dots,z_L)$. Si P et Q sont deux polynômes dans $\mathbf{C}[X]$ et si $P(z_1)$ et $Q(z_2)$ divisent $f(z_1,\dots,z_L)$ dans $\mathcal{A}_L$, alors le produit $P(z_1)Q(z_2)$ divise encore $f(z_1,\dots,z_L)$. Si, pour tout $(z_2,\dots,z_L)\in\mathbf{C}^{L-1}$, la fonction $z_1\mapsto f(z_1,z_2,\dots,z_L)$ est divisible par $P(z_1)$ dans $\mathcal{A}_1$, alors $f(z_1,\dots,z_L)$ est divisible par $P(z_1)$ dans $\mathcal{A}_L$.

Proposition 2. *Soient N et L deux entiers positifs avec $N\ge L-1$, $n_0,n_1,\dots,n_L$ des entiers avec $0=n_0\le n_1<\dots<n_L=N$, $\zeta_0,\dots,\zeta_N$ des nombres complexes deux-à-deux distincts, et $R_1,\dots,R_L$, $E_1,\dots,E_L$ des nombres réels positifs. On suppose, pour $1\le\mu\le L$,*

$$R_\mu\ge\max_{0\le i\le n_\mu}|\zeta_i|\qquad\text{et}\qquad\min_{0\le i<n_\mu}\frac{R_\mu^2+|\zeta_i\zeta_{n_\mu}|}{R_\mu(|\zeta_i|+|\zeta_{n_\mu}|)}\ge E_\mu\ge 1.$$

On définit des polynômes $P_1,\dots,P_L$ d'une variable par

$$P_\mu(X)=\prod_{n=n_{\mu-1}}^{n_\mu-1}(X-\zeta_n),\qquad(1\le\mu\le L).$$

Soit Φ une fonction entière dans $\mathbf{C}^L$; on suppose que pour $0\le\nu<\mu\le L$, la fonction

$$\Phi(\zeta_{n_1},\dots,\zeta_{n_\nu},z_{\nu+1},\dots,z_L)$$

est divisible dans $\mathcal{A}_{L-\nu}$ par $P_{\nu+1}(z_\mu)$. Alors

$$\left|\Phi(\zeta_{n_1},\dots,\zeta_{n_L})\right|\le|\Phi|_R\prod_{\mu=1}^{L}E_\mu^{-n_\mu},$$

où

$$|\Phi|_R=\sup\{|\Phi(z_1,\dots,z_L)|;|z_\mu|=R_\mu,(1\le\mu\le L)\}.$$

Démonstration. On utilise l'hypothèse avec $\nu=0$: la fonction $\Phi(z_1,\dots,z_L)$ est divisible dans $\mathcal{A}_L$ par $P_1(z_\mu)$ pour $1\le\mu\le L$, donc par $P_1(z_1)\cdots P_1(z_L)$ (si $n_1=0$, alors $P_1=1$). On définit une fonction Φ_1 entière dans $\mathbf{C}^L$ par

$$\Phi(z_1,\dots,z_L)=\Phi_1(z_1,\dots,z_L)\prod_{\mu=1}^{L}P_1(z_\mu).$$

Montrons, par récurrence sur $\nu\ge 1$, qu'il existe une fonction $\Phi_\nu(z_\nu,z_{\nu+1},\dots,z_L)$ dans $\mathcal{A}_{L-\nu+1}$, telle que

$$\Phi_{\nu-1}(\zeta_{n_{\nu-1}},z_\nu,\dots,z_L)=\Phi_\nu(z_\nu,\dots,z_L)\prod_{\mu=\nu}^{L}P_\nu(z_\mu)$$

pour $2\le\nu\le L$; la formule est encore vraie pour $\nu=1$, avec $\Phi_0=\Phi$, à ceci près que Φ_0 dépend seulement de L variables, tandis que pour $\nu\ge 1$, Φ_ν dépend de $L-\nu+1$ variables ; nous ferons tacitement cet abus de notation dans la suite.

Supposons par récurrence que $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_\nu$ sont déjà connues, avec $\nu < L$ et

$$\Phi_{i-1}(\zeta_{n_{i-1}}, z_i, \ldots, z_L) = \Phi_i(z_i, \ldots, z_L) \prod_{\mu=i}^{L} P_i(z_\mu) \qquad \text{pour} \quad 1 \le i \le \nu.$$

Montrons que pour $\nu+1 \le \mu \le L$, $P_{\nu+1}(z_\mu)$ divise $\Phi_\nu(\zeta_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \ldots, z_L)$. En effet, quand on substitue ζ_{n_j} à z_j pour $i \le j \le \nu$, on trouve, pour $1 \le i \le \nu$,

$$\Phi_{i-1}(\zeta_{n_{i-1}}, \ldots, \zeta_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \ldots, z_L) = \Phi_i(\zeta_{n_i}, \ldots, \zeta_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \ldots, z_L) \prod_{\mu=i}^{\nu} P_i(\zeta_{n_\mu}) \prod_{\mu=\nu+1}^{L} P_i(z_\mu).$$

En combinant ces ν relations on déduit

$$\Phi(\zeta_{n_1}, \ldots, \zeta_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \ldots, z_L) = \Phi_\nu(\zeta_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \ldots, z_L) \prod_{i=1}^{\nu} \left(\prod_{\mu=i}^{\nu} P_i(\zeta_{n_\mu}) \prod_{\mu=\nu+1}^{L} P_i(z_\mu) \right).$$

Le membre de gauche (donc celui de droite aussi) est divisible par $P_{\nu+1}(z_\mu)$ pour $\nu+1 \le \mu \le L$; or d'une part le nombre

$$\prod_{i=1}^{\nu} \prod_{\mu=i}^{\nu} P_i(\zeta_{n_\mu})$$

n'est pas nul, d'autre part $P_{\nu+1}(X)$ est premier avec le polynôme $P_1(X) \cdots P_\nu(X)$. On peut donc définir $\Phi_{\nu+1}$ par

$$\Phi_\nu(\zeta_{n_\nu}, z_{\nu+1}, \ldots, z_L) = \Phi_{\nu+1}(z_{\nu+1}, \ldots, z_L) \prod_{\mu=\nu+1}^{L} P_{\nu+1}(z_\mu).$$

Les fonctions $\Phi_0 = \Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_L$, que l'on vient de construire sont entières et vérifient, pour $1 \le \nu \le L$,

$$\Phi_{\nu-1}(\zeta_{n_{\nu-1}}, z_\nu, \ldots, z_L) = \Phi_\nu(z_\nu, \ldots, z_L) \prod_{\mu=\nu}^{L} \prod_{n=n_{\nu-1}}^{n_\nu - 1} (z_\mu - \zeta_n).$$

On les modifie de la manière suivante : on remplace chacun des facteurs $z_\mu - \zeta_n$ par $R_\mu(z_\mu - \zeta_n)/(R_\mu^2 - z_\mu \bar{\zeta}_n)$; on obtient ainsi des fonctions $\Psi_0 = \Phi, \Psi_1, \ldots, \Psi_L$ qui vérifient

$$\Psi_{\nu-1}(\zeta_{n_{\nu-1}}, z_\nu, \ldots, z_L) = \Psi_\nu(z_\nu, \ldots, z_L) \prod_{\mu=\nu}^{L} \prod_{n=n_{\nu-1}}^{n_\nu - 1} \frac{R_\mu(z_\mu - \zeta_n)}{R_\mu^2 - z_\mu \bar{\zeta}_n};$$

une définition équivalente de Ψ_ν est

$$\Phi(\zeta_{n_1}, \ldots, \zeta_{n_{\nu-1}}, z_\nu, \ldots, z_L) =$$
$$\Psi_\nu(z_\nu, \ldots, z_L) \prod_{i=1}^{\nu-1} \left(\prod_{\mu=i}^{\nu-1} \prod_{n=n_{i-1}}^{n_i - 1} \frac{R_\mu(\zeta_{n_\mu} - \zeta_n)}{R_\mu^2 - \zeta_{n_\mu} \bar{\zeta}_n} \prod_{\mu=\nu}^{L} \prod_{n=n_{i-1}}^{n_i - 1} \frac{R_\mu(z_\mu - \zeta_n)}{R_\mu^2 - z_\mu \bar{\zeta}_n} \right).$$

Comme on a imposé $R_\mu \ge |\zeta_n|$ pour $n_{\nu-1} \le n < n_\nu$ et $\nu \le \mu$, la fonction Ψ_ν est analytique dans un ouvert contenant le polydisque fermé

$$\{(z_\nu, \ldots, z_L) \in \mathbf{C}^{L-\nu+1} ; |z_\mu| \le R_\mu \quad \text{pour} \quad \nu \le \mu \le L\}.$$

On combine les L relations définissant respectivement $\Psi_1, \ldots, \Psi_L$, et on substitue $z_\mu = \zeta_{n_\mu}$, ce qui est licite puisque $R_\mu \ge |\zeta_{n_\mu}|$:

$$\Phi(\zeta_{n_1}, \ldots, \zeta_{n_L}) = \Psi_L(\zeta_{n_L}) \prod_{\nu=1}^{L} \prod_{\mu=\nu}^{L} \prod_{n=n_{\nu-1}}^{n_\nu - 1} \frac{R_\mu(\zeta_{n_\mu} - \zeta_n)}{R_\mu^2 - \zeta_{n_\mu} \bar{\zeta}_n}.$$

Grâce au lemme 1, on déduit de la définition de E_μ :

$$\left| \frac{R_\mu(\zeta_{n_\mu} - \zeta_n)}{R_\mu^2 - \zeta_{n_\mu} \bar{\zeta}_n} \right| \le \frac{R_\mu\big(|\zeta_{n_\mu}| + |\zeta_n|\big)}{R_\mu^2 + |\zeta_{n_\mu} \zeta_n|} \le E_\mu^{-1},$$

avec

$$\prod_{\nu=1}^{L} \prod_{\mu=\nu}^{L} E_\mu^{-(n_\nu - n_{\nu-1})} = \prod_{\mu=1}^{L} E_\mu^{-n_\mu}, \qquad \text{car} \quad \sum_{\nu=1}^{\mu} (n_\nu - n_{\nu-1}) = n_\mu.$$

Donc

$$|\Phi(\zeta_{n_1}, \ldots, \zeta_{n_L})| \le |\Psi_L|_{R_L} \prod_{\mu=1}^{L} E_\mu^{-n_\mu}.$$

D'autre part le lemme 1 donne aussi

$$\left| \frac{R_\mu(z_\mu - \zeta_i)}{R_\mu^2 - z_\mu \bar{\zeta}_i} \right| = 1 \qquad \text{pour} \qquad |z_\mu| = R_\mu \quad \text{et} \quad 0 \le i < n_\mu,$$

donc pour $1 \le \nu \le L$, on a

$$\sup\{|\Psi_\nu(z_\nu, \ldots, z_L)| ; |z_i| = R_i, (\nu \le i \le L)\} \le$$
$$\sup\{|\Psi_{\nu-1}(z_{\nu-1}, \ldots, z_L)| ; |z_i| = R_i, (\nu - 1 \le i \le L)\}.$$

La proposition 2 résulte de ces estimations. ☐

De la proposition 2 on va déduire le corollaire suivant :

Corollaire 3. *Soit $F = (f_1, \dots, f_L)$ une application analytique de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^L$. Soient $\zeta_0, \dots, \zeta_N$ des nombres complexes deux-à-deux distincts, $0 = n_0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_L \le N$ des entiers, $R_1, \dots, R_L$, $E_1, \dots, E_L$ des nombres réels positifs. On suppose, pour $1 \le \mu \le L$,*

$$R_\mu \ge \max_{0 \le i \le n_\mu} |\zeta_i| \qquad \textit{et} \qquad \min_{0 \le i < n_\mu} \frac{R_\mu^2 + |\zeta_i \zeta_{n_\mu}|}{R_\mu(|\zeta_i| + |\zeta_{n_\mu}|)} \ge E_\mu \ge 1.$$

On suppose aussi, pour $0 \le \nu < L$ et $n_\nu \le n < n_{\nu+1}$, que la matrice de format $L \times (\nu + 1)$ suivante :

$$\Big(F(\zeta_{n_1}), \dots, F(\zeta_{n_\nu}), F(\zeta_n) \Big)$$

a un rang $\le \nu$. Alors

$$\left| \det\Big(f_\lambda(\zeta_{n_\mu}) \Big)_{1 \le \lambda, \mu \le L} \right| \le L! \prod_{\mu=1}^{L} E_\mu^{-n_\mu} \max_{1 \le \lambda \le L} |f_\lambda|_{R_\mu}.$$

Démonstration. On utilise la proposition 2 pour la fonction

$$\Phi(z_1, \dots, z_L) = \det\Big(f_\lambda(z_\mu) \Big)_{1 \le \lambda, \mu \le L},$$

pour laquelle on a l'estimation évidente

$$\sup\{|\Phi(z_1, \dots, z_L); |z_\mu| \le R_\mu, (1 \le \mu \le L)\} \le L! \prod_{\mu=1}^{L} \max_{1 \le \lambda \le L} |f_\lambda|_{R_\mu}.$$

L'hypothèse du corollaire 3 assure que pour $0 \le \nu < \mu \le L$ et $n_\nu \le n < n_{\nu+1}$, on a

$$\det\Big(F(\zeta_{n_1}), \dots, F(\zeta_{n_\nu}), F(z_{\nu+1}), \dots, F(z_{\mu-1}), F(\zeta_n), F(z_{\mu+1}), \dots, F(z_L) \Big) = 0.$$

Cela permet de vérifier l'hypothèse de la proposition 2, et le corollaire 3 s'en déduit immédiatement. $\square$

`Remarque.` Si on prend $E_1 = \cdots = E_L = E$, comme on a $0 \le n_1 < \cdots < n_L$, l'exposant $n_1 + \cdots + n_L$ est toujours $\ge L(L-1)/2$. On raffine donc la majoration habituelle de l'alternant (cf. [Lau]), à un petit détail près : E_μ remplace $R_\mu/|\zeta_\mu|$ (ce qui est donc un peu moins bon).

3. Le théorème de Pólya

Nous démontrons l'énoncé suivant :

Théorème 4. *Soit f une fonction entière dans $\mathbf{C}$ vérifiant $f(\mathbf{N}) \subset \mathbf{Z}$ et*

$$\log |f|_R \le R/165 \qquad \textit{pour } R \textit{ suffisamment grand.}$$

Alors f est un polynôme.

La constante $\gamma = 1/165$ apparaît de la manière suivante : il existe un nombre réel $A > 1$ et un nombre entier $B > 1$ tels que

$$\log \frac{A^2 + 1}{2A} > A(B-1)\gamma + \frac{2}{B}\big(1 + \log(1 + AB)\big). \tag{5}$$

(Prendre $A = 13$ et $B = 11$). C'est un problème intéressant d'obtenir par la même méthode la meilleure constante possible $\log 2$ à la place de γ.

Démonstration. Soient γ et A deux nombres réels positifs et B un entier > 1 vérifiant (5). Soit f une fonction entière dans $\mathbf{C}$ satisfaisant $f(\mathbf{N}) \subset \mathbf{Z}$ et telle qu'il existe $C \ge 1$ avec

$$|f|_R \le Ce^{\gamma R} \qquad \text{pour tout } R \ge 0.$$

On choisit un entier L_0 suffisamment grand (il tendra vers l'infini à la fin de la démonstration), on pose $L_1 = B$, $L = L_0 L_1$, on numérote les L fonctions

$$\binom{z}{\lambda_0} f^{\lambda_1}, \qquad (0 \le \lambda_0 < L_0,\ 0 \le \lambda_1 < L_1)$$

en les notant $\varphi_1, \dots, \varphi_L$, et on considère la fonction de L variables complexes

$$\Phi(z_1, \dots, z_L) = \det\Big(\varphi_\lambda(z_\mu) \Big)_{1 \le \lambda, \mu \le L}.$$

Supposons dans un premier temps qu'il existe un point de $\mathbf{N}^L$ où Φ ne s'annule pas ; on choisit $(n_1, \dots, n_L) \in \mathbf{N}^L$, minimal pour l'ordre lexicographique, tel que le nombre

$$\Delta = \Phi(n_1, \dots, n_L)$$

ne soit pas nul. Par hypothèse c'est un entier rationnel, donc $|\Delta| \ge 1$. On utilise le lemme de Schwarz (corollaire 3) pour majorer $|\Delta|$: pour $1 \le \mu \le L$, on pose $R_\mu = An_\mu$, de sorte que

$$\frac{R_\mu^2 + n_\mu^2}{2R_\mu n_\mu} = E, \quad (1 \le \mu \le L), \qquad \text{avec} \quad E = \frac{A^2 + 1}{2A};$$

on trouve

$$|\Delta| \le L! \prod_{\mu=1}^{L} \Big(E^{-n_\mu} \max_{1 \le \lambda \le L} |\varphi_\lambda|_{R_\mu} \Big).$$

On utilise les majorations, pour $1 \le \lambda_0 < L_0$, $0 \le \lambda_1 < B$ et $|z| = R$:

$$\left|\binom{z}{\lambda_0}\right| \le e^{L_0}\left(\frac{R}{L_0}+1\right)^{L_0}$$

et

$$|f^{\lambda_1}|_R \le C^{B-1}e^{\gamma(B-1)R}.$$

On obtient

$$1 \le |\Delta| \le L! e^{LL_0} C^{L(B-1)} \prod_{\mu=1}^{L} E^{-n_\mu}\left(\frac{An_\mu}{L_0}+1\right)^{L_0} e^{\gamma(B-1)An_\mu}.$$

La condition (5) implique que le nombre $D = \log E - \gamma(B-1)A$ est > 0 ; la fonction réelle

$$x \longmapsto e^{-Dx}\left(\frac{Ax}{L_0}+1\right)^{L_0}$$

croît sur l'intervalle $-L_0/A < x \le L_0(A-D)/AD$, et décroît sur l'intervalle $x \ge L_0(A-D)/AD$. On en déduit

$$\prod_{\mu=1}^{L} e^{-Dn_\mu}\left(\frac{An_\mu}{L_0}+1\right)^{L_0} \le \max_{m\ge 0}\prod_{\mu=0}^{L-1} e^{-D(m+\mu)}\left(\frac{A(m+\mu)}{L_0}+1\right)^{L_0},$$

le terme de droite correspondant au cas où $n_1, \ldots, n_L$ sont L entiers consécutifs dont le plus petit est m. On majore $m+\mu$ par $m+L$. La fonction réelle

$$x \longmapsto e^{-Dx}\left(\frac{A(x+L)}{L_0}+1\right)^{L_0}$$

est décroissante sur l'intervalle $x \ge 0$, car

$$\frac{D}{A} \ge \frac{2}{AB}\bigl(1+\log(1+AB)\bigr) > \frac{1}{AB} > \frac{1}{AB+1}.$$

Par conséquent le maximum sur m est atteint en $m = 0$:

$$1 \le L! e^{LL_0} C^{L(B-1)} \prod_{\mu=0}^{L-1} E^{-\mu}(AB+1)^{L_0} e^{\gamma(B-1)A\mu}.$$

Ainsi le cas le plus défavorable est celui où $n_\mu = \mu - 1$ pour $1 \le \mu \le L$; noter cependant que si on disposait d'un lemme de zéros optimal, donnant

$$\det\Bigl(\varphi_\lambda(\mu-1)\Bigr)_{1\le\lambda,\mu\le L} \ne 0,$$

on pourrait remplacer dans (5) le terme $\log\bigl((A^2+1)/2A\bigr)$ par $\log A$ (voir la remarque à la fin du paragraphe 2).

On prend le logarithme de chaque membre et on divise par $L^2 = BL_0L$:

$$0 \le \frac{1}{L}\log L + \frac{1}{B} + \frac{1}{B}\log(AB+1) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{L}\right)\bigl(\gamma(B-1)A - \log E\bigr) + \frac{B-1}{L}\log C.$$

On fait maintenant tendre L_0 vers l'infini (donc L aussi), et on trouve une contradiction avec (5) (c'est ici seulement que l'on utilise pleinement l'hypothèse (5)).

Par conséquent, pour L_0 suffisamment grand, la fonction Φ s'annule identiquement sur $\mathbf{N}^L$: il existe des nombres complexes $a_{\lambda_0\lambda_1}$, $(0 \le \lambda_0 < L_0,\ 0 \le \lambda_1 < L_1)$, non tous nuls, tels que la fonction

$$\Psi(z) = \sum_{\lambda_0=0}^{L_0-1}\sum_{\lambda_1=0}^{L_1-1} a_{\lambda_0\lambda_1}\binom{z}{\lambda_0} f(z)^{\lambda_1}$$

s'annule sur tout $\mathbf{N}$; on va montrer que la fonction Ψ est identiquement nulle ; il en résultera que f est une fonction algébrique ; comme elle est entière, c'est un polynôme.

Nous allons déduire du lemme de Schwarz en une variable (qui n'est autre que le cas particulier $L = 1$ de la proposition 2) l'énoncé suivant : *si une fonction entière Ψ, non identiquement nulle, satisfait $\Psi(\mathbf{N}) = 0$, et si $C_1 > 0$ et $\theta \ge 0$ sont des nombres réels tels que*

$$|\Psi|_R \le C_1 e^{\theta R} \qquad \textit{pour tout} \quad R \ge 0,$$

alors pour tout nombre réel $A \ge 1$ on a

$$\theta > \frac{1}{A}\log\frac{A^2+1}{2A}.$$

Le résultat annoncé s'obtient en prenant $\theta = (B-1)\gamma + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ que l'on fait tendre vers 0.

Pour démontrer cette minoration de θ, on remarque que la fonction Ψ n'est pas constante (elle s'annule sur $\mathbf{N}$ sans être identiquement nulle), donc n'est pas bornée : il existe un entier $r > 0$ tel que $|\Psi|_r > C_1$. On utilise la proposition 2 avec $L = 1$, $R = Ar$, $\zeta_\nu = \nu$, $(0 \le \nu \le r-1)$, $n_1 = r$, et on choisit ζ_{n_1} avec $|\zeta_{n_1}| = r$ et $|\Psi(\zeta_{n_1})| = |\Psi|_r$; on trouve

$$C_1 < |\Psi|_r \le \left(\frac{A^2+1}{2A}\right)^{-r} C_1 e^{\theta Ar},$$

d'où la minoration annoncée pour θ. $\square$

`Remarques.`

1. La fin de l'argument suggère qu'il est possible de raffiner l'estimation : une fonction entière Ψ, non identiquement nulle, satisfaisant $\Psi(\mathbf{N}) = 0$, est de type exponentiel $\ge \pi$, ce qui est mieux que $> \max_{A\ge 1}(1/A)\log\bigl((A^2+1)/2A\bigr)$ (qui vaut $0.19124\ldots$ pour $A = 4.79$).
2. La même méthode permet de démontrer des variantes du théorème 2.1 de [GMW], du Main Theorem p.69 de [R], ainsi que de l'énoncé de Wakabayashi [Wak]. On peut donc maintenant démontrer, avec des alternants et sans lemme de zéros, les théorèmes de Gel'fond-Schneider et des six exponentielles .

4. Lemmes de Schwarz pour des déterminants d'interpolation

Nous étendons la proposition 2 en introduisant des multiplicités ; cela permet, dans le corollaire 3, de remplacer l'alternant $\det\Big(f_\lambda(\zeta_{n_\mu})\Big)_{1\le\lambda,\mu\le L}$ par un déterminant d'interpolation $\det\Big(D^{\sigma_{n_\mu}}f_\lambda(\zeta_{n_\mu})\Big)_{1\le\lambda,\mu\le L}$. On peut ainsi démontrer le critère de Schneider-Lang (voir [La1], [La2], [S1], [S2]) sans utiliser le lemme de Siegel.

Voici donc la généralisation annoncée de la proposition 2.

Proposition 5. *Soient L un entier ≥ 1, Φ une fonction entière dans $\mathbf{C}^L$, et $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_L)$ un élément de $\mathbf{C}^L$. Pour $1\le\nu\le\mu\le L$, soit $P_{\nu\mu}$ un polynôme unitaire (non nul) de $\mathbf{C}[X]$; on écrit le produit $P_\mu=P_{1\mu}\cdots P_{\mu\mu}$ sous la forme*

$$P_\mu(X)=(X-\xi_\mu)^{\sigma_\mu}\prod_{i=1}^{d_\mu}(X-\xi_\mu^{(i)})^{t_\mu^{(i)}},$$

avec $\sigma_\mu\ge 0$, les $d_\mu+1$ nombres complexes $\xi_\mu,\xi_\mu^{(1)},\dots,\xi_\mu^{(d_\mu)}$ sont deux-à-deux distincts, et $t_\mu^{(i)}\ge 1$ pour $1\le i\le d_\mu$. Pour $1\le\mu\le L$, soit R_μ un nombre réel satisfaisant

$$R_\mu>|\xi_\mu| \qquad \text{et} \qquad R_\mu\ge\max\big\{|\xi_\mu^{(i)}|\,;\,1\le i\le d_\mu\big\}.$$

On suppose que pour $1\le\nu\le\mu\le L$ et pour tout $(z_\nu,\dots,z_{\mu-1},z_{\mu+1},\dots,z_L)\in\mathbf{C}^{L-\nu}$, la fonction d'une variable complexe

$$z_\mu\longmapsto(\partial/\partial z_1)^{\sigma_1}\cdots(\partial/\partial z_{\nu-1})^{\sigma_{\nu-1}}\Phi(\xi_1,\dots,\xi_{\nu-1},z_\nu,\dots,z_{\mu-1},z_\mu,z_{\mu+1},\dots,z_L)$$

est divisible par le produit $P_{1\mu}(z_\mu)\cdots P_{\nu\mu}(z_\mu)$. Alors

$$\begin{aligned}&|(\partial/\partial z_1)^{\sigma_1}\cdots(\partial/\partial z_L)^{\sigma_L}\Phi(\xi_1,\dots,\xi_L)|\le\\ &\qquad|\Phi|_R\prod_{\mu=1}^{L}\left(\sigma_\mu!\left(\frac{R_\mu}{R_\mu^2-|\xi_\mu|^2}\right)^{\sigma_\mu}\prod_{i=1}^{d_\mu}\left(\frac{R_\mu\big(|\xi_\mu|+|\xi_\mu^{(i)}|\big)}{R_\mu^2+|\xi_\mu\xi_\mu^{(i)}|}\right)^{t_\mu^{(i)}}\right).\end{aligned}$$

`Remarque.` Comme $(R_\mu-|\xi_\mu|)(R_\mu-|\xi_\mu^{(i)}|)\ge 0$, on peut choisir des nombres réels $E_1,\dots,E_L$ vérifiant

$$1\le E_\mu\le\frac{R_\mu^2+|\xi_\mu\xi_\mu^{(i)}|}{R_\mu\big(|\xi_\mu|+|\xi_\mu^{(i)}|\big)},\qquad(1\le i\le d_\mu).$$

Alors on déduit de la proposition 5 la majoration

$$|(\partial/\partial z_1)^{\sigma_1}\cdots(\partial/\partial z_L)^{\sigma_L}\Phi(\xi)|\le|\Phi|_R\prod_{\mu=1}^{L}\sigma_\mu!\left(\frac{E_\mu R_\mu}{R_\mu^2-|\xi_\mu|^2}\right)^{\sigma_\mu}E_\mu^{-\deg P_\mu}.$$

La proposition 2 correspond au cas particulier où $P_{\nu\mu}$ ne dépend pas de μ, $\sigma_\mu=0$ et P_μ n'a pas de racines multiples : $t_\mu^{(i)}=1$.

Démonstration. Ecrivons

$$P_{\nu\mu}(X)=\prod_{i=0}^{d_{\nu\mu}}(X-\xi_{\nu\mu}^{(i)})^{t_{\nu\mu}^{(i)}},$$

avec $\xi_{\nu\mu}^{(0)}=\xi_\mu$, $t_{\nu\mu}^{(0)}\ge 0$, les nombres complexes $\xi_{\nu\mu}^{(i)}$ $(0\le i\le d_{\nu\mu})$ sont deux-à-deux distincts, et $t_{\nu\mu}^{(i)}\ge 1$ pour $1\le i\le d_{\nu\mu}$. On remplace ces polynômes $P_{\nu\mu}$ par les fractions rationnelles du lemme 1 : pour $1\le\nu\le\mu\le L$, on pose

$$Q_{\nu\mu}(X)=\prod_{i=0}^{d_{\nu\mu}}\left(\frac{R_\mu(X-\xi_{\nu\mu}^{(i)})}{R_\mu^2-X\bar\xi_{\nu\mu}^{(i)}}\right)^{t_{\nu\mu}^{(i)}},$$

et

$$Q_\mu(X)=Q_{1\mu}(X)\cdots Q_{\mu\mu}(X)=\left(\frac{R_\mu(X-\xi_\mu)}{R_\mu^2-X\bar\xi_\mu}\right)^{\sigma_\mu}\prod_{i=1}^{d_\mu}\left(\frac{R_\mu(X-\xi_\mu^{(i)})}{R_\mu^2-X\bar\xi_\mu^{(i)}}\right)^{t_\mu^{(i)}}.$$

Ainsi Q_μ a un zero de multiplicité exactement σ_μ au point ξ_μ ; si $\vartheta_\mu/\sigma_\mu!$ désigne le premier coefficient non nul dans le développement de Taylor de Q_μ au point ξ_μ, on peut écrire

$$\vartheta_\mu=(d/dz)^{\sigma_\mu}Q_\mu(\xi_\mu)=\sigma_\mu!\left(\frac{R_\mu}{R_\mu^2-|\xi_\mu|^2}\right)^{\sigma_\mu}\prod_{i=1}^{d_\mu}\left(\frac{R_\mu(\xi_\mu-\xi_\mu^{(i)})}{R_\mu^2-\xi_\mu\bar\xi_\mu^{(i)}}\right)^{t_\mu^{(i)}}.$$

Noter que le lemme 1 donne :

$$|Q_{\nu\mu}(z)|=1 \qquad \text{pour} \qquad |z|=R_\mu$$

et

$$|\vartheta_\mu|\le\sigma_\mu!\left(\frac{R_\mu}{R_\mu^2-|\xi_\mu|^2}\right)^{\sigma_\mu}\prod_{i=1}^{d_\mu}\left(\frac{R_\mu\big(|\xi_\mu|+|\xi_\mu^{(i)}|\big)}{R_\mu^2+|\xi_\mu\xi_\mu^{(i)}|}\right)^{t_\mu^{(i)}}.$$

Par hypothèse, pour $1\le\nu\le L$, la fonction

$$(\partial/\partial z_1)^{\sigma_1}\cdots(\partial/\partial z_{\nu-1})^{\sigma_{\nu-1}}\Phi(\xi_1,\dots,\xi_{\nu-1},z_\nu,\dots,z_L)$$

est divisible dans $\mathcal{A}_{L-\nu+1}$ par

$$\prod_{\mu=\nu}^{L}\prod_{\kappa=1}^{\nu}P_{\kappa\mu}(z_\mu).$$

On définit alors, pour $1 \le \nu \le L$, une fonction Ψ_ν de $L-\nu+1$ variables, analytique dans un ouvert contenant le polydisque fermé

$$\{(z_\nu, \ldots, z_L) \in \mathbf{C}^{L-\nu+1}\,;\, |z_\mu| \le R_\mu,\ \nu \le \mu \le L\},$$

par la relation

$$(\partial/\partial z_1)^{\sigma_1} \cdots (\partial/\partial z_{\nu-1})^{\sigma_{\nu-1}} \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{\nu-1}, z_\nu, \ldots, z_L) = \Psi_\nu(z_\nu, \ldots, z_L) \prod_{\mu=\nu}^{L} \prod_{\kappa=1}^{\nu} Q_{\kappa\mu}(z_\mu).$$

On pose aussi $\Psi_0 = \Phi$ et $\vartheta_0 = 1$, et on convient, comme d'habitude, qu'un produit vide vaut 1. Le calcul de

$$(\partial/\partial z_1)^{\sigma_1} \cdots (\partial/\partial z_\nu)^{\sigma_\nu} \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_\nu, z_{\nu+1}, \ldots, z_L)$$

donne, d'une part, pour $0 \le \nu < L$:

$$\Psi_{\nu+1}(z_{\nu+1}, \ldots, z_L) \prod_{\mu=\nu+1}^{L} \prod_{\kappa=1}^{\nu+1} Q_{\kappa\mu}(z_\mu) = \vartheta_\nu \Psi_\nu(\xi_\nu, z_{\nu+1}, \ldots, z_L) \prod_{\mu=\nu+1}^{L} \prod_{\kappa=1}^{\nu} Q_{\kappa\mu}(z_\mu),$$

ce qui conduit, après simplification, à la relation

$$\vartheta_\nu \Psi_\nu(\xi_\nu, z_{\nu+1}, \ldots, z_L) = \Psi_{\nu+1}(z_{\nu+1}, \ldots, z_L) \prod_{\mu=\nu+1}^{L} Q_{\nu+1,\mu}(z_\mu),$$

et d'autre part à l'égalité

$$(\partial/\partial z_1)^{\sigma_1} \cdots (\partial/\partial z_L)^{\sigma_L} \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_L) = \vartheta_L \Psi_L(\xi_L).$$

Notons $R_{(\nu)} = (R_\nu, \ldots, R_L) \in \mathbf{R}^{L-\nu+1}$ pour $1 \le \nu \le L$ et $R_{(0)} = (R_1, \ldots, R_L)$. On a

$$|\Psi_{\nu+1}|_{R_{(\nu+1)}} \le |\vartheta_\nu| |\Psi_\nu|_{R_{(\nu)}} \qquad \text{pour} \quad 0 \le \nu < L.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |(\partial/\partial z_1)^{\sigma_1} \cdots (\partial/\partial z_L)^{\sigma_L} \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_L)| &\le |\vartheta_L| |\Psi_L|_{R_{(L)}} \\ &\le |\vartheta_\nu \cdots \vartheta_L| |\Psi_\nu|_{R_{(\nu)}}, \qquad (\nu = L, L-1, \ldots, 0) \\ &\le |\vartheta_1 \cdots \vartheta_L| |\Phi|_R. \end{aligned}$$

La proposition 5 est ainsi démontrée. □

Grâce à la proposition 5, on peut généraliser le corollaire 3 de la manière suivante :

Corollaire 6. *Soient $F = (f_1, \ldots, f_L)$ une application analytique de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^L$, $\zeta_0, \ldots, \zeta_N$ des nombres complexes, $0 = n_0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_L = N$ des entiers rationnels et $R_1, \ldots, R_L$, $E_1, \ldots, E_L$ des nombres réels positifs. Pour $0 \le n \le N$, on pose*

$$\sigma_n = \mathrm{Card}\{i\,;\, 0 \le i < n,\ \zeta_i = \zeta_n\}.$$

On suppose, pour $1 \le \mu \le L$,

$$R_\mu > |\zeta_{n_\mu}|, \qquad R_\mu \ge \max_{0 \le i < n_\mu} |\zeta_i| \qquad \text{et} \qquad \min_{0 \le i < n_\mu} \frac{R_\mu^2 + |\zeta_i \zeta_{n_\mu}|}{R_\mu(|\zeta_{n_\mu}| + |\zeta_i|)} \ge E_\mu \ge 1.$$

On suppose aussi, pour $1 \le \nu \le L$ et $0 \le n < n_\nu$, que la matrice $L \times \nu$:

$$\Big((d/dz)^{\sigma_{n_1}} F(\zeta_{n_1}), \ldots, (d/dz)^{\sigma_{n_{\nu-1}}} F(\zeta_{n_{\nu-1}}), (d/dz)^{\sigma_n} F(\zeta_n)\Big)$$

a un rang $\le \nu - 1$. Alors

$$\left|\det\Big((d/dz)^{\sigma_{n_\mu}} f_\lambda(\zeta_{n_\mu})\Big)_{1 \le \lambda, \mu \le L}\right| \le L! \prod_{\mu=1}^{L} \sigma_{n_\mu}! \left(\frac{E_\mu R_\mu}{R_\mu^2 - |\zeta_{n_\mu}|^2}\right)^{\sigma_{n_\mu}} E_\mu^{-n_\mu} \max_{1 \le \lambda \le L} |f_\lambda|_{R_\mu}.$$

`Remarque.` Pour $1 \le \mu \le L$, soit r_μ un nombre réel vérifiant $r_\mu \ge \max_{0 \le i \le n_\mu} |\zeta_i|$. Alors les hypothèses sur R_μ et E_μ peuvent être remplacées par les suivantes, qui sont plus restrictives, mais aussi plus simples :

$$R_\mu > r_\mu \qquad \text{et} \qquad \frac{R_\mu^2 + r_\mu^2}{2R_\mu r_\mu} \ge E_\mu \ge 1, \qquad (1 \le \mu \le L).$$

Si on impose, de plus, $R_\mu/r_\mu > \sqrt{3}$, on peut majorer $E_\mu R_\mu/(R_\mu^2 - r_\mu^2)$ par $1/r_\mu$; on déduit alors du corollaire la majoration

$$\left|\det\Big((d/dz)^{\sigma_{n_\mu}} f_\lambda(\zeta_{n_\mu})\Big)_{1 \le \lambda, \mu \le L}\right| \le L! \prod_{\mu=1}^{L} \frac{\sigma_{n_\mu}!}{r^{\sigma_{n_\mu}}} \left(\frac{R_\mu^2 + r_\mu^2}{2R_\mu r_\mu}\right)^{-n_\mu} \max_{1 \le \lambda \le L} |f_\lambda|_{R_\mu}.$$

Noter d'autre part que dans le cas très simple $L = 1$, le corollaire 6 donne simplement les inégalités de Cauchy sous la forme

$$\left|\left(\frac{d}{dz}\right)^\sigma f(\zeta)\right| \le \sigma! \left(\frac{R}{R^2 - |\zeta|^2}\right)^\sigma |f|_R.$$

Démonstration. On considère le point $(\xi_1, \ldots, \xi_L) = (\zeta_{n_1}, \ldots, \zeta_{n_L})$, les polynômes

$$P_{\nu\mu}(X) = \prod_{i=n_{\nu-1}}^{n_\nu - 1} (X - \zeta_i), \qquad (1 \le \nu \le \mu \le L)$$

et la fonction

$$\Phi(z_1,\ldots,z_L)=\det\Bigl(F(z_1),\ldots,F(z_L)\Bigr).$$

Comme

$$P_{1\mu}\cdots P_{\nu\mu}=\prod_{i=0}^{n_\nu-1}(X-\zeta_i),\qquad (1\le\nu\le\mu),$$

le polynôme P_μ a pour degré n_μ. L'hypothèse du corollaire 6 assure que pour $1\le\nu\le\mu\le L$, la fonction de $L-\nu+1$ variables

$$(\partial/\partial z_1)^{\sigma_{n_1}}\cdots(\partial/\partial z_{\nu-1})^{\sigma_{n_{\nu-1}}}\Phi(\zeta_{n_1},\ldots,\zeta_{n_{\nu-1}},z_\nu,\ldots,z_L)$$

est divisible par

$$\prod_{\mu=\nu}^{L}\prod_{\kappa=1}^{\nu}P_{\kappa\mu}(z_\mu)=\prod_{\mu=\nu}^{L}\prod_{i=0}^{n_\nu-1}(z_\mu-\zeta_i).$$

Cela permet d'appliquer la proposition 5 (avec σ_μ remplacé par σ_{n_μ}). Enfin on majore (comme dans la démonstration du corollaire 3) $|\Phi|_R$ par

$$|\Phi|_R\le L!\prod_{\mu=1}^{L}\max_{1\le\lambda\le L}|f_\lambda|_{R_\mu}.$$

$\square$

Références

[GMW] Gramain, F., Mignotte, M., et Waldschmidt, M. – Valeurs algébriques de fonctions analytiques ; Acta Arith., **47** (1986), 97–121.

[La1] S. Lang. – *Introduction to Transcendental Numbers ;* Addison-Wesley, 1966.

[La2] S. Lang. – *Algebra ;* Addison–Wesley, 3rd Ed., 1993.

[Lau] Laurent, M. – Sur quelques résultats récents de transcendance ; Journées Arithmétiques Luminy 1989, Astérisque, **198–200** (1991), 209–230.

[P] Pólya, G. – Über ganzwertige ganze Funktionen ; Palermo Rend., **40** (1915), 1–16 ; Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, (1920), 1–10.

[R] Ramachandra, K. – Contributions to the theory of transcendental numbers ; Acta Arith., **14** (1968), 65–88.

[S1] Th. Schneider. – Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise ; Math. Ann., **121** (1949), 131–140.

[S2] Th. Schneider. – *Einführung in die transzendenten Zahlen ;* Springer Verlag, 1957 ; trad. franç., *Introduction aux Nombres Transcendants,* Paris, Gauthier-Villars.

[Wak] Wakabayashi, I. – Algebraic values of functions on the unit disk ; Proc. Prospects of Math. Sci., World Sci. Pub., (1988), 235–266.

[Wal] Waldschmidt, M. – Pólya's theorem by Schneider's method ; Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **31** (1978), 21–25.

Michel Waldschmidt, Université P. et M. Curie (Paris VI), Mathématiques, T. 45-46, 5ème Et., B.P. 172
4, Place Jussieu F – 75252 PARIS CEDEX 05 (miw@ccr.jussieu.fr)

Compilé le 25 Août 1997 à 15h18.