УДК 511.364

О приближении алгебраическими числами значений экспоненциальной функции и логарифма

М. Вальдшмидт, Ю. В. Нестеренко

С помощью метода интерполяционных детерминантов доказывается общая теорема о совместных приближениях чисел $\theta \in \mathbb{C}$ и e^{θ}, $\theta \neq 0$, алгебраическими числами. В частности, получаются оценки меры аппроксимации значений логарифма и экспоненциальной функции в алгебраических точках. Используемый метод позволяет получить сравнительно небольшие константы в оценках.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

В соответствии с теоремой Линдемана для любого ненулевого числа θ оба числа θ и e^{θ} не могут быть алгебраическими, т.е. для любых алгебраических чисел α и β выражение $|e^{\theta} - \alpha| + |\theta - \beta|$ отлично от нуля. Сколь маленьким может быть это выражение? Ответ, очевидно, должен зависеть от следующих трех параметров: высот $h(\alpha)$, $h(\beta)$ алгебраических чисел и степени числового поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$. Мы обозначаем символом $h(\alpha)$ *абсолютную логарифмическую высоту Вейля* числа α: если $P(x) = a_0x^d + \cdots + a_d \in \mathbb{Z}[x]$ есть минимальный многочлен α и комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ — его корни, т.е.

$$a_0x^d + \cdots + a_d = a_0(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_d),$$

то абсолютная логарифмическая высота Вейля $h(\alpha)$ числа α определяется равенством

$$h(\alpha) = \frac{1}{d}\left(\log|a_0| + \sum_{i=1}^{d} \log\max\{1, |\alpha_i|\}\right).$$

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант MHS000.

Величина

$$L(\alpha) = L(P) = \sum_{i=0}^{d} |a_i|$$

называется *длиной числа* α и *длиной многочлена* P. Аналогично определяется длина произвольного многочлена, зависящего, вообще говоря, от многих переменных. Можно доказать, что

$$h(\alpha) \leqslant d^{-1} \cdot \log L(\alpha)$$

(см. [10, лемма 8.2]).

В следующей теореме удобнее иметь параметр E, который будет выбираться в каждом отдельном случае.

Теорема 1 (основная теорема). *Пусть* $\theta \in \mathbb{C}$, $\theta \neq 0$, *и* α, β — *алгебраические числа; обозначим* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ *и* $D = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. *Пусть* A, B *и* E — *положительные действительные числа,* $E \geqslant e$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\log A \geqslant \max\bigl(h(\alpha), D^{-1}\bigr), \quad \log B \geqslant h(\beta).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |e^{\theta} - \alpha| + |\theta - \beta| \geqslant \exp\Bigl(&-211 D\bigl(\log B + \log\log A + 4\log D \\ &+ 2\log(E|\theta|_+) + 10\bigr) \cdot \bigl(D\log A + 2E|\theta| + 6\log E\bigr) \\ &\times \bigl(3.3 D\log(D+2) + \log E\bigr) \cdot (\log E)^{-2}\Bigr), \end{aligned}$$

где $|\theta|_+ = \max(1, |\theta|)$.

Из неравенства основной теоремы мы выведем оценки меры трансцендентности некоторых чисел: π, $\log 2$, e и более общо $\log\alpha$ и e^{β} (для алгебраических чисел α и β, $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 0$). Мера трансцендентности комплексного числа θ есть функция двух переменных L и d равная нижней грани множества величин $|P(\theta)|$, где $P \in \mathbb{Z}[x]$ — ненулевые многочлены степени не выше d и длины не больше L. Для вывода оценок меры трансцендентности нам необходимо следующее утверждение, связывающее меру трансцендентности числа и меру его приближения алгебраическими числами.

Лемма 1. *Пусть* $\theta \in \mathbb{C}$. *Предположим, что для любого алгебраического числа* ξ *выполняется неравенство*

$$|\theta - \xi| \geqslant e^{-d\varphi(d,L)},$$

где $\varphi(x,y)$ — *неубывающая функция каждого из своих аргументов* $d = \deg \xi$ *и* $L = L(\xi)$. *Тогда для любого ненулевого полинома* $P \in \mathbb{Z}[x]$ *имеет место оценка*

$$|P(\theta)| \geqslant e^{-N\varphi(N,2^N M)} \cdot \bigl(4M\sqrt{N}\bigr)^{-N},$$

где $N = \deg P$ *и* $M = L(P)$.

Доказательство. См., например, [10, лемма 3.7].

Теорема 2. 1) *Пусть* ξ — *действительное алгебраическое число,* $d = \deg \xi$, $L(\xi) \leqslant L$, $L \geqslant 3$. *Тогда*

$$|\pi - \xi| \geqslant \exp\bigl\{-1.25 \cdot 10^6 d \cdot (\log L + d \log d) \cdot (1 + \log d)\bigr\}.$$

2) *Если* $P \in \mathbb{Z}[x]$, $P \neq 0$, $\deg P \leqslant d$, $L(P) \leqslant L$ *и* $L \geqslant 3$, *то*

$$\bigl|P(\pi)\bigr| \geqslant \exp\bigl\{-2.1 \cdot 10^6 d \cdot (\log L + d \log d) \cdot (1 + \log d)\bigr\}.$$

Для доказательства первого утверждения выберем $\theta = \pi i$, $\alpha = -1$, $\beta = i\xi$, $E = e^2$, $\log A = D^{-1}$, $\log B = h(\xi) = h(\beta)$ и заметим, что $D \leqslant 2d$. Так как

$$\begin{gathered} 6.6d \log(2d+2) + \log E < 11.2d(1 + \log d), \\ d\bigl(h(\xi) + 3\log(2d) + 2\log \pi + 14\bigr) \leqslant 17.73(\log L + d \log d), \\ 1 + 2E|\theta| + 6 \log E \leqslant 59.5, \end{gathered}$$

мы получаем первое утверждение.

Второе утверждение следует из первого с помощью леммы 1.

Таким же способом доказывается и

Теорема 3. 1) *Пусть* ξ — *действительное алгебраическое число с* $d = \deg \xi$, $L(\xi) \leqslant L$ *и* $L \geqslant 3$. *Тогда*

$$|\log 2 - \xi| \geqslant \exp\bigl\{-1.5 \cdot 10^5 \cdot d^2 \cdot (\log L + d \log d) \cdot (1 + \log d)^{-1}\bigr\}.$$

2) *Если* $P \in \mathbb{Z}[x]$, $P \neq 0$, $\deg P \leqslant d$, $L(P) \leqslant L$, *и* $L \geqslant 3$, *то*

$$\bigl|P(\log 2)\bigr| \geqslant \exp\bigl\{-2.5 \cdot 10^5 d^2 \cdot (\log L + d \log d) \cdot (1 + \log d)^{-1}\bigr\}.$$

Для доказательства первого утверждения выберем $\theta = \log 2$, $\alpha = 2$, $\beta = \xi$, $E = eD$, $A = e$, $\log B = h(\beta)$. В этом случае $D = d$. Имеем неравенства

$$\begin{gathered} d\bigl(h(\xi) + 6\log d + 12\bigr) \leqslant 13.5(\log L + d\log d), \\ 3.3d\log(d+2) + \log(ed) < 4.63d(1+\log d), \\ d + 2E|\theta| + 6\log E \leqslant 10.8d. \end{gathered}$$

Из них следует справедливость первого неравенства теоремы 3. Второе неравенство выводится из первого с помощью леммы 1.

Теорема 4. 1) *Пусть ξ — действительное алгебраическое число с $d = \deg\xi$, $L(\xi) \leqslant L$, $L \geqslant 3$. Тогда*

$$|e - \xi| \geqslant \exp\bigl\{-76000 \cdot d^2 \cdot (\log L + d)\bigr\}.$$

2) *Если $P \in \mathbb{Z}[x]$, $P \neq 0$, $\deg P \leqslant d$, $L(P) \leqslant L$ и $L \geqslant 3$, то*

$$\bigl|P(e)\bigr| \geqslant \exp\bigl\{-1.3 \cdot 10^5 \cdot d^2 \cdot (\log L + d)\bigr\}.$$

Для доказательства этой теоремы положим $\theta = 1$, $\alpha = \xi$, $\beta = 1$, $\log A = 1 + d^{-1}\log L$, $B = 1$, $E = ed\log A$, $D = d$. Требуемые оценки следуют из неравенств

$$\begin{gathered} 3\log\log A + 6\log d + 12 \leqslant 9(1 + \log D + \log\log A) = 9\log E, \\ 3.3d\log(d+2) + \log E \leqslant \tfrac{10}{3} d\log E, \\ d\log A + 2E|\theta| + 6\log E \leqslant 12(d + \log L). \end{gathered}$$

Полагая $\theta = \beta$ или $\theta = \log\alpha$ при каком-либо определении логарифма α мы сможем доказать нижние оценки для $|e^\beta - \alpha|$ и $|\log\alpha - \beta|$.

Теорема 5. *Пусть α и β — алгебраические числа, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ и $D = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$. Пусть также A и E — положительные действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $E \geqslant e$ и*

$$\log A \geqslant \max\bigl(h(\alpha), D^{-1}\log E, D^{-1}|\beta|E\bigr).$$

1) *Если $\beta \neq 0$, то*

$$\begin{aligned} |e^\beta - \alpha| \geqslant \exp\Bigl(&-105500 \cdot D^2 \log A \cdot \bigl(h(\beta) + \log_+\log A + \log D + \log E\bigr) \\ &\times \bigl(D\log D + \log E\bigr) \cdot (\log E)^{-2}\Bigr), \end{aligned}$$

где $\log_+ x = \log\max(1,x)$.

2) *Если* $\alpha \neq 0$, *и если* $\log\alpha$ *— любая ненулевая ветвь логарифма* α, *то*

$$\begin{aligned}
&|\beta - \log\alpha| \\
&\quad \geqslant \exp\Bigl(-105500 \cdot D^2 \log A \cdot \bigl(h(\beta) + \log_+ \log A + \log D + \log E\bigr) \\
&\qquad\qquad \times \bigl(D\log D + \log E\bigr) \cdot (\log E)^{-2}\Bigr).
\end{aligned}$$

Доказательство. 1) Для доказательства первого утверждения положим $\theta = \beta$, $\log B = h(\beta)$ и воспользуемся неравенствами

$$\begin{gathered}
h(\beta) + \log\log A + 4\log D + 2\log(E|\beta|_+) + 10 \leqslant 12\bigl(h(\beta) + \log_+ \log A \\
\qquad\qquad\qquad + \log D + \log E\bigr), \\
D\log A + 2E|\beta| + 6\log E \leqslant 9D\log A
\end{gathered}$$

и

$$9 \cdot 12\bigl(3.3D\log(D+2) + \log E\bigr) \leqslant 500(D\log D + \log E).$$

2) Доказательство второго утверждения аналогично: нужно выбрать $\theta = \log\alpha$ и воспользоваться неравенством $|\theta| \leqslant |\beta| + |\beta - \theta|$.

Теорема 6. 1) *Пусть* β *— алгебраическое число,* $\beta \neq 0$. *Тогда существует постоянная* γ_1, *зависящая только от* β, *такая, что если* $P \in \mathbb{Z}[x]$, $P \not\equiv 0$, $\deg P \leqslant d$, $L(P) \leqslant L$, *то*

$$\bigl|P(e^\beta)\bigr| \geqslant \exp\bigl\{-\gamma_1 d^2 \cdot (\log L + d)\bigr\}.$$

2) *Пусть* α *— алгебраическое число,* $\alpha \neq 0, 1$. *Тогда существует постоянная* $\gamma_2 > 0$,*зависящая только от* α *и выбранной ветви логарифма* α *такая, что для любого многочлена* $P \in \mathbb{Z}[x]$, $P \not\equiv 0$, $\deg P \leqslant d$, $L(P) \leqslant L$, *выполняется неравенство*

$$\bigl|P(\log\alpha)\bigr| \geqslant \exp\bigl\{-\gamma_2 d^2 \cdot (\log L + d\log d) \cdot (1 + \log d)^{-1}\bigr\}.$$

Теорема 6 следует из теоремы 5 с помощью леммы 1. В обоих случаях можно взять $\log A = 1 + d_\alpha^{-1}\log L(\alpha)$, $\log B = h(\beta)$, $E = cD\log A$, где $d_\alpha = \deg\alpha$, $D = \deg\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$, $c = \min(e, |\beta|^{-1})$. Заметим, что в доказательстве второго утверждения используется тот факт, что величина $|\beta|$ ограничена некоторой постоянной, зависящей только от $\log\alpha$.

Имеется множество результатов, подобных нашим теоремам 2–6. Первая оценка меры трансцендентности числа e была получена в 1899 г. Борелем [14]. Ранние результаты в этом направлении, включая работы Попкена (1929) и Малера (1932), описаны в обзоре [12]. Отметим здесь только, что без точного вычисления постоянных в оценках теорема 2 впервые была доказана Н. И. Фельдманом [3], [4], а теорема 6 в 1974 г. Цайсовым [15]. Наилучшие в настоящее время оценки меры аппроксимации и меры трансцендентности числа π принадлежат Н. И. Фельдману [11]. Они имеют при достаточно больших d такой же вид, как и оценки теоремы 2, но с константами 388.99 и 389 вместо $1.25 \cdot 10^6$ и $2.1 \cdot 10^6$ соответственно. Основная теорема работы [16] устанавливает нижнюю оценку для $|e^\beta - \alpha|$; там утверждается, что либо имеет место оценка нашей теоремы 5 с константой 105500, замененной на 10^{11}, или

$$|e^\beta - \alpha| \geqslant e^{-10^{11} dDh(\beta)} \quad \text{с} \quad d = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}].$$

Дальнейшие ссылки имеются в [21] и [16], так же как и в работах Н. И. Фельдмана, приведенных в списке литературы.

Для доказательства основной теоремы мы используем метод интерполяционных детерминантов М. Лорана, позволяющий нам обойтись без конструкции вспомогательной функции и экстраполяции и дающий хорошие константы в нижних оценках. Статья организована следующим образом: в § 2 мы доказываем вариант оценки числа нулей из работы [20]; § 3 посвящен аналитической оценке интерполяционного детерминанта М. Лорана. Важную роль в нашем доказательстве играют биномиальные полиномы, свойства которых обсуждаются в § 4. Затем в § 5, мы приводим арифметическую оценку снизу для ненулевого алгебраического числа (неравенство Лиувилля). Доказательство основной теоремы завершается в § 6.

§ 2. Оценка числа нулей

Доказательство теоремы Эрмита–Линдемана использует комплексные аналитические функции z и $e^{\beta z}$; для $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, производная $\frac{d}{dz}F$ функции

$$F(z) = P(z, e^{\beta z})$$

есть многочлен от z и $e^{\beta z}$, который мы будем обозначать δP:

$$\tfrac{d}{dz} P(z, e^{\beta z}) = \delta P(z, e^{\beta z}).$$

Ясно, что δ есть оператор дифференцирования $\frac{\partial}{\partial X} + \beta Y \frac{\partial}{\partial Y}$. Следовательно, можно определить δ на кольце $\mathbb{K}[X, Y]$ равенством

$$\delta = \tfrac{\partial}{\partial X} + \beta Y \tfrac{\partial}{\partial Y},$$

где $\mathbb{K}$ есть любое поле, содержащее β. В этой статье мы работаем в поле $\mathbb{K}$ нулевой характеристики.

Следующее утверждение есть необходимая нам оценка числа нулей многочлена.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbb{K}$ *— поле нулевой характеристики,* β *- ненулевой элемент* $\mathbb{K}$, *и пусть* D_0, D_1, S *и* M *— положительные целые числа, удовлетворяющие неравенству*

$$SM > (D_0 + M)(D_1 + 1). \tag{2.1}$$

Пусть $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_M, \eta_M)$ *— элементы* $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ *с попарно различными* $\xi_1, \ldots, \xi_M$. *Тогда не существует ненулевого многочлена* $P \in \mathbb{K}[X, Y]$, *степени* $\leqslant D_0$ *по* X *и степени* $\leqslant D_1$ *по* Y, *удовлетворяющего равенствам*

$$\delta^\sigma P(\xi_\mu, \eta_\mu) = 0 \quad \textit{для} \quad 1 \leqslant \mu \leqslant M \ \textit{и}\ 0 \leqslant \sigma < S. \tag{2.2}$$

Доказательство этого утверждения по существу такое же, как и оценка числа нулей в работе [20]: мы исключаем Y используя $D_1 + 1$ производную многочлена P, и получаем в результате многочлен от переменной X, обращающийся в нуль в точках ξ_j с кратностью, не меньшей $S - D_1$ (см. также лемму 2 [17, гл. 7]).

Доказательство. Предположим, что многочлен P удовлетворяет всем условиям леммы, равенствам (2.2) и $P \neq 0$. Предположим, не уменьшая общности, что многочлен P не делится на Y и степень P по переменной Y не меньше 1. Определим числа $k_0 = 0 < k_1 < \cdots < k_n \leqslant D_1$ условиями

$$P(X, Y) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(X) Y^{k_i},$$
$$Q_i(X) = b_i X^{m_i} + \cdots \in \mathbb{K}[X], \quad b_i \neq 0, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Рассмотрим для $0 \leqslant \sigma \leqslant n$, многочлены

$$\delta^\sigma P(X, Y) = \sum_{i=0}^{n} Q_{\sigma i}(X) \cdot Y^{k_i}, \tag{2.3}$$

где

$$Q_{\sigma i}(X) = \sum_{j=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{j} Q_i^{(\sigma - j)}(X)(\beta k_i)^j = b_i (\beta k_i)^\sigma \cdot X^{m_i} + \cdots .$$

Из этого представления следует, что определитель

$$\Delta(X) = \det\bigl(Q_{\sigma i}(X)\bigr)_{0\leqslant i,\sigma\leqslant n} = \det\bigl(b_i(\beta k_i)^\sigma \cdot X^{m_i} + \cdots\bigr)_{0\leqslant i,\sigma\leqslant n}$$
$$= b_0\cdots b_n \beta^{n(n+1)/2}\cdot B\cdot X^{m_0+\cdots+m_n} + \cdots ,$$

где B — определитель Вандермонда, построенный для чисел $k_0,\ldots,k_n$, следовательно $B\neq 0$. Таким образом, и $\Delta(X)\neq 0$. Теперь из (2.3) находим

$$\Delta(X) = \sum_{\sigma=0}^{n} \Delta_\sigma(X,Y)\cdot \delta^\sigma P(X,Y), \quad \Delta_\sigma(X,Y)\in \mathbb{K}[X,Y],$$

и для любого $\tau\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant\tau<S-n$, с некоторыми $c_{\tau,j,\sigma}\in\mathbb{K}$,

$$\Delta^{(\tau)}(\xi_j) = \sum_{\sigma=0}^{n+\tau} c_{\tau,j,\sigma}\cdot\delta^\sigma P(\xi_j,\eta_j) = 0, \quad j=1,\ldots,M.$$

Так как $n\leqslant D_1$ и $\deg\Delta(X) = m_0+\cdots+m_n \leqslant (n+1)D_0 \leqslant D_0(D_1+1)$, получаем неравенства

$$(S-n)M \leqslant \deg\Delta(X)\leqslant D_0(D_1+1),$$

и $SM\leqslant D_0(D_1+1)+nM\leqslant (D_0+M)(D_1+1)$. Это противоречит условию (2.1) и завершает доказательство леммы 2.

§ 3. Аналитическая оценка сверху

Мы докажем здесь верхнюю оценку для абсолютной величины некоторого интерполяционного детерминанта; эта оценка есть вариант одного результата М. Лорана (см. [18] и [19]).

Лемма 3. *Пусть L — положительное целое, E, M, S и ε — положительные действительные числа,*

$$0<\varepsilon<E^{-L}.$$

Для $1\leqslant\lambda\leqslant L$, пусть $b_{\lambda 1},\ldots,b_{\lambda L}$ — комплексные числа, $\varphi_\lambda(z)$ — целые комплексные функции одного переменного; далее, для $1\leqslant\mu\leqslant L$, пусть ζ_μ — комплексные числа и σ_μ — неотрицательные целые, $0\leqslant\sigma_\mu\leqslant S$. Предположим, что для $1\leqslant\lambda\leqslant L$ и $1\leqslant\mu\leqslant L$ справедливы оценки

$$\log|b_{\lambda\mu}|\leqslant M, \quad \log\max_{|z|\leqslant E}\bigl|\varphi_\lambda^{(\sigma_\mu)}(z\zeta_\mu)\bigr|\leqslant M.$$

Тогда определитель

$$\mathscr{D} = \det\bigl\|\varphi_\lambda^{(\sigma_\mu)}(\zeta_\mu)+\varepsilon b_{\lambda\mu}\bigr\|_{1\leqslant\lambda,\mu\leqslant L}$$

удовлетворяет неравенству

$$L^{-1}\cdot\log|\mathscr{D}| \leqslant -\frac{L}{2}\cdot\log E + M + S\log E + \log(2LE).$$

Доказательство. Определим

$$a_{\lambda\mu}(z)=\varphi_\lambda^{(\sigma_\mu)}(z\zeta_\mu)$$

и

$$\mathscr{D}(z)=\det\bigl\|a_{\lambda\mu}(z)+\varepsilon b_{\lambda\mu}\bigr\|_{1\leqslant\lambda,\mu\leqslant L}.$$

Тогда

$$\mathscr{D}(z)=\sum_{I\subset\{1,\dots,L\}}\varepsilon^{L-|I|}\cdot\mathscr{D}_I(z),\tag{3.1}$$

где

$$\mathscr{D}_I(z)=\det\bigl\|c_{\lambda\mu}(z)\bigr\|,\quad c_{\lambda\mu}(z)=\begin{cases}a_{\lambda\mu}(z), & \text{если } \lambda\in I,\\ b_{\lambda\mu}, & \text{если } \lambda\notin I.\end{cases}$$

Мы утверждаем, что функция одного переменного $\mathscr{D}_I(z)$ имеет в начале координат нуль кратности

$$\geqslant\frac{|I|\cdot(|I|-1)}{2}-SL.$$

Определитель $\mathscr{D}_I(z)$ есть линейная комбинация с постоянными коэффициентами определителей $\mathscr{D}_{I,J}(z)=\det\|a_{\lambda\mu}(z)\|_{\lambda\in I,\mu\in J}$, где J пробегает все подмножества $\{1,\dots,L\}$ с условием $|J|=|I|$. Для доказательства нашего утверждения о кратности нуля достаточно установить неравенство

$$\operatorname{ord}\mathscr{D}_{I,J}(z)\geqslant\frac{|I|\cdot(|I|-1)}{2}-SL.$$

В силу линейности доказательство последнего неравенства сводится к специальному случаю $\varphi_\lambda(z)=z^{n_\lambda}$ для некоторых $n_\lambda\in\mathbb{N}$, $\lambda\in I$. В этом специальном случае

$$\mathscr{D}_{I,J}(z)=\det\left(\binom{n_\lambda}{\sigma_\mu}\cdot\sigma_\mu!\cdot(z\zeta_\mu)^{n_\lambda-\sigma_\mu}\right)_{\lambda\in I,\mu\in J}$$
$$=z^{\sum_{\lambda\in I}n_\lambda-\sum_{\mu\in J}\sigma_\mu}\cdot\det\left(\binom{n_\lambda}{\sigma_\mu}\cdot\sigma_\mu!\cdot\zeta_\mu^{n_\lambda-\sigma_\mu}\right)_{\lambda\in I,\mu\in J},$$

где биномиальный коэффициент $\binom{n_\lambda}{\sigma_\mu}$ означает 0 если $\sigma_\mu>n_\lambda$. Если правая часть последнего равенства отлична от тождественного нуля, то числа n_λ, $\lambda\in I$, попарно различны, и тогда правая часть имеет нуль в начале координат кратности

$$\geqslant\frac{|I|\cdot(|I|-1)}{2}-\sum_{\mu\in J}\sigma_\mu\geqslant\frac{|I|\cdot(|I|-1)}{2}-SL.$$

Наше утверждение о кратности нуля $\mathscr{D}_I(z)$ теперь легко следует.

С помощью леммы Шварца находим

$$\begin{aligned}\log|\mathscr{D}_I(1)| &\leqslant -\left(\frac{|I|\cdot(|I|-1)}{2}-SL\right)\log E+\log\max_{z\leqslant E}\bigl|\mathscr{D}_I(z)\bigr|\\ &\leqslant -\left(\frac{|I|\cdot(|I|-1)}{2}-SL\right)\log E+L\log L\\ &\quad+M|I|+M(L-|I|)\\ &\leqslant -\frac{|I|^2}{2}\cdot\log E+\frac{|I|}{2}\log E+ML+L\log L+SL\cdot\log E.\end{aligned}$$

Теперь из (3.1) получаем

$$\begin{aligned}\log|\mathscr{D}| &= \log|\mathscr{D}(1)|\\ &\leqslant L\log 2-L^2\log E+ML+L\log L+SL\cdot\log E\\ &\quad+\max_{I\subset\{1,\dots,L\}}\left(-\frac{|I|^2}{2}\cdot\log E+\bigl(L+\tfrac12\bigr)(\log E)\cdot|I|\right).\end{aligned}$$

Многочлен

$$-\frac{\log E}{2}\cdot t^2+\bigl(L+\tfrac12\bigr)(\log E)\cdot t$$

есть возрастающая функция на интервале $1\leqslant t\leqslant L$. Поэтому

$$\begin{aligned}L^{-1}\cdot\log|\mathscr{D}| &\leqslant -\frac{L}{2}\log E+\bigl(L+\tfrac12\bigr)\log E+\log(2L)\\ &\quad-L\log E+M+S\log E\\ &< -\frac{L}{2}\log E+M+S\log E+\log(2LE).\end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы 3.

§ 4. Биномиальные многочлены

Для ненулевых целых N, H и комплексного числа z определим $\Delta(z,0,H)=1$ и

$$\Delta(z,N,H)=\left(\frac{z(z+1)\cdots(z+H-1)}{H!}\right)^q\cdot\frac{z(z+1)\cdots(z+r-1)}{r!},\tag{4.1}$$

где

$$N=qH+r,\quad 1\leqslant r\leqslant H.$$

Для неотрицательного целого u мы будем писать $\Delta^{(u)}(z,N,H)$ для обозначения производной $(d/dz)^u\Delta(z,N,H)$.

Впервые идея исключения факториальных множителей из производных вспомогательной функции с помощью таких многочленов была использована (в случае $H = N$) в 1960 г. Н. И. Фельдманом (см. [4], [5]), и это позволило ему существенно усилить оценки меры трансцендентности числа π и логарифмов алгебраических чисел. Позже [8] это дало ему возможность доказать неулучшаемую в зависимости от высоты коэффициентов $\beta_i \in \mathbb{A}$ оценку снизу для абсолютной величины линейной формы $L = \beta_0 + \beta_1 \log\alpha_1 + \cdots + \beta_n \log\alpha_n$ от логарифмов алгебраических чисел α_i; между прочим, такая оценка имела следствием впервые полученное эффективное степенное усиление теоремы Лиувилля. Полиномы такого рода в случае $r = H$ и $H < N$ впервые были использованы в теории трансцендентных чисел А. Бейкером [13], который усилил таким способом зависимость нижней оценки линейной формы L от высот чисел α_i. Полиномы (4.1) впервые были введены в работе [1], где доказано утверждение более общее, чем следующая ниже лемма 4.

Для каждого целого положительного числа k и действительного числа a, мы будем обозначать символами $\nu(k)$ и $[a]$ наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, k$ и целую часть числа a соответственно.

Лемма 4. *Пусть $N \geqslant 1$, $H \geqslant 1$, $\sigma \geqslant 0$ и x — целые числа. Определим $d_\sigma = \nu(H)^\sigma$. Тогда*

$$d_\sigma \cdot \Delta^{(u)}(x, N, H) \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant u \leqslant \sigma,$$

и

$$\log d_\sigma < \tfrac{107}{103} \cdot \sigma H, \tag{4.2}$$

$$\sum_{u=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{u} \cdot \left|\Delta^{(u)}(x, N, H)\right| < \sigma^\sigma \cdot e^{N+H} \left(1 + \frac{|x|}{H}\right)^N. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть p — простое и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_N$ — целые числа. Для каждого целого $k > 0$ обозначим r_k количество чисел b_i, делящихся на p^k. Тогда

$$\operatorname{ord}_p(b_1 \cdots b_N) = r_1 + r_2 + \cdots .$$

Исключим какие-либо u чисел из набора $b_1, \ldots, b_N$, а оставшиеся $N - u$ чисел обозначим $b_{j_1}, \ldots, b_{j_{N-u}}$. Тогда

$$\operatorname{ord}_p(b_{j_1} \cdots b_{j_{N-u}}) \geqslant \sum_{k \geqslant 1} \max(r_k - u, 0).$$

Определим теперь числа b_j как N сомножителей в произведении

$$\big(x(x+1)\cdots(x+H-1)\big)^q\cdot x(x+1)\cdots(x+r-1).$$

В этом случае

$$r_k\geqslant q\left[\frac{H}{p^k}\right]+\left[\frac{r}{p^k}\right],\quad k\geqslant 1.$$

Теперь из тождества

$$\Delta^{(u)}(z,N,H)=u!\cdot\Delta(z,N,H)\cdot\sum(z+j_1)^{-1}\cdots(z+j_u)^{-1},\qquad (4.4)$$

где суммирование проводится по всем множествам $\{j_1,\dots,j_u\}$ таким, что многочлен $(z+j_1)\cdots(z+j_u)$ делит $\Delta(z,N,H)$, находим

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_p\big(d_\sigma\cdot\Delta^{(u)}(x,N,H)\big)&\geqslant\sigma\cdot\left[\frac{\log H}{\log p}\right]-\sum_{p^k\leqslant H}\left(q\left[\frac{H}{p^k}\right]+\left[\frac{r}{p^k}\right]\right)\\&\qquad+\sum_{k\geqslant1}\max\left(q\left[\frac{H}{p^k}\right]+\left[\frac{r}{p^k}\right]-u,0\right)\\&\geqslant\sum_{p^k\leqslant H}\max\left(\sigma-u,\sigma-q\left[\frac{H}{p^k}\right]-\left[\frac{r}{p^k}\right]\right)\\&\geqslant0.\end{aligned}$$

Это доказывает утверждение $d_\sigma\cdot\Delta^{(u)}(x,N,H)\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant u\leqslant\sigma$, $x\in\mathbb{Z}$.

Оценка (4.2) следует из неравенства $\log\nu(k)\leqslant\frac{107}{103}\cdot k$ (см., например, [22, лемма 2.3, с. 127]).

Из тождества (4.4) находим

$$\begin{aligned}\sum_{u=0}^{\sigma}&\binom{\sigma}{u}\cdot|\Delta^{(u)}(x,N,H)|\\&\leqslant\sum_{u=0}^{\sigma}\binom{\sigma}{u}\cdot\binom{N}{u}\cdot u!\cdot\big(|x|+H-1\big)^{N-u}(H!)^{-q}(r!)^{-1}\\&\leqslant\sigma^\sigma\cdot\sum_{u=0}^{N}\binom{N}{u}\big(|x|+H-1\big)^{N-u}(H!)^{-q}(r!)^{-1}\\&=\sigma^\sigma\big(|x|+H\big)^N\left(\frac{H^H}{H!}\right)^q\left(\frac{H^r}{r!}\right)H^{-N}\\&\leqslant\sigma^\sigma\cdot e^{N+H}\cdot\left(1+\frac{|x|}{H}\right)^N.\end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы 4.

§ 5. Неравенство Лиувилля

В формулировке следующего результата используется понятие *длины* многочлена $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ (см. § 1).

Лемма 5 (неравенство Лиувилля). *Пусть $\mathbb{K}$ — подполе $\mathbb{C}$, являющееся конечным расширением поля $\mathbb{Q}$, степень его обозначим буквой D. Далее пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — элементы $\mathbb{K}$ и f — многочлен из кольца $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ степени не более N_i по переменной X_i, не обращающийся в нуль в точке $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Тогда*

$$\log\bigl|f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\bigr| \geqslant -(D'-1) \cdot \log L(f) - D' \sum_{i=1}^{n} N_i h(\alpha_i),$$

где

$$D' = \begin{cases} D/2, & \text{если } \mathbb{K} \text{ не действительное поле,} \\ D, & \text{если } \mathbb{K} \text{ действительное поле.} \end{cases}$$

Доказательство. См. [10, лемма 9.2].

§ 6. Доказательство основной теоремы

Предположим, что в условиях основной теоремы выполняется неравенство

$$|e^{\theta} - \alpha| + |\theta - \beta| < E^{-211DUVW}, \tag{6.1}$$

где

$$U = \frac{3.3D\log(D+2) + \log E}{\log E}, \quad V = \frac{2E|\theta| + D\log A + 6\log E}{\log E},$$
$$W = \frac{\log B + \log\log A + 4\log D + 2\log(E|\theta|_+) + 10}{\log E}.$$

Заметим, что $U \geqslant 1$, $V \geqslant 6$, $W \geqslant 2$.

а) Конструкция ненулевого определителя $\mathscr{D}$. В доказательстве основной теоремы используются комплексные аналитические функции одного переменного $\Delta(z, \tau, H)e^{\theta tz}$, для неотрицательных целых чисел τ, H и целого t. Производная такой функции порядка σ, взятая в точке $s \in \mathbb{Z}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau t}^{\sigma s} &= \left(\frac{d}{dz}\right)^{\sigma} \Bigl(\Delta(z, \tau, H)e^{\theta tz}\Bigr)\Big|_{z=s} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(\tau,\sigma)} \frac{\sigma!}{(\sigma-k)!k!} \cdot \Delta^{(k)}(s, \tau, H) \cdot (t\theta)^{\sigma-k} \cdot e^{\theta ts}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Выберем параметры T, T_1, S, S_1 и H:

$$S = [10.5UV], \quad S_1 = [12DW + 0.5],$$

$$T = [20.2DVW], \quad T_1 = [4.2U + 0.5], \quad H = [1.5W \log E]$$

и ограничимся интервалами

$$0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad |t| \leqslant T_1, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant S, \quad |s| \leqslant S_1.$$

Заменяя числа e^θ на α и θ на β в (6.2), мы получим алгебраические числа

$$\sum_{k=0}^{\min(\tau,\sigma)} \frac{\sigma!}{(\sigma-k)!k!} \cdot \Delta^{(k)}(s,\tau,H) \cdot (t\beta)^{\sigma-k} \cdot \alpha^{ts},$$

хорошо приближающие $\gamma_{\tau t}^{\sigma s}$. В соответствии с леммой 4 число

$$a_{\tau t}^{\sigma s} = d_\sigma \cdot \sum_{k=0}^{\min(\tau,\sigma)} \frac{\sigma!}{(\sigma-k)!k!} \cdot \Delta^{(k)}(s,\tau,H) \cdot (t\beta)^{\sigma-k} \cdot \alpha^{ts}, \tag{6.3}$$

будет многочленом от α, α^{-1}, β с целыми коэффициентами.

Обозначим также $L = (T+1)(2T_1+1)$ количество возможных пар (τ, t).

Лемма 6. *Существует множество* $\{(\sigma_\mu, s_\mu); 1 \leqslant \mu \leqslant L\}$ *элементов из* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *таких, что* $0 \leqslant \sigma_\mu \leqslant S$, $|s_\mu| \leqslant S_1$ *и определитель*

$$\mathscr{D} = \det\left\| a_{\tau\ t}^{\sigma_\mu s_\mu} \right\|, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad |t| \leqslant T_1, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant L,$$

$L \times L$*-матрицы отличен от нуля.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{C}[X, Y, Y^{-1}]$ — кольцо многочленов от X, Y, Y^{-1} и δ — дифференциальный оператор на кольце $\mathbb{C}[X, Y, Y^{-1}]$, определенный равенством

$$\delta = \tfrac{\partial}{\partial X} + \beta Y \tfrac{\partial}{\partial Y}.$$

Тогда

$$\delta^\sigma\left(\Delta(X,\tau,H)Y^t\right) = \sum_{k=0}^{\min(\tau,\sigma)} \frac{\sigma!}{(\sigma-k)!k!} \cdot \Delta^{(k)}(X,\tau,H) \cdot (t\beta)^{\sigma-k} \cdot Y^t$$

и

$$a_{\tau t}^{\sigma s} = d_\sigma \delta^\sigma \bigl(\Delta(X,\tau,H)Y^t\bigr)\bigr|_{(X,Y)=(s,\alpha^s)}.$$

Предположим, что ранг матрицы

$$\|a_{\tau t}^{\sigma s}\|, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad |t| \leqslant T_1, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant S, \quad |s| \leqslant S_1,$$

меньше L. Тогда существуют комплексные числа $c_{\tau t}$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, $|t| \leqslant T_1$, не все равные нулю, такие, что многочлен

$$R(X,Y) = \sum_{(\tau,t)} c_{\tau t} \Delta(X,\tau,H) Y^t \in \mathbb{C}[X,Y,Y^{-1}]$$

отличен от тождественного нуля и удовлетворяет равенствам

$$\delta^\sigma R(X,Y)\bigr|_{(X,Y)=(s,\alpha^s)} = 0, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant S, \quad |s| \leqslant S_1.$$

Но это противоречит лемме 2 с $P(X,Y) = Y^{T_1}R(X,Y)$, $D_0 = T$, $D_1 = 2T_1$, $M = 2S_1+1$, $\xi_s = s$, $\eta_s = \alpha^s$ и S, замененным на $S+1$: действительно, в силу неравенств

$$2S_1+1 \geqslant 24DW, \quad 2T_1+1 \leqslant 10.4U, \quad S+1 \geqslant 10.5UV, \quad T \leqslant 20.2DVW,$$

$V \geqslant 6$ и

$$\begin{aligned}\frac{(T+2S_1+1)(2T_1+1)}{(S+1)(2S_1+1)} &= \frac{2T_1+1}{S+1} \cdot \left(\frac{T}{2S_1+1} + 1\right)\\ &< \frac{10.4}{10.5V} \cdot \left(\frac{20.2V}{24} + 1\right)\\ &\leqslant \frac{104}{105} \cdot \left(\frac{101}{120} + \frac{1}{6}\right) < 1\end{aligned}$$

заключаем, что $P = 0$. Это завершает доказательство леммы 6.

b) Оценка сверху для $|\mathscr{D}|$**.** Мы будем использовать лемму 3 с λ, замененным на (τ,t), для L функций

$$f_{\tau t}(z) = \Delta(z,\tau,H) \cdot e^{\theta t z}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad |t| \leqslant T_1,$$

с точками $\zeta_\mu = s_\mu$, $1 \leqslant \mu \leqslant L$, с $\varepsilon = E^{-211DUVW}$ и $b_{\tau t \mu}$ вместо $b_{\lambda\mu}$ из леммы 3, определенными с помощью равенств

$$d_\sigma^{-1} \cdot a_{\tau\ t}^{\sigma_\mu s_\mu} = \gamma_{\tau\ t}^{\sigma_\mu s_\mu} + \varepsilon \cdot b_{\tau t \mu}.$$

Неравенства

$$T+1 \leqslant 20.2DVW+1 \leqslant \bigl(20.2+\tfrac{1}{12}\bigr)DVW, \quad T_1+\tfrac{1}{2} \leqslant 5.2U,$$

означают, что

$$L=(T+1)(2T_1+1) < 211DUVW \tag{6.4}$$

и $\varepsilon < E^{-L}$.

Из леммы 4 и (6.2) находим

$$\begin{aligned}\max_{|z|\leqslant E}\bigl|f_{\tau t}^{(\sigma)}(sz)\bigr| &\leqslant \max_{|z|\leqslant E}\sum_{k=0}^{\min(\tau,\sigma)}\frac{\sigma!}{(\sigma-k)!k!}\bigl|\Delta^{(k)}(sz,\tau,H)\bigr|\cdot|t\theta|^{\sigma-k}e^{|\theta zts|}\\ &\leqslant S^S\cdot e^{H+T}\cdot\left(1+\frac{ES_1}{H}\right)^T\cdot\bigl(|\theta|_+T_1\bigr)^S\cdot e^{|\theta|ET_1S_1}\leqslant e^M,\end{aligned}$$

где

$$M=S\log S+H+T+T\log\left(1+\frac{ES_1}{H}\right)+S\log\bigl(E|\theta|_+T_1\bigr)+E|\theta|S_1T_1+S_1T_1.$$

Из (6.1) следует, что

$$\begin{aligned}\max\bigl(|\beta|,|\theta|\bigr)&\leqslant|\theta|_+(1+(2S)^{-1}),\\ \max\bigl(|\alpha|,|\alpha|^{-1},|e^{\theta}|,|e^{-\theta}|\bigr)&\leqslant e^{|\theta|}\cdot\bigl(1+(2S_1T_1+2)^{-1}\bigr),\end{aligned}$$

и для любых целых k и ℓ с $0\leqslant k\leqslant S$ и $|\ell|\leqslant S_1T_1$,

$$\begin{aligned}|\beta^k\alpha^\ell-\theta^ke^{\theta\ell}|&\leqslant|\beta|^k\cdot|\alpha^\ell-e^{\theta\ell}|+|e^\theta|^\ell\cdot|\beta^k-\theta^k|\\ &\leqslant\varepsilon\cdot|\theta|_+^k\cdot e^{(|\ell|+1)|\theta|}\cdot\left(1+\frac{1}{2S}\right)^k\\ &\quad\times\left(1+\frac{1}{2S_1T_1+2}\right)^{|\ell|+1}\cdot\max(|\ell|,k)\\ &\leqslant\varepsilon e|\theta|_+^S\cdot e^{2S_1T_1|\theta|}\cdot\max(S,S_1T_1).\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся неравенствами

$$eS\leqslant e^S\leqslant E^S,\quad eS_1T_1\leqslant e^{S_1T_1}$$

и будем писать σ и s вместо σ_μ и s_μ. Из (6.2), (6.3) и леммы 4 находим

$$\begin{aligned}
\varepsilon\cdot|b_{\tau t\mu}| &= |d_\sigma^{-1}\cdot a_{\tau t}^{\sigma s}-\gamma_{\tau t}^{\sigma s}|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\min(\tau,\sigma)}\frac{\sigma!}{(\sigma-k)!k!}\cdot\bigl|\Delta^{(k)}(s,\tau,H)\bigr|\cdot|t|^{\sigma-k}\\
&\quad\times|\beta^{\sigma-k}\alpha^{ts}-\theta^{\sigma-k}e^{\theta ts}|\\
&\leqslant S^S\cdot e^{H+T+1}\cdot\left(1+\frac{S_1}{H}\right)^T\cdot T_1^S\cdot|\theta|_+^S e^{2|\theta|T_1S_1}\max(S,S_1T_1)\cdot\varepsilon\\
&\leqslant\varepsilon\cdot e^M.
\end{aligned}$$

Так как $\log d_\sigma\leqslant\frac{107}{103}SH$, из леммы 3 следует

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}\cdot\log|\mathscr{D}|\leqslant -\frac{L}{2}\cdot\log E+\tfrac{107}{103}SH+S\log S+H+T\\
+T\log\left(1+\frac{ES_1}{H}\right)+S\log\bigl(E|\theta|_+T_1\bigr)+|\theta|ES_1T_1\\
+S_1T_1+S\log E+\log(2LE).
\end{aligned}\tag{6.5}$$

c) Оценка снизу для $|\mathscr{D}|$. Определим полиномы

$$\begin{aligned}
q_{\tau t}^{\sigma s}(X,Y)=d_\sigma\sum_{k=0}^{\min(\tau,\sigma)}\frac{\sigma!}{(\sigma-k)!k!}\Delta^{(k)}(s,\tau,H)\\
\times(tX)^{\sigma-k}\cdot Y^{ts}\in\mathbb{Z}[X,Y,Y^{-1}],
\end{aligned}$$

и

$$R(X,Y)=\det\bigl\|q_{\tau\ t}^{\sigma_\mu s_\mu}(X,Y)\bigr\|,\quad 0\leqslant\tau\leqslant T,\quad |t|\leqslant T_1,\quad 1\leqslant\mu\leqslant L.$$

Из (6.3) следует, что $a_{\tau t}^{\sigma s}=q_{\tau t}^{\sigma s}(\beta,\alpha)$ и $\mathscr{D}=R(\beta,\alpha)$. С помощью неравенств

$$\begin{gathered}
\deg_X q_{\tau t}^{\sigma s}(X,Y)\leqslant S,\\
\deg_Y q_{\tau t}^{\sigma s}(X,Y)\leqslant|t|S_1,\quad \deg_{Y^{-1}} q_{\tau t}^{\sigma s}(X,Y)\leqslant|t|S_1
\end{gathered}$$

находим теперь

$$\begin{gathered}
\deg_X R(X,Y)\leqslant LS,\\
\deg_Y R(X,Y)\leqslant\tfrac14 LS_1(T_1+0.5),\quad \deg_{Y^{-1}} R(X,Y)\leqslant\tfrac14 LS_1(T_1+0.5).
\end{gathered}$$

Из леммы 4 следует, что

$$L\bigl(q_{\tau t}^{\sigma s}(X,Y)\bigr) \leqslant \exp\bigl(\tfrac{107}{103}SH\bigr)\cdot S^S \cdot e^{H+T}\cdot \left(1+\frac{S_1}{H}\right)^T \cdot T_1^S$$

и

$$L\bigl(R(X,Y)\bigr) \leqslant L^L \cdot \left(\exp\bigl(\tfrac{107}{103}SH\bigr)\cdot S^S \cdot e^{H+T}\cdot \left(1+\frac{S_1}{H}\right)^T \cdot T_1^S\right)^L.$$

Теперь с помощью леммы 5 находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}\cdot\log|\mathscr{D}| \geqslant -(D-1)\biggl(&\log L + \tfrac{107}{103}SH + S\log S + H + T\\ &+ T\log\left(1+\frac{S_1}{H}\right) + S\log T_1\biggr) - DS\log B\\ &- \tfrac{1}{2}DS_1(T_1+0.5)\log A. \qquad (6.6)\end{aligned}$$

d) Конец доказательства теоремы 1. Сравнив оценку сверху (6.5) для $|\mathscr{D}|$ и оценку снизу (6.6), мы получим

$$\begin{aligned}\frac{L}{2}\log E \leqslant\ & \tfrac{1}{2}S_1(T_1+0.5)\Bigl(D\log A + 2E|\theta| + 2\Bigr)\\ &+ \left(DT\log\left(1+\frac{S_1}{H}\right) + DT + T\log E\right)\\ &+ DS\Bigl(\log B + \log S + \log\bigl(E|\theta|_+T_1\bigr)\Bigr) + DH\\ &+ DSH\tfrac{107}{103} + S\log E + \log(2E) + D\log L.\end{aligned}$$

Используя определения всех параметров, находим

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}S_1(T_1+0.5)\Bigl(D\log A + 2E|\theta|+2\Bigr) &\leqslant 0.5\cdot 12.25\cdot 5.2DUVW\log E\\ &= 31.85DUVW\log E, \qquad (6.7)\end{aligned}$$

$$\log\left(1+\frac{S_1}{H}\right) \leqslant \log\left(1+12.25\frac{D}{\log E}\right) \leqslant \log 13.25 + \log D \leqslant 2.6 + \log D,$$

$$\begin{aligned}DT\log\left(1+\frac{S_1}{H}\right) + DT + T\log E &\leqslant 20.2(D^2VW\log D + 3.6D^2VW\\ &\qquad + DVW\log E)\\ &\leqslant 20.2DVW\bigl(\log E + 3.3D\log(D+2)\bigr)\\ &\leqslant 20.2DUVW\log E, \qquad (6.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &\leqslant 1+3.3D\log(D+2)\leqslant 4.7D^{3/2}, \quad V\leqslant 9.8E|\theta|_+D\log A, \quad (6.9)\\ \log\bigl(ST_1E|\theta|_+\bigr) &\leqslant \log\bigl(50U^2VE|\theta|_+\bigr)\\ &\leqslant \log\log A+4\log D+2\log\bigl(E|\theta|_+\bigr)+10,\\ DS\Bigl(\log B+\log S+\log\bigl(E|\theta|_+T_1\bigr)\Bigr) &\leqslant 10.5DUV\Bigl(\log B+\log\log A\\ &\qquad +4\log D+2\log\bigl(E|\theta|_+\bigr)+10\Bigr)\\ &\leqslant 10.5DUVW\log E. \qquad (6.10) \end{aligned}$$

Оценки (6.4) и (6.9) означают, что

$$\begin{aligned} \log L &\leqslant \log(211DUVW)\\ &\leqslant 10+3.5\log D+\log\bigl(E|\theta|_+\bigr)+\log\log A+\log W\\ &\leqslant W\log E+\log W\leqslant 1.4W\log E\\ &\leqslant 0.24UVW\log E. \end{aligned}$$

С помощью этих оценок и неравенств

$$\begin{gathered} DSH\leqslant 15.75DUVW\log E,\\ DH\leqslant 1.5DW\log E\leqslant 0.25DUVW\log E,\\ S\log E\leqslant 10.5UV\log E\leqslant 5.25DUVW\log E,\\ \log(2E)\leqslant 2\log E\leqslant \tfrac{1}{6}DUVW\log E, \end{gathered}$$

получаем

$$\begin{aligned} DH+\tfrac{107}{103}DSH+S\log E+\log(2E)+D\log L\\ &\leqslant \bigl(15.75\cdot\tfrac{107}{103}+5.25+0.49+\tfrac{1}{6}\bigr)DUVW\log E\\ &< 22.28DUVW\log E. \qquad (6.11) \end{aligned}$$

Наконец, из (6.6)–(6.11) следует

$$\begin{aligned} \frac{L}{2}\log E &\leqslant (31.85+20.2+10.5+22.28)DUVW\log E\\ &= 84.83DUVW\log E<\frac{(T+1)(2T_1+1)}{2}\cdot\log E=\frac{L}{2}\log E. \end{aligned}$$

Получившееся противоречие означает ложность неравенства (6.1) и завершает доказательство теоремы 1.

Université P. et M. Curie
Institut de Mathématiques de Jussieu
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
01.05.95

Список литературы

[1] *Матвеев Е. М.* Об арифметических свойствах значений обобщенных биномиальных многочленов // Матем. заметки. 1993. Т. 54. №4. С. 76–81.

[2] *Фельдман Н. И.* Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел // ДАН СССР. 1949. Т. 66. №4. С. 565–567.

[3] *Фельдман Н. И.* Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. №1. С. 53–74.

[4] *Фельдман Н. И.* О мере трансцендентности числа π // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. №3. С. 357–368.

[5] *Фельдман Н. И.* О приближении алгебраическими числами логарифмов алгебраических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. С. 475–492.

[6] *Фельдман Н. И.* К вопросу о мере трансцендентности числа e // УМН. 1963. Т. 18. №3 (111). С. 207–213.

[7] *Фельдман Н. И.* К вопросу о мере трансцендентности числа π // УМН. 1963. Т. 18. №3 (111). С. 207–213.

[8] *Фельдман Н. И.* Улучшение оценки линейной формы от логарифмов алгебраических чисел // Матем. сб. 1968. Т. 77 (119). №3. С. 256–270.

[9] *Feldman N. I.* Approximation of number π by algebraic numbers from special fields // J. Number Th. 1977. V. 9. P. 48–60.

[10] *Фельдман Н. И.* Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во МГУ, 1982.

[11] *Фельдман Н. И.* Постоянная в оценке меры трансцендентности числа π // Диофантовы приближения / ред. П. Л. Ульянов. Сб. статей. Т. I. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 97–106.

[12] *Фельдман Н. И., Шидловский А.Б.* Развитие и современное состояние теории трансцендентных чисел // УМН. 1967. Т. 22. №3 (135). С. 3–81.

[13] *Baker A.* A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms // Acta Arith. 1972. V. XXI. P. 117–129.

[14] *Borel E.* Sur la nature arithmétique du nombre e // C.R. Acad Sci. Paris. 1899. V. 128. P. 596–599.

[15] *Cijsouw P. L.* Transcendence measure of exponentials and logarithms of algebraic numbers // Comp. Math. 1974. V. 28. P. 163–178.

[16] *Diaz G.* Une nouvelle minoration de $|\log\alpha-\beta|$, $|\alpha-\exp\beta|$, α et β algébriques // Acta Arith. 1993. V. LXIV. P. 43–57; // Séminaire d'Arithmétique Univ. St. Etienne 1990–91–92. №4. P. 49–58.

[17] *Lang S.* Introduction to Transcendental Numbers. Reading: Addison Wesley, 1966.

[18] *Laurent M.* Sur quelques résultats récents de transcendance // Journées arithmétiques Luminy, 1989, Astérisque. 1991. V. 198–200. P. 209–230.

[19] *Laurent M.* Linear forms in two logarithms and interpolation determinants // Acta Arith. 1994. V. LXVI. №2.

[20] *Laurent M., Mignotte M., Nesterenko Yu.* Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation // J. Number Th. (to appear).

[21] *Waldschmidt M.* Transcendence measures for numbers connected with the exponential function // J. Austral. Math. Soc. 1978. V. 25. P. 445–465.

[22] *Kunrui Yu.* Linear forms in p-adic logarithms // Acta Arith. 1989. V. LIII. P. 107–186; (II) // Comp. Math. 1990. V. 74. P. 15–113.