La conjecture *abc* et quelques unes de ses conséquences

Michel Waldschmidt

Institut de Mathématiques de Jussieu

Plan

I. Énoncé de la conjecture

II. État de nos connaissances

III. Quelques conséquences

Problème d'Erdős-Woods

Conjectures de Catalan, Pillai et Hall

Problème de Waring

Théorème de Thue-Siegel-Roth

Référence: `http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html`

The six largest known values for $\lambda(abc)$

$$c = R(abc)^{\lambda}$$

	$a + b = c$	$\lambda(a,b,c)$	author(s)
1	$2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5$	1.629912 ...	Reyssat
2	$11^2 + 3^2 5^6 7^3 = 2^{21} \cdot 23$	1.625991 ...	de Weger
3	$19 \cdot 1307 + 7 \cdot 29^2 \cdot 31^8 = 2^8 \cdot 3^{22} \cdot 5^4$	1.623490 ...	Browkin – Brzezinski
4	$283 + 5^{11} \cdot 13^2 = 2^8 \cdot 3^8 \cdot 17^3$	1.580756 ...	Browkin – Brzezinski, Nitaj
5	$1 + 2 \cdot 3^7 = 5^4 \cdot 7$	1.567887 ...	de Weger
6	$7^3 + 3^{10} = 2^{11} \cdot 29$	1.547075 ...	de Weger

The six largest known values for $\varrho(abc)$

$$abc = R(abc)^{\varrho}$$

$a + b = c$	$\varrho(a,b,c)$	author(s)
$13 \cdot 19^6 + 2^{30} \cdot 5 = 3^{13} \cdot 11^2 \cdot 31$	$4.41901\ldots$	Nitaj
$2^5 \cdot 11^2 \cdot 19^9 + 5^{15} \cdot 37^2 \cdot 47 = 3^7 \cdot 7^{11} \cdot 743$	$4.26801\ldots$	Nitaj
$2^{19} \cdot 13 \cdot 103 + 7^{11} = 3^{11} \cdot 5^3 \cdot 11^2$	$4.24789\ldots$	de Weger
$2^{35} \cdot 7^2 \cdot 17^2 \cdot 19 + 3^{27} \cdot 107^2 = 5^{15} \cdot 37^2 \cdot 2311$	$4.23069\ldots$	Nitaj
$3^{18} \cdot 23 \cdot 2269 + 17^3 \cdot 29 \cdot 31^8 = 2^{10} \cdot 5^2 \cdot 7^{15}$	$4.22979\ldots$	Nitaj
$17^4 \cdot 79^3 \cdot 211 + 2^{29} \cdot 23 \cdot 29^2 = 5^{19}$	$4.22960\ldots$	Nitaj

$$\boxed{x^p + y^q = z^r}$$

(x, y, z, p, q, r) in $\mathbb{Z}$, x, y, z are relatively prime

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1}$$

$1 + 2^3 = 3^2$, $\quad 2^5 + 7^2 = 3^4$,

$7^3 + 13^2 = 2^9$, $\quad 2^7 + 17^3 = 71^2$,

$3^5 + 11^4 = 122^2$, $\quad 17^7 + 76271^3 = 21063928^2$,

$1414^3 + 2213459^2 = 65^7$, $\quad 9262^3 + 15312283^2 = 113^7$,

$43^8 + 96222^3 = 30042907^2$, $\quad 33^8 + 1549034^2 = 15613^3$.

$k =$ 2	3	4
$g(k) =$ 4	9	19
J.L. Lagrange	A. Wieferich	R. Balasubramanian J-M. Deshouillers F. Dress
1770	1909	1986

$k =$ 5	6	7
$g(k) =$ 37	73	143
J. Chen	S.S. Pillai	L.E. Dickson
1964	1940	1936