Valeurs spéciales de polylogarithmes multiples -- *cours de M. WALDSCHMIDT*

Examen du vendredi 14 juin 2002, 9h-12h (*)

Traiter, au choix, une partie des questions suivantes pendant l'écrit du vendredi 14 juin. Le reste pourra être préparé ensuite pour être rendu le jeudi 20 juin.

On désigne par $X = \{x_0, x_1\}$ l'alphabet à deux éléments, par X^* le monoïde libre sur X (d'élément neutre le mot vide noté e) et par $\mathfrak{H} = K < X >$ l'algèbre associative libre sur X (avec la loi de concaténation), le corps de base K étant un sous corps de $\mathbb{R}$. Un élément p de $\mathfrak{H}$ s'écrit $p = \sum_{u\in X^*}(p|u)u$ et le support $\{u \in X^* \ ; \ (p|u) \neq 0\}$ de p est fini.

Pour s entier ≥ 1 on pose $y_s = x_0^{s-1}x_1$. On note encore

Y l'alphabet $\{y_1, \ldots, y_s, \ldots\}$,

Y^* le monoïde libre sur Y que l'on identifie au sous-monoïde $\{e\} \cup X^*x_1$ de X^* formé des mots qui ne terminent pas par x_0,

$K < Y >$ l'algèbre associative libre sur Y que l'on identifie à

$\mathfrak{H}^1 = Ke + \mathfrak{H}x_1$ la sous-algèbre de $\mathfrak{H}$ engendrée par Y^*

et

$\mathfrak{H}^0 = Ke + x_0\mathfrak{H}x_1$ la sous-algèbre de $\mathfrak{H}^1$ engendrée par $\{y_2, \ldots, y_s, \ldots\}$ et formée des polynômes «convergents» (c'est l'algèbre libre sur les mots «convergents» qui commencent par x_0 et terminent par x_1).

On rappelle les définitions, pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ et $|z| < 1$,

$$\mathsf{Li}_{\underline{s}}(z) = \sum_{n_1>n_2\ldots>n_k\geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}},$$

puis

$$\widehat{\mathsf{Li}}_u(z) = \mathsf{Li}_{\underline{s}}(z) \quad \text{pour} \quad u = y_{\underline{s}} = y_{s_1}\cdots y_{s_k} \in Y^*$$

avec $\widehat{\mathsf{Li}}_e(z) = 1$, ensuite

$$\widehat{\mathsf{Li}}_p(z) = \sum_{u\in Y^*}(p|u)\widehat{\mathsf{Li}}_u(z) \quad \text{pour} \quad p = \sum_{u\in Y^*}(p|u)u \in \mathfrak{H}^1$$

et enfin

$$\widehat{\zeta}(p) = \widehat{\mathsf{Li}}_p(1) \quad \text{pour} \quad p \in \mathfrak{H}^0.$$

La loi de mélange sur $\mathfrak{H}$ relative à l'alphabet X est notée ш, tandis que la notation $\star$ est utilisée pour la loi harmonique sur $\mathfrak{H}$ (mélange avec retenues sur l'alphabet Y).

(*) Quelques modifications ont été apportées au sujet initial (septembre 2002).

Problème I

Soient A un alphabet fini. On rappelle la notation

$$w^* = e + w + w^2 + \cdots + w^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} w^i \in K << A >>$$

quand w est un polynôme de $K < A >$ sans terme constant.

1) Soient a, b, c trois lettres de A.

a) Quel est l'automate associé à $a ш (bc)^*$?

b) En déduire

$$a ш (bc)^* = (bc)^*(a + bac)(bc)^*.$$

c) Retrouver cette relation par un calcul direct de

$$\sum_{n \geq 0} a ш (bc)^n.$$

d) En déduire

$$a ш (ba)^* = \bigl(2(ba)^* - e\bigr) a (ba)^*.$$

2) Pour $n \geq 1$ calculer $y_1 ш y_2^n$ et $y_1 \star y_2^n$. En déduire

$$y_1 ш y_2^n - y_1 \star y_2^n = \sum_{i=1}^{n} y_2^i y_1 y_2^{n-i} - \sum_{h=0}^{n-1} y_2^h y_3 y_2^{n-h-1}.$$

Quelle relation linéaire entre des valeurs multizêta $\zeta(\underline{s})$ en déduisez-vous?

Problème II

On désigne par $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles $f :]-1, +1[\to \mathbb{R}$ ayant un développement en série de Taylor à l'origine

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$$

de rayon de convergence ≥ 1, telles qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $P_f \in \mathbb{R}[T]$ vérifiant

$$n^{\alpha} |n a_n - P_f(\log n)| \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Vérifier que le polynôme P_f est alors unique et que l'application $f \mapsto P_f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}[T]$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

1) Soit $f \in \mathcal{E}$, $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Pour $n \geq 0$ on note $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ et $Q_f \in \mathbb{R}[T]$, tels que

$$n^\beta |A_n - Q_f(\log n)| \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Vérifier que le polynôme Q_f est unique et que l'application $f \mapsto Q_f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}[T]$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Vérifier

$$\frac{d}{dT} Q_f = P_f.$$

`Indication.` On pourra vérifier que pour chaque entier $k \geq 1$ il existe un nombre réel $\gamma_k > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} (\log i)^k = \frac{1}{k+1} (\log n)^{k+1} + \gamma_k + O\big((\log n)^k / n\big) \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

2) Soit $f \in \mathcal{E}$.

a) Montrer qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ et $R_f \in \mathbb{R}[T]$, tels que

$$f(x) = R_f\big(\log(1-x)\big) + O\big((1-x)^\kappa\big) \qquad \text{quand} \quad x \to 1.$$

b) Vérifier que le polynôme R_f est unique et que l'application $f \mapsto R_f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}[T]$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

c) Vérifier que R_f est le polynôme constant si et seulement si $P_f = 0$.

d) Vérifier que les applications $f \mapsto R_f$ et $f \mapsto Q_f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}[T]$ ont le même noyau.

3) Vérifier que pour $f \in \mathcal{E}$ les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $P_f = 0$.
(ii) Le polynôme Q_f est constant.
(iii) Le polynôme R_f est constant.
(iv) La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

Quand ces propriétés sont satisfaites vérifier

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \lim_{x\to 1} f(x) = R_f.$$

4) Pour $w \in \mathfrak{H}^1$ on note $\mathcal{P}_w$, $\mathcal{Q}_w$ et $\mathcal{R}_w$ les polynômes P_f, Q_f et R_f avec $f = \widehat{\mathrm{Li}}_w$.

a) Vérifier $\mathcal{P}_w = 0$ si et seulement si $w \in \mathfrak{H}^0$.

b) Vérifier, pour $w \in \mathfrak{H}^1$, $\mathcal{P}_{x_1 w} = \mathcal{Q}_w$.

c) Quel est, pour k entier ≥ 0, le degré du polynôme $\mathcal{P}_{x_1^k}$?

d) Pour $w \in \mathfrak{H}^0$, vérifier $\mathcal{R}_w = \widehat{\zeta}(w)$.

Problème III.

Soit $\lambda \in K$.

On définit un endomorphisme K-linéaire φ_λ de $\mathfrak{H}$ par les conditions

$$\varphi_\lambda(e) = e, \quad \varphi_\lambda(y_s) = y_s \quad (s \geq 1),$$

$$\varphi_\lambda(y_s y_t u) = y_s \varphi_\lambda(y_t u) + \lambda \varphi_\lambda(y_{s+t} u)$$

pour $s \geq 1$, $t \geq 1$, $u \in Y^*$ et

$$\varphi_\lambda(w x_0^n) = \varphi_\lambda(w) x_0^n$$

pour $w \in Y^*$ et $n \geq 0$.

1) Vérifier, pour $\lambda \in K$, $u \in \mathfrak{H}$, s et t entiers positifs,

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_{-\lambda}(u) = u, \quad \varphi_\lambda\big(y_s \varphi_{-\lambda}(y_t u)\big) = y_s y_t u + \lambda y_{s+t} u.$$

En déduire que φ_λ est un automorphisme du K-espace vectoriel $\mathfrak{H}$. Montrer que l'application $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ est un homomorphisme de groupes additifs de K dans le groupe des automorphismes K-linéaires de $\mathfrak{H}$.

2) Vérifier, pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$,

$$\varphi_\lambda(y_{\underline{s}}) = \sum_{\underline{\sigma} \in \mathcal{A}(\underline{s})} \lambda^{a(\underline{\sigma})} y_{\underline{\sigma}},$$

où $\mathcal{A}(\underline{s})$ désigne l'ensemble des uplets $\underline{\sigma} = (s_1 *_1 s_2 *_2 \cdots *_{k-1} s_k)$, tandis que $(*_1, \ldots, *_{k-1})$ décrit l'ensemble des 2^{k-1} suites de symboles égaux à $+$ ou , et que $a(\underline{\sigma})$ désigne le nombre de j entre 1 et $k-1$ tels que $*_j = +$.

3) Pour $\lambda \in K$, on définit

$$\widehat{\mathrm{Li}}_u^{(\lambda)} = \widehat{\mathrm{Li}}_{\varphi_\lambda(u)} \qquad (u \in \mathfrak{H}^1) \quad \text{et} \quad \widehat{\zeta}^{(\lambda)} = \widehat{\zeta} \circ \varphi_\lambda.$$

De plus, pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, on pose

$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}^{(\lambda)} = \widehat{\mathrm{Li}}_{y_{\underline{s}}}^{(\lambda)} \quad \text{et} \quad \zeta^{(\lambda)}(\underline{s}) = \widehat{\zeta}^{(\lambda)}(y_{\underline{s}}) \quad \text{si} \quad s_1 \geq 2.$$

a) Vérifier

$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}^{(1)}(z) = \sum_{n_1 \geq n_2 \ldots \geq n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}$$

et

$$\zeta^{(1)}(\underline{s}) = \mathrm{Li}_{\underline{s}}^{(1)}(1) = \sum_{n_1 \geq n_2 \ldots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}} \qquad \text{si} \quad s_1 \geq 2.$$

b) En déduire

$$\mathsf{Li}^{(1)}_{\underline{s}}(z) = \sum_{\underline{\sigma}\in\mathcal{A}(\underline{s})} \mathsf{Li}_{\underline{\sigma}}(z) \quad \text{et} \quad \mathsf{Li}_{\underline{s}}(z) = \sum_{\underline{\sigma}\in\mathcal{A}(\underline{s})} (-1)^{a(\underline{\sigma})}\mathsf{Li}^{(1)}_{\underline{\sigma}}(z)$$

pour tout $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ et $|z| < 1$, puis

$$\zeta^{(1)}(\underline{s}) = \sum_{\underline{\sigma}\in\mathcal{A}(\underline{s})} \zeta(\underline{\sigma}) \quad \text{et} \quad \zeta(\underline{s}) = \sum_{\underline{\sigma}\in\mathcal{A}(\underline{s})} (-1)^{a(\underline{\sigma})}\zeta^{(1)}(\underline{\sigma})$$

quand $s_1 \geq 2$.

4) Soit $\lambda \in K$. On définit deux lois internes $\star_\lambda$ et $ш_\lambda$ sur $\mathfrak{H}^1$ par

$$u \star_\lambda v = \varphi_{-\lambda}\bigl(\varphi_\lambda(u) \star \varphi_\lambda(v)\bigr) \quad \text{et} \quad u ш_\lambda v = \varphi_{-\lambda}\bigl(\varphi_\lambda(u) ш \varphi_\lambda(v)\bigr).$$

Vérifier

$$\widehat{\mathsf{Li}}^{(\lambda)}_{u ш_\lambda v}(z) = \widehat{\mathsf{Li}}^{(\lambda)}_u(z)\widehat{\mathsf{Li}}^{(\lambda)}_v(z)$$

pour u et v dans $\mathfrak{H}^1$, $|z| < 1$ et

$$\widehat{\zeta}^{(\lambda)}(u \star_\lambda v) = \widehat{\zeta}^{(\lambda)}(u)\widehat{\zeta}^{(\lambda)}(v)$$

pour u et v dans $\mathfrak{H}^0$.

5) Vérifier que pour tout u et v dans $\mathfrak{H}^0$, les éléments

$$u ш_\lambda v - u \star_\lambda v \quad \text{et} \quad y_1 ш_\lambda u - y_1 \star_\lambda u$$

appartiennent au noyau de $\widehat{\zeta}^{(\lambda)} : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$.