Exposé donné à Delphes le 29 Septembre 1989.

LA TRANSFORMATION DE FOURIER–BOREL :

UNE DUALITÉ EN TRANSCENDANCE.

par

Michel WALDSCHMIDT

RÉSUMÉ.

Nous utilisons la transformation de Fourier–Borel pour introduire une dualité dans les méthodes transcendantes. En ce sens, la solution par Schneider du septième problème de Hilbert est duale de celle de Gel'fond, tandis que la démonstration du théorème de Hermite–Lindemann par la méthode de Gel'fond–Schneider est autoduale. Nous terminons en donnant l'esquisse d'une nouvelle démonstration du théorème de Schneider sur la transcendance d'intégrales elliptiques de première espèce.

1. – La transformation de Fourier–Borel.

Nous désignons par $H(\mathbf{C})$ l'espace des fonctions entières d'une variable complexe, et par $H'(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des applications $\mathbf{C}$fflinéaires $\eta : H(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ qui sont bornées au sens suivant : il existe deux constantes positives C et R telles que, pour tout fonction $F \in H(\mathbf{C})$, on ait

$$|\eta(F)| \leq C|F|_R, \tag{1.1}$$

où on a noté $|F|_R = \sup\{|F(z)|; |z| \leq R\}$. Les éléments de $H'(\mathbf{C})$ sont appelés *fonctionnelles analytiques*. Une telle fonctionnelle η est déterminée par la suite de ses valeurs $a_n = \eta(z^n)$ sur les monomes $z \mapsto z^n$, $n \geq 0$:

Lemme 1.2. – *Soit $\eta \in H'(\mathbf{C})$. Pour $F(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n \in H(\mathbf{C})$, la série $\sum_{n\geq 0} b_n \eta(z^n)$ converge absolument, et on a*

$$\eta(F) = \sum_{n\geq 0} b_n \eta(z^n).$$

<u>Démonstration</u>.
Posons $a_n = \eta(z^n)$, $(n \geq 0)$. Grâce à (1.1) on a

$$|a_n| = |\eta(z^n)| \leq CR^n,$$

et des inégalités de Cauchy on déduit, pour tout $R_1 > 0$,

$$|b_n| \leq |F|_{R_1} R_1^{-n}.$$

Donc

$$|a_n b_n| \leq C|F|_{R_1} \left(\frac{R}{R_1}\right)^n.$$

Il suffit donc de choisir $R_1 > R$ pour voir que la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge absolument.

Soit alors $\epsilon > 0$; prenons N entier suffisamment grand pour que

$$C(1+N)|F|_{R_1} \left(\frac{R}{R_1}\right)^N < \epsilon,$$

et montrons que

$$\left|\eta(F) - \sum_{n=0}^{N} a_n b_n\right| < \epsilon.$$

Pour cela, posons

$$G(z) = F(z) - \sum_{n=0}^{N} b_n z^n.$$

On a

$$\begin{aligned} |G|_{R_1} &\leq |F|_{R_1} + \sum_{n=0}^{N} |b_n| R_1^n \\ &\leq (1+N)|F|_{R_1}. \end{aligned}$$

D'autre part la fonction G a un zéro à l'origine de multiplicité $\geq N$, et le lemme de Schwarz donne
$$|G|_R \leq \left(\frac{R}{R_1}\right)^N |G|_{R_1}.$$
Enfin
$$\left|\eta(F) - \sum_{n=0}^{N} a_n b_n\right| = |\eta(G)| \leq C|G|_R.$$
D'où le lemme 1.2.

Par conséquent notre fonctionnelle η est aussi déterminée par ses valeurs $\eta(e^{uz}) = \mathcal{F}_\eta(u)$ sur les fonctions $z \mapsto e^{uz}$, $(u \in \mathbf{C})$:
$$\mathcal{F}_\eta(u) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{u^n}{n!}.$$
D'après le lemme 1.2, la série $\sum_{n\geq 0} a_n u^n/n!$ converge absolument pour tout $u \in \mathbf{C}$, donc la fonction $\mathcal{F}_\eta$ ainsi définie est entière, et l'hypothèse (1.1) montre qu'elle est de *type exponentiel*, c'est–à–dire qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $R > 0$ telles que
$$|\mathcal{F}_\eta(u)| \leq Ce^{R|u|} \qquad \text{pour tout } u \in \mathbf{C}.$$
On dit que $\mathcal{F}_\eta$ est la *transformée de Fourier–Borel* de la fonctionnelle η.

Inversement, étant donnée une fonction entière de type exponentiel Φ nous allons lui associer une fonctionnelle analytique η telle que $\Phi = \mathcal{F}_\eta$.

Lemme 1.3. – *Soit Φ une fonction entière dans $\mathbf{C}$, de type exponentiel, et ayant pour développement de Taylor à l'origine :*
$$\Phi(u) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{u^n}{n!}.$$
Alors pour toute fonction entière
$$F(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n \in H(\mathbf{C}),$$
la série
$$\mathcal{H}_\Phi(F) = \sum_{n\geq 0} a_n b_n$$
converge absolument, et l'application $F \mapsto \mathcal{H}_\Phi(F)$ appartient à $H'(\mathbf{C})$.

Démonstration.
Comme dans la démonstration du lemme 1.2, on a, pour tout $R_1 > 0$,
$$|b_n| \leq |F|_{R_1} R_1^{-n}.$$

De plus l'hypothèse sur la croissance de Φ conduit à
$$|a_n| \leq n!|\Phi|_\rho \rho^{-n} \leq Cn!e^{R\rho}\rho^{-n}$$
pour tout $\rho > 0$, d'où
$$|a_n b_n| \leq C|F|_{R_1} n! e^{R\rho}(R_1\rho)^{-n}.$$
On prend d'une part $R_1 > R$, et, d'autre part, en optimisant, $\rho = n/R$; on trouve ainsi
$$|a_n b_n| \leq C|F|_{R_1} \frac{n!}{n^n} \left(\frac{eR}{R_1}\right)^n$$
pour tout $n \geq 0$ (avec la convention habituelle $n! = n^n = 1$ pour $n = 0$). On pose alors
$$c = \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} \left(\frac{eR}{R_1}\right)^n,$$
et on trouve
$$\sum_{n\geq 0} |a_n b_n| \leq cC|F|_{R_1},$$
ce qui démontre que $\mathcal{H}_\Phi$ appartient à $H'(\mathbf{C})$.

De plus il est maintenant immédiat de vérifier que les applications $\eta \mapsto \mathcal{F}_\eta$ et $\Phi \mapsto \mathcal{H}_\Phi$ définissent des bijections réciproques de $H'(\mathbf{C})$ sur l'espace des fonctions entières de type exponentiel.

Exemple 1.4. – Pour $v \in \mathbf{C}$, la fonctionnelle $\eta_v : F \mapsto F(v)$ a pour transformée de Fourier–Borel la fonction $u \mapsto e^{vu}$.

Lemme 1.5. – *Pour tout $\eta \in H'(\mathbf{C})$, on a*
$$\mathcal{F}_{\eta\circ d/dz}(u) = u\mathcal{F}_\eta(u),$$
où $\eta \circ d/dz$ désigne la fonctionnelle $F \mapsto \eta(dF/dz)$.

Démonstration.
On a
$$\mathcal{F}_{\eta\circ d/dz}(u) = \eta(\frac{d}{dz}e^{uz}) = \eta(ue^{uz}) = u\eta(e^{uz}) = u\mathcal{F}_\eta(u).$$

Le lemme 1.5 s'énonce de manière équivalente
$$\mathcal{H}_\Phi(\frac{d}{dz}F) = \mathcal{H}_{u\Phi}(F)$$
pour toute fonction entière Φ de type exponentiel. En effet, si on pose $\eta = \mathcal{H}_\Phi$, on a $\Phi = \mathcal{F}_\eta$, donc $u\Phi(u) = \mathcal{F}_{\eta\circ d/dz}(u)$ d'après le lemme 1.5, ce qui signifie $\eta \circ d/dz = \mathcal{H}_{u\Phi(u)}$.

Lemme 1.6. – *Pour tout $\eta \in H'(\mathbf{C})$, on a*

$$\mathcal{F}_{\eta\circ z} = \frac{d}{du}\mathcal{F}_\eta,$$

où $\eta \circ z$ désigne la fonctionnelle $F \mapsto \eta(zF)$.

Ce lemme 1.6 signifie que pour toute fonction entière Φ de type exponentiel, on a

$$\mathcal{H}_\Phi(zF) = \mathcal{H}_{d\Phi/du}(F).$$

Démonstration.
Posons $\eta = \mathcal{H}_\Phi$. On a, pour $n \geq 0$,

$$\eta(z^n) = \left(\frac{d}{du}\right)^n \Phi(0),$$

et

$$\eta(z^{n+1}) = \left(\frac{d}{du}\right)^n \left(\frac{d}{du}\Phi\right)(0),$$

donc $\eta \circ z = \mathcal{H}_{d\Phi/du}$.

Lemme 1.7. – *Pour s et t entiers ≥ 0 et $v \in \mathbf{C}$, la transformée de Fourier–Borel de la fonctionnelle*

$$\eta : F \mapsto \left(\frac{d}{dz}\right)^t (z^s F)_{z=v}$$

est

$$\mathcal{F}_\eta(u) = \left(\frac{d}{du}\right)^s \left(u^t e^{vu}\right).$$

Autrement dit

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^t (z^s e^{uz})_{z=v} = \left(\frac{d}{dz}\right)^s \left(z^t e^{vz}\right)_{z=u}. \tag{1.8}$$

Démonstration.
Par hypothèse $\eta = \eta_v \circ (d/dz)^t \circ z^s$, où $\eta_v(F) = F(v)$. Le lemme 1.6 donne

$$\mathcal{F}_\eta = \left(\frac{d}{du}\right)^s \mathcal{F}_\mu \quad \text{avec} \quad \mu = \eta_v \circ \left(\frac{d}{dz}\right)^t.$$

Le lemme 1.5 entraîne

$$\mathcal{F}_\mu = u^t \mathcal{F}_{\eta_v}.$$

Enfin de l'exemple 1.4 on déduit

$$\mathcal{F}_{\eta_v} = e^{uv}.$$

D'où le lemme 1.7.

Remarque. On peut aussi démontrer (1.8) directement en développant à l'origine la fonction

$$(z_1, z_2) \mapsto e^{(z_1+u)(z_2+v)}.$$

En effet, on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^t \left(e^{(z_1+u)(z_2+v)}\right)_{z_2=0} = (z_1+u)^t e^{(z_1+u)v},$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^s \left((z_1+u)^t e^{(z_1+u)v}\right)_{z_1=0} = \left(\frac{d}{dz}\right)^s \left(z^t e^{vz}\right)_{z=u},$$

donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^t \left(e^{(z_1+u)(z_2+v)}\right)_{z_1=z_2=0} = \left(\frac{d}{dz}\right)^s \left(z^t e^{vz}\right)_{z=u}.$$

Le résultat s'obtient grâce à la symétrie du premier membre.

Bien entendu on peut encore calculer directement

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^s \left(z^t e^{vz}\right)_{z=u} = \sum_{k=0}^{\min\{s,t\}} \frac{s!t!}{k!(s-k)!(t-k)!} u^{t-k} v^{s-k} e^{uv},$$

et constater de nouveau la symétrie du second membre sous l'action de

$$(u, v, s, t) \mapsto (v, u, t, s).$$

2. – Une dualité dans les méthodes transcendantes.

Le septième problème de Hilbert a été résolu par Gel'fond et Schneider en 1934 (cf. [G1], [S1]) : *si α et β sont deux nombres complexes avec $\alpha \neq 0$, $\log\alpha \neq 0$, et $\beta \notin \mathbf{Q}$, alors l'un au moins des trois nombres α, β, $\alpha^\beta = \exp\{\beta\log\alpha\}$ est transcendant sur $\mathbf{Q}$.*

La démonstration de Gel'fond [G1] utilise une fonction auxiliaire de la forme

$$\Phi_G(z) = \sum_{\lambda_0}\sum_{\lambda_1} p_{\lambda_0\lambda_1} e^{(\lambda_0+\lambda_1\beta)z},$$

où $p_{\lambda_0\lambda_1}$ sont des nombres entiers. Gel'fond évalue les dérivées de Φ_G aux points multiples de $\log\alpha$:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^t \Phi_G(h\log\alpha) = \sum_{\lambda_0}\sum_{\lambda_1} p_{\lambda_0\lambda_1}(\lambda_0+\lambda_1\beta)^t\alpha^{\lambda_0 h}(\alpha^\beta)^{\lambda_1 h}.$$

La démonstration de Schneider [S1] utilise une fonction

$$\Phi_S(z) = \sum_t\sum_h q_{th} z^t\alpha^{hz}$$

qu'il évalue aux points $\lambda_0+\lambda_1\beta$:

$$\Phi_S(\lambda_0+\lambda_1\beta) = \sum_t\sum_h q_{th}(\lambda_0+\lambda_1\beta)^t\alpha^{\lambda_0 h}(\alpha^\beta)^{\lambda_1 h}.$$

On reconnait un cas particulier de (1.8) :

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^t \left(e^{(\lambda_0+\lambda_1\beta)z}\right)_{z=h\log\alpha} = \left(z^t\alpha^{hz}\right)_{z=\lambda_0+\lambda_1\beta}.$$

Ainsi Gel'fond et Schneider considéraient tous deux une même matrice, mais, tandis que Gel'fond prenait des combinaisons des colonnes, Schneider prenait des combinaisons des lignes.

On peut aussi écrire que la fonction Φ_G de Gel'fond est la transformée de Fourier–Borel de la fonctionnelle

$$F \mapsto \eta_G(F) = \sum_{\lambda_0}\sum_{\lambda_1} p_{\lambda_0\lambda_1} F(\lambda_0+\lambda_1\beta),$$

tandis que la fonction Φ_S de Schneider est la transformée de Fourier–Borel de

$$F \mapsto \eta_S(F) = \sum_t\sum_h q_{th}\left(\frac{d}{dz}\right)^t F(h\log\alpha).$$

C'est en ce sens que les deux méthodes sont duales l'une de l'autre. De manière plus générale, quand $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont des fonctions analytiques, et $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ des points, pour

étudier la nature arithmétique des valeurs $(d/dz)^t\varphi_\lambda(\zeta_\mu)$, on construit habituellement une fonction auxiliaire

$$\Phi = \sum_{\lambda=1}^{L} p_\lambda\varphi_\lambda,$$

que l'on évalue avec ses dérivées $(d/dz)^t$ aux points ζ_μ, $(1 \leq \mu \leq M)$. Autrement dit on travaille avec des combinaisons linéaires de colonnes d'une matrice

$$\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^t \varphi_\lambda(\zeta_\mu)\right)_{(\lambda;t,\mu)}.$$

La *méthode transcendante duale* fera intervenir des combinaisons linéaires des lignes de cette même matrice, c'est–à–dire introduira une fonctionnelle auxiliaire

$$\eta : F \mapsto \sum_t\sum_\mu q_{t\mu}\left(\frac{d}{dz}\right)^t F(\zeta_\mu).$$

La transformée de Fourier–Borel de η s'écrit

$$\mathcal{F}_\eta(u) = \sum_t\sum_\mu q_{t\mu}u^t e^{\zeta_\mu u}.$$

Prenons comme deuxième exemple le théorème de Hermite Lindemann : *si α est un nombre complexe non nul, l'un au moins des deux nombres α, e^α est transcendant.*

La démonstration de ce théorème par la méthode de Gel'fond–Schneider (cf. [G2], [S3]) repose sur l'étude d'une fonction auxiliaire de la forme

$$\Psi(z) = \sum_{\lambda_0}\sum_{\lambda_1} p_{\lambda_0\lambda_1} z^{\lambda_0}e^{\lambda_1 z},$$

et on considère les nombres $(d/dz)^t\Psi(h\alpha)$ pour différentes valeurs entières de t et h. Le dual de cette méthode consiste à considérer la fonctionnelle

$$F \mapsto \eta(F) = \sum_t\sum_h q_{th}\left(\frac{d}{dz}\right)^t F(h\alpha),$$

dont la transformée de Fourier–Borel est

$$\Phi(u) = \sum_t\sum_h q_{th}u^t e^{h\alpha u}.$$

Pour $\varphi_{\lambda_0\lambda_1} = z^{\lambda_0}e^{\lambda_1 z}$, on a, d'après (1.8),

$$\begin{aligned}\eta(\varphi_{\lambda_0\lambda_1}) &= \sum_t\sum_h q_{th}\left(\frac{d}{dz}\right)^t \left(z^{\lambda_0}e^{\lambda_1 z}\right)_{z=h\alpha}\\ &= \sum_t\sum_h q_{th}\left(\frac{d}{du}\right)^{\lambda_0}\left(u^t e^{h\alpha u}\right)_{u=\lambda_1}\\ &= \left(\frac{d}{du}\right)^{\lambda_0}\Phi(\lambda_1).\end{aligned}$$

Quitte à effectuer le changement de variables $z = \alpha u$ et la permutation

$$(t, h, \lambda_0, \lambda_1) \mapsto (\lambda_0, \lambda_1, t, h),$$

on voit que cette démonstration est *autoduale.*

Un autre exemple de démonstration autoduale est donné par le théorème des six exponentielles ([W1] Corollaire 2.2.3) : *si $x_1, \ldots, x_d$ sont des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, et $y_1, \ldots, y_\ell$ sont aussi des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, avec $\ell d > \ell + d$, l'un au moins des ℓd nombres $e^{x_i y_j}$ $(1 \le i \le d,\ 1 \le j \le \ell)$ est transcendant sur $\mathbf{Q}$.*

Les deux solutions proposées au §7.4 de [W1] du huitième problème de Schneider (sur la transcendance de l'un au moins des deux nombres e^e, e^{e^2}) sont encore duales l'une de l'autre.

Quand on se restreint aux méthodes classiques pour les fonctions exponentielles (ou polynomiales) en une variable, la méthode duale est une autre méthode classique (on trouvera d'autres exemples dans [W1] ; citons en particulier le théorème de Gel'fond sur l'indépendance algébrique des deux nombres α^β et α^{β^2} quand β est algébrique de degré 3).

Il en va différemment si on passe en plusieurs variables, ou bien si on considère d'autres types de fonctions, ce que nous allons faire maintenant.

3. – Transcendance d'intégrales elliptiques de première espèce.

Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques :

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

et soit α un nombre algébrique non nul. D'après Schneider [S2], [S3], *α n'est pas pôle de $\wp$, et $\wp(\alpha)$ est transcendant.*

Nous allons exposer deux schémas de démonstration de ce résultat, en nous limitant pour simplifier au cas où aucun multiple entier non nul de α n'est pôle de $\wp$. (La transcendance des périodes de $\wp$ se fait de la même manière, mais en décalant d'une demi période fondamentale pour éviter les pôles). On suppose $\wp(\alpha)$ algébrique, et on veut en déduire une contradiction.

Nous donnerons d'abord le schéma de démonstration "classique" utilisant une fonction auxiliaire, puis le schéma de la démonstration duale. Chacune de ces deux démonstrations utilise des paramètres permettant d'effectuer des estimations. On commence par choisir une constante c_0 suffisamment grande (qu'on pourrait expliciter en fonction de α, g_2, g_3 et $\wp(\alpha)$), puis une constante H beaucoup plus grande que c_0, et enfin un paramètre entier L qui tendra vers l'infini. Pour utiliser les propositions 2.3 et 3.2 de [W2], on posera

$$r = c_0 H|\alpha|, \quad R = L, \quad V = \frac{1}{c_0^3} L^2 \log L, \quad \Delta = V/c_0.$$

Pour travailler avec des fonctions analytiques, on introduit une fonction entière θ, non nulle aux points $h\alpha$, $(0 < h \le H)$, telle que toutes les fonctions $\theta(z) z^{\lambda_0} \wp(z)^{\lambda_1}$, $(0 \le \lambda_0, \lambda_1 < L)$ soient entières (par exemple on prend $\theta = \sigma^{2L}$, où σ est la fonction sigma de Weierstrass associée à $\wp$).

Commençons par le point de vue classique. On pose $T = [c_0 L^2/H]$. Comme TH/L^2 est suffisamment grand, un lemme de zéros (par exemple celui de [P]) permet de montrer que la matrice formée par les nombres

$$\left(\left(\frac{d}{dz} \right)^t \left(z^{\lambda_0} \wp(z)^{\lambda_1} \right) \right)_{z = h\alpha}, \tag{3.1}$$

où (t, h) est l'indice de ligne, $0 \le t < T$, $0 < h \le H$, et (λ_0, λ_1) celui de colonne, $0 \le \lambda_0 < L$, $0 \le \lambda_1 < L$, a un rang égal à L^2. La méthode utilisée par Schneider en 1936 consiste à construire une fonction auxiliaire, combinaison linéaire de colonnes :

$$\Phi(z) = \sum_{\lambda_0 = 0}^{L-1} \sum_{\lambda_1 = 0}^{L-1} p_{\lambda_0 \lambda_1} z^{\lambda_0} \wp(z)^{\lambda_1}. \tag{3.2}$$

Pour cela, on applique la proposition 2.3 de [W2] aux fonctions $\theta(z) z^{\lambda_0} \wp(z)^{\lambda_1}$, et on trouve une fonction (3.2) vérifiant $|\theta\Phi|_r \le e^{-V}$.

En divisant par θ on voit que les dérivées de la fonction auxiliaire d'ordre $< T$ aux points $h\alpha$, $(1 \le h \le H)$, sont "petites" :

$$\left| \left(\frac{d}{dz} \right)^t \Phi(h\alpha) \right| \le e^{-V/2}.$$

Mais ces valeurs sont des nombres algébriques :

$$\sum_{\lambda_0 = 0}^{L-1} \sum_{\lambda_1 = 0}^{L-1} p_{\lambda_0 \lambda_1} \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^t \left(z^{\lambda_0} \wp(z)^{\lambda_1} \right) \right)_{z = h\alpha}, \tag{3.3}$$

et l'inégalité de Liouville montre que tous ces nombres (3.3) $(0 \le t < T,\ 0 < h \le H)$ sont nuls, contredisant le lemme de zéros.

Dans le deuxième schéma de démonstration, nous allons poser $T = [L^2/c_0 H]$. Un lemme d'interpolation (du style de celui de [M]) permet de montrer que la matrice formée par les nombres (3.1) a un rang égal à TH (noter que c'est maintenant L^2/TH qui est suffisamment grand). Nous voulons construire une fonctionnelle auxiliaire associée à une combinaison linéaire de colonnes de la matrice considérée :

$$F \longmapsto \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{h=1}^{H} q_{th} \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^t F \right)_{z = h\alpha}.$$

On considère les fonctionnelles

$$\eta_{th} : F \longmapsto \left(\frac{d}{dz}\right)^t \left(\frac{F}{\theta}\right)_{z=h\alpha}.$$

La proposition 3.2 de [W2] permet de trouver des entiers rationnels non tous nuls q_{th}, tels que la fonctionnelle

$$\eta = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{h=1}^{H} q_{th}\eta_{th}$$

vérifie

$$|\eta(F)| \le e^{-V}|F|_R$$

pour toute fonction analytique F. En particulier les valeurs $\eta(F)$ pour $F = \theta(z)z^{\lambda_0}\wp(z)^{\lambda_1}$, $(0 \le \lambda_0, \lambda_1 < L)$, sont “petites” :

$$\left|\eta\left(\theta(z)z^{\lambda_0}\wp(z)^{\lambda_1}\right)\right| \le e^{-V/2}.$$

Mais ces valeurs sont des nombres algébriques :

$$(3.4) \qquad \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{h=1}^{H} q_{th}\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^t \left(z^{\lambda_0}\wp(z)^{\lambda_1}\right)\right)_{z=h\alpha};$$

l’inégalité de Liouville montre que tous ces nombres (3.4), pour $(0 \le \lambda_0, \lambda_1 < L)$, sont nuls ; ceci contredit le lemme d’interpolation.

Notons que la transformée de Fourier–Borel de η est

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{h=1}^{H} \tilde{q}_{th} z^t e^{h\alpha z},$$

avec $\tilde{q}_{th} = q_{th}/\theta(h\alpha)$. On peut donc démontrer la transcendance de $\wp(\alpha)$ en faisant intervenir des polynômes exponentiels.

Références.

[G1] Gel’fond A.O.— Sur le septième problème de D. Hilbert ; Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 1934 (II), 1–6.

[G2] Gel’fond A.O.— *Transcendental and algebraic numbers* ; Moscou (1952), Dover, New-York (1960).

[M] Masser D.W.— Interpolation on group varieties ; in *Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, Luminy 1982, Birkhäuser Verlag, P.M. **31** (1983), 151–171.

[P] Philippon P.— Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs ; Bull. Soc. Math. France, **114** (1986), 355–383.

[S1] Schneider Th.— Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen, I : Transzendenz von Potenzen ; J. reine angew. Math., **172** (1934), 65–69.

[S2] Schneider Th.— Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale ; Math. Ann., **113** (1937), 1–13.

[S3] Schneider Th.— *Introduction aux nombres transcendants* ; Springer, 1957 ; trad. franç. Gauthier–Villars, 1959.

[W1] Waldschmidt M.— *Nombres transcendants* ; Lecture Notes in Math., **402** (1974), Springer Verlag.

[W2] Waldschmidt M.— Fonctions auxiliaires et fonctionnelles analytiques ; en préparation.