Annales Sci. E.N.S., à paraître.

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE ET INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DE LOGARITHMES

par Damien ROY et Michel WALDSCHMIDT

Résumé

On montre que tout nombre complexe transcendant admet de bonnes approximations par des nombres algébriques de grand degré, mais de hauteur logarithmique absolue bornée. On étend ensuite ce résultat en un énoncé d'approximation diophantienne simultanée pour toute famille finie d'éléments d'une extension de degré de transcendance 1 de $\mathbf{Q}$. Cet outil nous permet d'introduire une nouvelle méthode d'indépendance algébrique, que nous développons dans le contexte des sous-groupes à plusieurs paramètres de groupes algébriques linéaires. Nous montrons par exemple que si $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ sont des logarithmes $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques qui engendrent un corps de degré de transcendance 1 sur $\mathbf{Q}$, alors pour toute forme quadratique non nulle $Q \in \mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$, le nombre $Q(\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n)$ n'est pas nul.

Abstract

We prove that any transcendental complex number is well approximated by algebraic numbers of large degree and bounded absolute logarithmic height. Next we extend this result to a statement on simultaneous diophantine approximation for any finite subset of a field of transcendence degree 1 over $\mathbf{Q}$. This tool enables us to introduce a new method for algebraic independence, which we develop in the context of several parameters subgroups of linear algebraic groups. We show for instance that if $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ are $\mathbf{Q}$-linearly independent logarithms of algebraic numbers in a field of transcendence degree 1 over $\mathbf{Q}$, then for any non zero quadratic form $Q \in \mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$, the number $Q(\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n)$ does not vanish.