UNIVERSITÉ BORDEAUX I

Leçons de Mathématiques d'Aujourd'hui

Jeudi 7 Novembre 1996

Fonctions modulaires et transcendance [1]

Michel WALDSCHMIDT

Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

[1]Rédigé par Nicolas BRISEBARRE.

Pour commencer, je voudrais vous raconter l'histoire d'un nombre. Il s'agit du nombre

$$\xi = \sum_{n\geq 1} 2^{-n^2}. \tag{1}$$

Il apparaît, probablement pour la première fois, dans un travail de Liouville en 1851 [Liou3]. Liouville avait publié deux notes aux Comptes-Rendus en 1844 [Liou1] [Liou2] et, dans un mémoire dans ce que l'on appelle aujourd'hui le Journal de Liouville, il développe un peu sa méthode. C'est dans ces trois travaux qu'il nous donne les premiers exemples de nombres transcendants et donc, c'est en quelque sorte la naissance des nombres transcendants. Pour donner des exemples, il avait commencé par regarder des nombres réels donnés par des développements en fractions continues et puis ensuite, il a étudié des nombres qui sont donnés par leur développement décimal ou 2-adique. En fait, on peut remplacer le 2 dans ξ par n'importe quel entier supérieur ou égal à 2. Les nombres dont Liouville montre la transcendance sont des nombres comme $\sum_{n\geq 1} 2^{-n!}$. Il démontre que ce nombre est transcendant et il étudie pas mal d'autres exemples. Parmi ces exemples, il y a le nombre ξ et il remarque que sa méthode ne s'y applique pas. Elle permet seulement de montrer que ξ est irrationnel. C'est un peu curieux parce qu'il a une méthode qui n'est pas très élémentaire et le fait que ξ soit irrationnel se voit immédiatement sur le développement en base 2. Je vais dire un peu comment il fait pour montrer la transcendance de certains nombres et puis pourquoi il n'y arrive pas pour le nombre ξ.

Ce que fait Liouville, c'est établir une propriété générale des nombres algébriques. Un nombre algébrique est un nombre complexe tel qu'il existe un polynôme $f(X) \in \mathbb{Z}[X], f \neq 0$, annulé par ce nombre. Soit α un nombre algébrique, on appelle polynôme minimal de α le polynôme unitaire de $\mathbb{Q}[X]$ de plus petit degré annulé par α. On définit le degré de α comme étant le degré de ce polynôme minimal. Les nombres qui ne vérifient pas cette propriété sont appelés transcendants. En fait, cette définition de nombre algébrique s'étend aux nombres p-adiques et dans une certaine mesure à certains corps comme les corps de fonctions sur les corps finis et il y a une théorie très riche mais je vais parler uniquement de la théorie classique, c'est-à-dire la théorie complexe. On ne connaissait pas l'existence de nombres transcendants avant que Liouville en exhibe certains explicitement. La méthode de Liouville consiste à établir une propriété d'approximation pour les nombres algébriques. Il a établi un théorème qui nous dit qu'un nombre algébrique ne peut pas être trop proche d'un rationnel.

Théorème de Liouville.
Si α est un nombre algébrique de degré d, il existe une constante réelle $C(\alpha) > 0$

telle que, pour tout rationnel p/q différent de α, on ait

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C(\alpha)}{|q|^d}.$$

Deux mots sur la preuve. Je ne donnerai pas toutes les démonstrations des théorèmes que je vais énoncer. Mais je peux vous expliquer celle-là : elle est très simple. On regarde le nombre $f(p/q)$ qui est non nul parce que l'on a supposé $\alpha \neq p/q$ et que l'on a pris pour f un polynôme à coefficients entiers rationnels de degré minimal annulant α. Le nombre $|f(p/q)|$ est un rationnel strictement positif donc plus grand que l'inverse de son dénominateur (qui vaut q^d). On a donc l'inégalité

$$\frac{1}{|q|^d} \leq \left| f\left(\frac{p}{q}\right)\right|.$$

Si p/q était très proche de α, $f(\alpha)$ et $f(p/q)$ seraient très proches l'un de l'autre. Et comme $f(\alpha)$ est nul, on aurait $f(p/q)$ petit. En fait, on vérifie (cela résulte d'une simple application du théorème des accroissements finis) qu'on a la relation

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \frac{1}{C(\alpha)}$$

où $C(\alpha)$ est une constante ne dépendant que de α. Cela nous donne l'inégalité qu'on voulait.

Si vous voulez appliquer ce théorème à un nombre comme $\chi = \sum_{n\geq 1} 2^{-n!}$, vous tronquez la série. Vous obtenez la somme $\sum_{n=1}^{N} 2^{-n!}$ qui est un nombre rationnel p_N/q_N. Vous avez alors cette suite $(p_N/q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge très vite vers χ. En fait, elle converge trop vite pour que l'inégalité du théorème soit vérifiée. Cela permet d'établir que le nombre χ est transcendant. Maintenant, pour $\xi = \sum_{n\geq 1} 2^{-n^2}$, on voit en fait que cet argument permet de montrer que ce nombre n'est pas rationnel. Vous écrivez que la somme $\sum_{n\geq 1} 2^{-n^2} = a/b$ et puis vous appliquez le même argument que celui de Liouville. Vous prenez le nombre $p_N/q_N = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n^2}$ obtenu en tronquant la série à l'ordre N, où $q_N = 2^{N^2}$, et puis vous regardez $a/b - p_N/q_N$. La difficulté dans ce genre d'estimations est de vérifer que le nombre n'est pas nul. Mais là, c'est facile parce que le nombre a/b est strictement plus grand que p_N/q_N : $a/b - p_N/q_N = \sum_{n>N} 2^{-n^2} > 0$ puisque tous les termes de la série sont strictement positifs. Il n'est pas très difficile de majorer $a/b - p_N/q_N$ car on a une série qui converge suffisamment vite et en fait, c'est le premier terme du reste de la série qui va dominer $a/b - p_N/q_N$. On a donc la relation

$$0 < \frac{a}{b} - \frac{p}{q} < \frac{2}{2^{(N+1)^2}}.$$

Comme précédemment, le rationnel $a/b - p_N/q_N$ étant strictement positif, on peut écrire $a/b - p_N/q_N \geq 1/bq_N$. On a donc obtenu les inégalités

$$\frac{1}{bq_N} \leq \frac{a}{b} - \frac{p}{q} < \frac{2}{2^{(N+1)^2}}$$

où $q_N = 2^{N^2}$ et b est fixe (il ne dépend pas de N). On fait alors tendre N vers l'infini et on voit que les deux inégalités ne sont pas compatibles. Le nombre ξ n'est donc pas rationnel.

Voilà, je vous ai expliqué ça un petit peu en détail pour vous dire qu'une fois que Liouville a démontré que ce nombre n'était pas rationnel, on s'est demandé s'il était transcendant ou non. Les premiers travaux qui ont été faits là-dessus sont dus à un mathématicien russe, Tschakalov, dont la méthode a été reprise par Bundschuh [Bu]. Ce dernier démontre un résultat un peu paradoxal : il a prouvé que ξ n'est pas un nombre de Liouville. On appelle nombre de Liouville un nombre réel transcendant dont la démonstration de transcendance s'obtient par le même argument que celui de Liouville. C'est un nombre qui est très bien approché par des rationnels. Il est plus facile de dire ce qu'est un nombre qui n'est pas de Liouville : cela signifie que l'on a

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C_0}{|q|^{C_1}} \tag{2}$$

où C_0 et C_1 sont deux constantes réelles positives dépendant de ξ et p/q un nombre rationnel quelconque. L'argument utilisé précédemment consistait à tronquer la série mais on pouvait se demander s'il n'y avait pas de nombres rationnels qui approchaient mieux la série. Bundschuh démontre qu'il n'y en a pas.

Si vous voulez une estimation plus faible que celle de (2), il y en a une qui est facile à obtenir (c'est une remarque de M. Mignotte). Au lieu de C_1, on peut mettre $\log\log q$ (c'est moins bon) mais la démonstration est très simple car elle consiste à reprendre la démonstration de l'irrationalité de ξ. Cela donne un résultat effectif mais évidemment pas aussi bon que celui de Bundschuh.

Finalement, je vais vous donner la réponse à la question que je vous ai posée en début d'exposé.

Théorème 1 (Nesterenko 1996).
Le nombre ξ est transcendant.

J'ai déjà eu l'occasion de citer ce théorème à pas mal de collègues qui ne sont pas spécialement intéressés par la théorie des nombres et qui font soit d'autres mathématiques soit de la physique théorique, par exemple. La réaction a presque toujours été “Quel est l'intérêt de ce résultat?”. Je crois que le premier intérêt est que c'était un problème ouvert depuis très longtemps. C'était un problème sur lequel des gens avaient travaillé et qu'on ne voyait pas comment aborder.

La solution va venir de l'étude des fonctions thêta : on remplace 2^{-1} par z et on regardera ce qui se passe au point $z = 1/2$. Ces fonctions thêta ont été pas mal étudiées (c'est précisément ce dont je vais vous parler). Mais ces études ne permettaient pas d'obtenir la transcendance de ξ. C'est ça, la première motivation de l'obtention de ce résultat. Il y a d'autres motivations à cette étude et en particulier, le fait que certains résultats de transcendance ont des applications à d'autres domaines. Cela demanderait beaucoup de développements et je ne veux pas aller dans cette direction-là. Je vais garder la première motivation de l'intérêt philosophique, théorique de démontrer que des nombres sont transcendants. Il serait très intéressant d'arriver à résoudre certains problèmes ouverts comme le problème de la transcendance de $\zeta(3) = \sum_{n\geq 1} n^{-3}$. On sait que ce nombre est irrationnel par des travaux d'Apéry mais on ne sait pas du tout s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels de degré $2, 3$ ou 4... Il est probablement transcendant. Si on remplace n^{-3} par n^{-2}, on obtient $\pi^2/6$ et on sait que c'est un nombre transcendant. Les constructions qu'a données Liouville permettent d'obtenir des nombres transcendants mais ce sont des nombres qui sont fabriqués pour être transcendants. La première démonstration de transcendance d'un nombre qui apparaissait naturellement avant, c'était le travail d'Hermite sur la transcendance de e.

Théorème (Hermite 1871).
Le nombre e est transcendant.

Là aussi, en quelque sorte, c'était un résultat un peu gratuit mais la démonstration d'Hermite a eu des conséquences dans beaucoup de domaines. En particulier, les constructions que faisait Hermite ont permis de donner naissance à ce que l'on appelle maintenant les approximants de Padé qui se révèlent utiles dans beaucoup d'applications. Le problème ouvert à cette époque-là était la transcendance de π qui a été démontrée par Lindemann.

Théorème (Lindemann 1881).
Le nombre π est transcendant.

C'était un problème considéré comme important parce qu'il résolvait définitivement le problème de la quadrature du cercle. Là aussi, on peut se poser des questions sur la motivation. Un des intérêts de cette étude était qu'il s'agissait d'un problème très ancien.

Si je vous donne ces résultats-là, c'est pour vous dire qu'il y a avec les deux nombres e et π des problèmes ouverts qu'on ne sait vraiment pas attaquer. Par exemple, je voudrais donner un second problème ouvert après la transcendance de $\zeta(3)$, c'est celui de l'irrationalité de $e\pi$. On conjecture qu'il est transcendant mais on ne sait même pas montrer qu'il est irrationnel. De manière un peu surprenante, quand on prend les deux nombres e et π, on peut former d'autres quantités sur lesquelles on peut dire quelque chose. Un exemple en est le nombre e^π. Ça paraît un peu bizarre que l'on ne sache rien dire sur $e\pi$ et que l'on sache quelque chose sur e^π. Ce nombre e^π apparaît déjà (implicitement) dans un travail d'Euler. La question a été reprise par Hilbert en 1900 dans le septième de ses vingt-trois problèmes. Ce problème a été résolu sous la forme e^π (ce que demandait Hilbert était un peu plus général) par Gelfond en 1929.

Théorème (Gelfond 1929).
Le nombre e^π est transcendant.

Pourquoi peut-on dire quelque chose sur e^π alors qu'on n'y arrive pas pour $e\pi$? Eh bien, c'est parce que e^π a une propriété bien connue, c'est que $(e^\pi)^i = -1$. En gros, si vous remplacez i et -1 par deux nombres algébriques α et β quelconques, vous avez le même résultat : si une puissance algébrique (irrationnelle) d'un nombre donné est algébrique, le nombre considéré est transcendant. Je vais donner un exemple parce qu'il apparaît aussi quelquefois. Si vous prenez le nombre $e^{\pi\sqrt{163}}$, il est lui aussi transcendant puisqu'on a encore $\left(e^{\pi\sqrt{163}}\right)^{i\sqrt{163}} = -1$.

Maintenant, quand on regarde ces différentes questions, on a envie de poser des problèmes un petit peu plus généraux. Par exemple, si vous voyez le nombre $e\pi$, vous pouvez poser la même question pour d'autres quantités formées avec e et π, par exemple, la somme $e + \pi$. Si on veut poser un problème un peu plus général, on est amené à regarder des questions d'indépendance algébrique.

Conjecture.
Les nombres e et π sont algébriquement indépendants.

Cela signifie que si P est un polynôme de $\mathbb{Z}[X, Y]$ non nul alors $P(e, \pi) \neq 0$. On a un énoncé équivalent qui semble plus fort mais qui ne l'est pas (c'est un petit argument d'algèbre). Si l'on considère un polynôme P non constant de $\overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$ ($\overline{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des nombres algébriques complexes, c'est aussi la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$), alors le nombre $P(e, \pi)$ doit être transcendant.

Cette conjecture donne que des nombres comme $e\pi$, $e + \pi$ et tous les nombres fabriqués à partir de e et π par des opérations algébriques devraient être transcendants. On n'a aucune idée sur ce problème-là. Mais, je vous disais que, quelquefois, il y a des nombres qu'on arrive à maîtriser mieux que d'autres de manière assez surprenante. C'est précisement le cas pour e^π. On sait dire des choses sur e^π que l'on ne connaît pas encore sur e.

Théorème 2 (Nesterenko 1996).
Les nombres π et e^π sont algébriquement indépendants.

Il se trouve que les Théorèmes 1 et 2 sont les corollaires d'un énoncé plus général qui fait intervenir les fonctions modulaires. J'aimerais vous expliquer comment les fonctions modulaires interviennent pour montrer des résultats comme ceux-là. Il y a donc deux histoires à vous raconter (en fait, elles n'en font qu'une). Il y a l'histoire du nombre ξ et l'histoire de π et e^π. Pour le nombre ξ, vous avez vu comment il s'écrivait – cf. (1) –, il est assez naturel de faire intervenir une fonction qui est la somme $\sum_{n\geq 1} z^{n^2}$. En fait, pour ne pas se limiter aux entiers plus grands que 1, on va faire la somme sur tous les entiers rationnels. Quand n sera négatif, n^2 sera le même et pour $n=0$, on obtient 1. On va donc considérer la fonction $1+2\sum_{n\geq 1} z^{n^2}$ qui est en fait la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n^2}$. Cette fonction que l'on appelle θ_3 est une fonction thêta intéressante qui a été utilisée par Jacobi pour regarder la décomposition des nombres entiers en sommes de carrés, pour redémontrer que tout nombre entier est somme de quatre carrés[2] et compter combien il y a de décompositions. Cette fonction n'intervient pas toute seule, elle intervient avec deux de ses copines θ_2 et θ_4. On définit ces trois fonctions comme suit

$$\begin{aligned}
\theta_2(z) &= 2z^{1/4}\sum_{n\geq 0} z^{n(n+1)}\\
\theta_3(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n^2}\\
\theta_4(z) &= \theta_3(-z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n z^{n^2}.
\end{aligned}$$

Les notations θ_2, θ_3, θ_4 sont plus ou moins standard. Elles varient suivant les auteurs mais celles-là sont assez classiques. En fait, il y a toute une famille de fonctions thêta avec des fonctions qui dépendent de deux variables. J'ai pris les notations les plus simples qui correspondent à ce dont j'ai besoin. La variable z est souvent marquée q dans les livres. Pour l'instant, on peut regarder ces fonctions comme des séries formelles. Mais si on veut les regarder convergentes, on prend z de module plus petit que 1 et ces trois séries convergent. Les séries sont données avec $n(n+1)$, n^2 ou bien n^2 avec un coefficient mais on peut aussi écrire

[2] c'est un théorème de Lagrange (N.D.R.).

ces fonctions comme des produits infinis. Ce sont des formules assez classiques :

$$\begin{aligned}
\theta_2(z) &= 2z^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{4n})(1+z^{2n})\\
\theta_3(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{2n})(1+z^{2n-1})^2\\
\theta_4(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{2n})(1-z^{2n-1})^2.
\end{aligned}$$

On a donc trois fonctions θ_2, θ_3, θ_4. On a besoin de ces trois fonctions pour travailler : on travaille plus facilement avec les trois qu'en en prenant une seule.

Les formules exactes ne sont pas très importantes. Je voudrais vous expliquer qu'en fait, il y a d'autres fonctions modulaires qui sont très liées à θ_2, θ_3, θ_4 (on verra le lien tout à l'heure) et sur lesquelles on va travailler de manière un petit peu plus facile. Ce sont les fonctions modulaires de Ramanujan définies comme suit :

$$\begin{aligned}
P(z) &= E_2(z) = 1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{1-z^n},\\
Q(z) &= E_4(z) = 1+240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3z^n}{1-z^n},\\
R(z) &= E_6(z) = 1-504\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5z^n}{1-z^n},\\
\Delta &= \frac{1}{1728}\left(Q^3-R^2\right) = z\prod_{n\geq 1}(1-z^n)^{24},\\
J &= \frac{Q^3}{\Delta}\\
&= \frac{1}{z}+744+196884z+21493760z^2+\cdots,\\
j(\tau) &= J(e^{2i\pi\tau}),\quad \tau\in\mathfrak{H}=\{\tau\in\mathbb{C};\ \Im m(\tau)>0\}.
\end{aligned}$$

Les notations P, Q, R sont les notations de Ramanujan. Les notations E_2, E_4 et E_6 sont celles des séries d'Eisenstein de poids 2, 4 et 6 respectivement. Évidemment, on peut se poser la question : pourquoi les coefficients 24, 240 et 504 ? Ça, c'est aussi toute une histoire mais disons que ça va bien marcher avec ces coefficients-là. La fonction sur laquelle je vais travailler maintenant, c'est surtout la fonction J. On a besoin de la chose suivante : il existe une fonction $j(\tau)$ (qui va être la plus intéressante pour nous) où τ appartient à $\mathfrak{H}$, le demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble des complexes de partie imaginaire > 0. Cette fonction j est périodique de période 1, elle a un développement de Fourier en $z = e^{2i\pi\tau}$ commençant par $(1/z) + 744$. La propriété essentielle de cette fonction j est son invariance sous l'action du groupe modulaire. C'est à cause de cette propriété que le mot modulaire apparaît ici. On a donc la propriété suivante :

$$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau) \quad \text{pour tout} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ tels que } ad - bc = 1.$$

Il n'y a qu'une seule fonction qui vérifie cette propriété si l'on impose deux normalisations. La première est d'avoir un pôle simple à l'infini de résidu 1. La seconde, c'est le coefficient 744, qui est le bon coefficient étant donné les relations précédentes. Cette fonction j apparaît dans la théorie de la multiplication complexe. Je n'en ai pas besoin ici, c'est juste pour dire que cette fonction a été beaucoup étudiée au $19^{\text{ème}}$ siècle, et on a montré en particulier que si τ est algébrique de degré 2, et appartient à $\mathfrak{H}$ (les deux conditions entraînent que τ est alors quadratique imaginaire), alors $j(\tau)$ est algébrique. C'est vraiment très utile quand on sait qu'un nombre est algébrique car il a une structure arithmétique qui est riche. Il est beaucoup plus intéressant de savoir qu'un nombre est algébrique que de savoir qu'un nombre est transcendant. Ce nombre $j(\tau)$ a beaucoup de propriétés. On sait, en particulier, qu'il est entier algébrique, i.e. qu'il annule un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ dont le coefficient dominant est 1, et que son degré est le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\tau)$. En regardant cet énoncé sur τ et $j(\tau)$, il était assez naturel, dans le cadre de la multiplication complexe, de se demander s'il existait d'autres valeurs algébriques de τ pour lesquelles $j(\tau)$ soit aussi algébrique. La réponse est un petit peu décevante parce qu'elle est négative.

Théorème (Schneider).
Soit $\tau \in \mathfrak{H}$. Si τ et $j(\tau)$ sont tous deux algébriques, alors τ est quadratique.

Avant d'expliquer la démonstration, je voudrais tout de suite donner un problème ouvert posé par Schneider lui-même et qui est relié à cela.

Problème ouvert (deuxième problème de Schneider). *Démontrer ce théorème en utilisant la fonction modulaire $j(\tau) = J(e^{2i\pi\tau}) = \frac{1}{e^{2i\pi\tau}} + 744 + \cdots$.*

C'est un problème intéressant et on a l'impression, après les progrès récents qui ont été faits, que l'on n'est pas si loin que ça de la résolution de ce problème. Mais pour l'instant, cela reste un problème ouvert. Pour que ce problème ait un sens, il faut voir ce que fait Schneider et voir qu'il n'utilise pas la fonction modulaire j en tant que telle. Il fait un détour par les fonctions elliptiques. Je vous explique en quelques mots quels sont les ingrédients qui apparaissent dans la démonstration de Schneider. On part de notre nombre $\tau \in \mathfrak{H}$. On pose

$q = e^{2i\pi\tau}$ (c'est la transformation de variable qui fait passer de J à j qu'on avait tout à l'heure). Ensuite, on va faire intervenir une courbe elliptique. Une courbe elliptique est le quotient du plan complexe par un réseau. Ce réseau va avoir deux périodes fondamentales $\omega_1 = 2\pi\Delta(q)^{1/12}$ (on va voir pourquoi c'est un bon choix) et $\omega_2 = \tau\omega_1$. Quand on a deux périodes ω_1 et ω_2, on sait construire une fonction elliptique $\wp$. C'est une solution d'une équation différentielle

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

La fonction $\wp$ est périodique de périodes ω_1 et ω_2. On peut calculer les coefficients g_2 et g_3 à partir des séries d'Eisenstein $G_{2k}(\tau)$ définies par la relation

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\\(m,n)\neq(0,0)}} (m+n\tau)^{-2k}, \quad k > 1.$$

En fait, la série $G_{2k}(\tau)$ est la même chose que E_k à une normalisation près. C'est juste le coefficient dominant qui change. On a alors les valeurs

$$g_2 = 60G_4(\tau)/\omega_1^4, \qquad g_3 = 140G_6(\tau)/\omega_1^6.$$

Le choix de ω_1 est fait de telle manière que les deux nombres g_2 et g_3 soient des nombres algébriques. La raison est que l'on a les deux égalités

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 1, \tag{3}$$

$$1728g_2^3 = j(\tau). \tag{4}$$

Comme $j(\tau)$ est algébrique, g_2 l'est aussi grâce à la relation (4). La relation (3) entraîne alors que g_3 est algébrique.

Ensuite, on considère deux fonctions elliptiques :

$$f_1(z) = \wp(z), \quad f_2(z) = \wp(\tau z).$$

On va regarder ces deux fonctions méromorphes aux points $z = (m+1/2)\omega_1, m \in \mathbb{Z}$ (qui sont en nombre infini). Les valeurs qu'elles prennent en ces points-là sont des nombres algébriques. On a donc deux fonctions qui prennent des valeurs algébriques en beaucoup de points et qui vérifient des équations différentielles faisant intervenir le corps de nombres

$$K = \mathbb{Q}\left(g_2, g_3, \tau, \wp(\omega_1/2), \wp(\omega_2/2)\right).$$

On vérifie que la dérivation par rapport à z laisse stable l'anneau $K[f_1, f_2, f_1', f_2']$. Il y a un théorème général que l'on appelle le critère de Schneider-Lang et qui permet de dire que, lorsque toutes ces conditions sont satisfaites, les deux fonctions f_1 et f_2 doivent être algébriquement dépendantes. À partir de là, c'est un petit argument, disons algébrique, qui permet de vérifier que le nombre τ doit correspondre à un endomorphisme de la courbe elliptique, donc que τ est quadratique.

C'était une démonstration très rapide mais c'est juste pour vous donner une idée de ce qui est sous-jacent à ces résultats de transcendance. On travaille avec des fonctions qui prennent des valeurs algébriques en certains points et qui vérifient des équations différentielles. On peut montrer que ça ne peut arriver que dans des cas dégénérés qui vont correspondre à τ quadratique.

Schneider a démontré pas mal de résultats de transcendance sur les fonctions elliptiques. Ses résultats ont permis à Daniel Bertrand [Be1] de démontrer, il y a une vingtaine d'années, les premiers résultats de transcendance qu'on connaisse sur les fonctions modulaires. Pour ça, il faut voir qu'il y a un lien entre les fonctions modulaires et les fonctions elliptiques. On en a vu un (enfin, vu, c'est peut-être beaucoup dire), c'est le nombre $j(\tau)$ qui apparaît dans le cadre des fonctions elliptiques. Il y a des liens assez étroits entre les courbes elliptiques et les fonctions modulaires. Je vais vous montrer les formules que l'on a. Ce sont des formules très classiques qui étaient connues il y a un siècle.

Quand on a un nombre τ, on peut l'écrire sous la forme ω_2/ω_1 de beaucoup de manières différentes et les formules que l'on obtient sont homogènes. Mais, c'est mieux de ne pas fixer $\omega_1 = 1$, je préfère prendre ω_2 et ω_1. Je pars d'un nombre $\tau \in \mathfrak{H}$ et je regarde deux nombres complexes dont le quotient est τ. Quand on a ω_1 et ω_2, on leur associe un réseau $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. À ce réseau, on associe la fonction σ (c'est le produit canonique de Weierstrass) définie par

$$\sigma(z) = z \prod_{\substack{\omega\in\Omega \\ \omega\neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{z/\omega + z^2/(2\omega^2)}.$$

C'est la plus petite fonction en un certain sens qui s'annule en tous les points du réseau. Quand on prend la dérivée logarithmique de σ, ce qui est assez naturel car c'est un produit infini, on obtient la fonction $\zeta = \sigma'/\sigma$ de Weierstrass et quand on prend l'opposé de la dérivée de ζ, on obtient la fonction elliptique $\wp = -\zeta'$ de Weierstrass dont je parlais tout à l'heure. Vous voyez que les formules sont relativement explicites pour trouver la fonction $\wp$ quand on connaît ω_1 et ω_2. Les périodes ω_1 et ω_2 jouent un rôle important mais en fait, les quasi-périodes jouent un rôle presque aussi important. La fonction ζ n'est pas périodique mais sa dérivée l'est. Elle est donc ce que l'on appelle quasi-périodique : on a $\zeta(z+\omega_1) = \zeta(z) + \eta_1$. Le lien entre les courbes elliptiques et les fonctions modulaires nous est donné par des formules très classiques qui permettent de calculer les valeurs des fonctions P, Q, R et Δ que j'avais définies précédemment (c'étaient les séries d'Eisenstein) en fonction des nombres ω_1, η_1, g_2 et g_3. On a

$$\begin{aligned} P(q) &= 3\frac{\omega_1}{\pi}\cdot\frac{\eta_1}{\pi} \\ Q(q) &= \frac{3}{4}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^4 g_2 \\ R(q) &= \frac{27}{8}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^6 g_3 \\ \Delta(q) &= \left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{12}(g_2^3-27g_3^2). \end{aligned}$$

Dans la pratique, on va s'arranger pour avoir g_2 et g_3 algébriques. C'est ce que j'avais fait tout à l'heure avec le choix de $\omega_1 = 2\pi\Delta(q)^{1/12}$. Donc g_2 et g_3 sont des nombres algébriques et, comme on s'intéresse à des problèmes de transcendance, on peut essentiellement les ignorer. Vous voyez que, si l'on veut connaître P, Q, R, il suffit de connaître η_1, ω_1 et π. Donc regarder P, Q, R ou η_1, ω_1 et π, c'est essentiellement la même chose. Quelquefois, c'est mieux de regarder Δ parce que Δ ne s'annule jamais (dans le disque unité ouvert épointé). Cette fonction Δ est assez utile.

Toutes ces formules sont assez générales. On peut se poser la question de savoir ce que cela donne concrètement si l'on prend une courbe elliptique, que l'on se donne g_2, g_3 et que l'on veut tout calculer. Je considère deux exemples très concrets. Le premier est la courbe d'équation $y^2 = 4x^3 - 4x$. On a

$$g_2 = 4, \quad g_3 = 0, \quad j = 1728, \quad \tau = i, \quad q = e^{-2\pi}.$$

Les quantités g_2, g_3 et j se calculent facilement. Le fait que $\tau = i$ soit quadratique correspond au fait que la courbe elliptique admet des endomorphismes non triviaux. Enfin, comme $q = e^{2i\pi\tau}$, on a la dernière relation. Pour ω_1, on a toujours le même genre de formule

$$\omega_1 = 2\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3-4t}} = \frac{1}{2}B(1/4, 1/2) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{\sqrt{8\pi}},$$

où B et Γ sont les fonctions Bêta et Gamma d'Euler. On a finalement

$$\omega_2 = i\omega_1, \qquad \eta_1 = i\eta_2 = \frac{\pi}{\omega_1}.$$

En gros, il suffit de connaître ω_1 et on trouve tous les autres à partir de là. On voit apparaître dans la formule de ω_1 le nombre $\Gamma(1/4)$. Si l'on remplace dans l'équation de la courbe $4x$ par 4, on voit apparaître $\Gamma(1/3)$ et puis des formules qui sont du même genre. On considère la courbe elliptique d'équation $y^2 = 4x^3 - 4$. On a alors

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 4, \quad j = 0, \quad \tau = \varrho = e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad q = -e^{-\pi\sqrt{3}},$$

et
$$\omega_1 = 2\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3-4}} = \frac{1}{3}B(1/6,1/2) = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}\pi},$$
$$\omega_2 = \varrho\omega_1, \qquad \eta_1 = \varrho\eta_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{\omega_1}.$$
Je voudrais énoncer maintenant un troisième théorème.

Théorème 3 (Chudnovsky 1976).
Les nombres π et $\Gamma(1/4)$ sont algébriquement indépendants. Il en est de même pour les nombres π et $\Gamma(1/3)$.

La démonstration de Chudnovsky utilise les courbes elliptiques que l'on vient de regarder. La preuve ressemble dans une certaine mesure à celle de Schneider. Chudnovsky va utiliser la fonction elliptique $\wp$ qui est la fonction de Weierstrass associée à la courbe elliptique. De manière générale, Chudnovsky donne un énoncé d'indépendance algébrique sur les périodes $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$ dont voici un corollaire qui provient de travaux de Daniel Bertrand.

Théorème plus général (énoncé dû à Daniel Bertrand).
Si $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$, $J(q)$ algébrique alors les nombres $P(q), \Delta(q)$ sont algébriquement indépendants.

Il est assez naturel de supposer $J(q)$ algébrique parce qu'on travaille avec des nombres g_2, g_3 algébriques. Si on prend $q = -e^{-2\pi}$ ou $q = -e^{-\pi\sqrt{3}}$, on retrouve l'indépendance algébrique de π et $\Gamma(1/4)$ ou π et $\Gamma(1/3)$. C'est donc plutôt comme ça que je voudrais énoncer le résultat de Chudnovsky bien que lui-même ne l'énonce pas du tout sous cette forme-là. Il est intéressant historiquement de noter que, lorsque Chudnovsky a démontré ce théorème, on ne savait pas démontrer que $\Gamma(1/4)$ ou $\Gamma(1/3)$ étaient des nombres transcendants. C'était un problème ouvert. On ne savait même pas montrer leur irrationalité. La méthode est un petit peu limitée en ce sens que l'on a $1/4, 1/3$ (pour $1/2$, on sait puisque $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$) mais on ne sait pas démontrer que $\Gamma(1/5)$ est irrationnel.

C'est donc Daniel Bertrand qui a déduit pas mal de corollaires de ce genre-là provenant des travaux de Schneider [Be1] ou de Chudnovsky [Be2],[Be3],[Be4]. Mais c'était toujours la même démarche :
– on utilisait des fonctions elliptiques, des équations différentielles et puis des variantes de la méthode de Schneider ;
– on avait des résultats sur les nombres ω et η ;
– on traduisait ces résultats en termes de fonctions P et Q à l'aide des formules que je vous ai données ;

– puis on avait des résultats de transcendance sur des valeurs de fonctions modulaires.

Ce n'est pas très satisfaisant car on voudrait bien (un peu dans l'esprit du deuxième problème de Schneider) utiliser les propriétés des fonctions modulaires. En particulier, il y a une question qui apparaît dans des travaux de Mahler et des travaux de Manin et qui concerne le nombre $J(q)$. Il s'agit de démontrer que si q est algébrique, alors $J(q)$ est transcendant ou, si vous préférez, si $J(q)$ est algébrique, alors q est transcendant. C'est la solution de ce problème qui a débloqué la situation. Elle a été trouvée en 1995.

Théorème 4 (Barré-Sirieix, Diaz, Gramain, Philibert 1995) ou Théorème Stéphanois.
Soit q un nombre algébrique, $0 < |q| < 1$, alors $J(q)$ transcendant.

Le nom de Théorème Stéphanois provient du fait que les quatre personnes qui l'ont prouvé font partie du laboratoire de Théorie des Nombres de Saint-Étienne. Il est un peu plus utile de l'énoncer dans le sens inverse (si $J(q)$ est algébrique alors q est transcendant) parce que cela a des applications, en particulier sur l'arithmétique des fonctions elliptiques (mais c'est le cas p-adique qui est alors le plus intéressant). La démonstration de l'équipe stéphanoise utilise la fonction j et ses propriétés d'invariance sous l'action du groupe modulaire. C'est donc une démonstration de nature différente de celles qui avaient été faites précédemment. C'est en développant la méthode stéphanoise que Nesterenko a démontré son résultat. Ce dernier englobe les deux premiers que j'avais donnés. Je vais vous expliquer pourquoi.

Théorème 5 (Nesterenko 1996).
Pour tout $q \in \mathbb{C}, 0 < |q| < 1$, trois au moins des quatre nombres $q, P(q), Q(q), R(q)$ sont algébriquement indépendants.

J'ai défini l'indépendance algébrique de deux nombres, je vais peut-être définir l'indépendance algébrique de trois nombres α, β, γ : pour tout polynôme $H \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$ non nul, vous avez $H(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. Parmi ces quatre nombres, il y en a au moins trois qui possèdent cette propriété. C'est donc ça le théorème général. On ne peut pas espérer mieux parce que si vous prenez par exemple q algébrique, alors il ne vous reste plus que trois nombres. Il est peut-être plus intéressant aussi de prendre $J(q)$ algébrique : on a alors une relation entre Q et R, qui est justement le fait que $J(q)$ soit algébrique. On a un premier corollaire qui étend bien le Théorème de Chudnovsky.

Corollaire.
Si $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$, avec $J(q)$ algébrique alors $q, P(q), \Delta(q)$ sont algébriquement indépendants.

On peut regarder maintenant des valeurs spéciales de q qui vont donner à $J(q)$ des valeurs algébriques. Il y a deux valeurs spécialement intéressantes. La première est $q = -e^{-2\pi}$ qui donne l'indépendance algébrique de $\pi, \Gamma(1/4)$ et e^{π}. C'est assez amusant : on ne sait pas démontrer directement que π et e^{π} sont algébriquement indépendants autrement que par cette voie-là qui fait intervenir $\Gamma(1/4)$. La deuxième valeur est $q = -e^{-\pi\sqrt{3}}$. Elle permet de montrer que $\pi, \Gamma(1/3)$ et $e^{\pi\sqrt{3}}$ sont algébriquement indépendants. On ne sait toujours pas faire avec $\Gamma(1/5)$. Si on voulait traiter le cas de $\Gamma(1/5)$, ce ne sont plus des courbes elliptiques qui interviendraient mais des variétés abéliennes. Il faut développer la théorie : on peut espérer que ce sera fait dans un avenir proche. Le Théorème 2 est donc un corollaire du Théorème 5. Maintenant, il me reste à vous expliquer le lien entre le Théorème 1 et le Théorème 5. Je vous rappelle que le Théorème 1 affirmait la transcendance du nombre $\xi = \sum_{n\geq 1} 2^{-n^2}$. Le lien avec le Théorème 5 se fait si on a des rapports entre les séries d'Eisenstein P, Q, R et des fonctions thêta. C'est de ces rapports, classiques eux aussi, que je vais parler maintenant. La fonction qui nous intéresse est la fonction $\theta_3(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n^2}$. On voudrait montrer que cette fonction prend des valeurs transcendantes en des points algébriques. On fait intervenir θ_2 et θ_4 et on regarde les trois relations suivantes

$$\begin{aligned} \theta_3^4 &= \theta_2^4 + \theta_4^4, \\ Q(z^2) &= 2^{-1}\left(\theta_2(z)^8 + \theta_3(z)^8 + \theta_4(z)^8\right), \\ \Delta(z^2) &= 2^{-8}\left(\theta_2(z)\theta_3(z)\theta_4(z)\right)^8. \end{aligned}$$

Il n'est pas très difficile de voir (c'est de la théorie de l'élimination très élémentaire) que si vous avez un résultat sur deux des fonctions thêta (θ_2 et θ_3 par exemple, ou θ_2 et θ_4), si vous savez par exemple que l'un des nombres est transcendant, vous en déduisez la même chose sur Q et Δ. Il suffit de considérer l'opérateur $D = z(d/dz)$. On a alors les relations

$$\begin{aligned} \theta_2^4 &= 4(D\theta_4/\theta_4 - D\theta_3/\theta_3) \\ \theta_4^4 &= 4(D\theta_2/\theta_2 - D\theta_3/\theta_3). \end{aligned}$$

On peut énoncer le résultat général. Pour $i \neq j$, les deux corps $\mathbb{Q}(\theta_i(z), \theta_j(z))$ et $\mathbb{Q}(P(z^2), Q(z^2))$ ont même clôture algébrique. Donc il revient au même de regarder le degré de transcendance de l'un ou de l'autre (i.e. regarder combien il y a d'éléments algébriquement indépendants dans l'un ou dans l'autre). On a donc Q et Δ en fonction de θ_2, θ_3 et θ_4. Maintenant, on voudrait aussi P parce que P apparaît dans le Théorème de Nesterenko. On l'obtient en prenant une dérivée logarithmique. On prend celle qu'on veut, par exemple $D\theta_3/\theta_3$. Que l'on prenne l'une ou l'autre, cela revient au même parce qu'il y a des liens entre elles. On connaît la fonction P quand on connaît $D\theta/\theta$. On a

$$P(z^2) = 4\left(D\theta_2/\theta_2 + D\theta_3/\theta_3 + D\theta_4/\theta_4\right)(z).$$

On peut donc déduire l'énoncé suivant. Les deux corps $\mathbb{Q}(\theta_i(z), \theta_j(z), D\theta_k(z))$ avec $i \neq j$ et $\mathbb{Q}(P(z^2), Q(z^2), R(z^2))$ ont même clôture algébrique. Avec ces différentes formules, on en déduit immédiatement le Corollaire suivant (remarqué par Daniel Bertrand) du Théorème de Nesterenko.

Corollaire (Bertrand).
Soient $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ avec $i \neq j$. Trois au moins des quatre nombres $q, \theta_i(q), \theta_j(q), D\theta_k(q)$ sont algébriquement indépendants.

L'exemple qui m'intéresse est celui où je prends $q = 1/2$ et $i = 3$. On voit que $\theta_3(q)$ est transcendant et en fait, on voit même qu'il est algébriquement indépendant de deux autres nombres que vous pouvez choisir dans une petite collection (mais ça revient au même que vous preniez l'un ou l'autre). Le nombre $\theta_3(q)$ est le nombre ξ. Pour les deux autres nombres, vous pouvez prendre $\xi = \sum_{n\geq 1} n^2 2^{-n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} n^4 2^{-n^2}$. Ces trois nombres sont algébriquement indépendants. Ce n'est pas la peine d'aller plus loin. Si vous prenez $\sum_{n\geq 1} n^6 2^{-n^2}$, vous aurez des relations provenant de celles qu'il y a entre les dérivées des fonctions thêta :

$$\begin{aligned}
12\frac{DP}{P} &= P - \frac{Q}{P},\\
3\frac{DQ}{Q} &= P - \frac{R}{Q},\\
2\frac{DR}{R} &= P - \frac{Q^2}{R},
\end{aligned}$$

$$\frac{DJ}{J} = -\frac{R}{Q}, \qquad \frac{DJ}{J-1728} = -\frac{Q^2}{R},$$

$$6\frac{D^2J}{DJ} = P - \frac{4R}{Q} - \frac{3Q^2}{R}.$$

En fait, on peut dire que le corps obtenu en adjoignant les fonctions thêta à $\mathbb{C}$ est un corps différentiel. Tout élément de ce corps satisfait une équation différentielle d'ordre inférieur ou égal à deux.

J'aimerais bien parler maintenant de quelques problèmes ouverts qui sont liés à ces questions-là. En fait, il y a déjà pas mal de problèmes ouverts dont j'ai parlé chemin faisant. Vous avez pu voir qu'il y a des progrès récents qui ont été faits mais qu'en même temps, il y a beaucoup de questions qui ne sont pas résolues. On a fait des progrès mais il y a beaucoup d'autres choses qui restent à découvrir. Je voudrais concentrer le reste de l'exposé sur trois questions qui sont apparues depuis un an et qui concernent toutes les trois la fonction J. Le premier problème vient de Guy Diaz.

Problème 1 (Diaz).
Si $q \in \mathbb{C}$ satisfait $q \notin \mathbb{R}$, $0 < |q| < 1$ et $J(q) \in [0, 1728]$, alors q est transcendant.

Je vais vous expliquer pourquoi on fait cette conjecture, ce n'est pas tout à fait gratuit. Je pose tout de suite les deux autres problèmes.

Problème 2 (D. Bertrand).
La fonction J est injective sur $\overline{\mathbb{Q}}^* \cap D(0,1)$.

Problème 3 (D. Bertrand).
Soient α_1 et α_2 deux nombres algébriques multiplicativement indépendants dans le domaine $\{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < |z| < 1\}$, alors les deux nombres $J(\alpha_1)$ et $J(\alpha_2)$ sont algébriquement indépendants.

On dit que deux nombres α et β sont multiplicativement indépendants si la relation $\alpha^a\beta^b = 1$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ entraîne $a = b = 0$. Il y a des rapports entre ces trois problèmes. D'abord ils sont tous les trois ouverts mais il y a d'autres liens que je vais vous expliquer.

Une conjecture classique en théorie des nombres transcendants est la conjecture des quatre exponentielles, et je vais vous expliquer pourquoi elle est plus forte que les Problèmes 1 et 2, et pourquoi le Problème 3 implique un cas particulier de la conjecture des quatre exponentielles. Dit comme cela, ça n'est pas très fort, mais je vais être plus précis.

Quelle est cette conjecture des quatre exponentielles? J'ai déjà eu l'occasion d'en parler ici mais peut-être que vous n'étiez pas tous là alors je vais rappeler ce que c'est. Sous sa forme la plus simple, elle consiste à dire (et ça, c'est un problème qu'on ne sait pas résoudre) que si vous prenez un nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $2^x \in \mathbb{Z}$ et $3^x \in \mathbb{Z}$, alors $x \in \mathbb{N}$. Sous une forme voisine, le problème apparaît dans des travaux de Ramanujan sur les nombres supérieurs hautement composés (*superior highly composite numbers*). Ramanujan avait affirmé que le quotient de deux tels nombres consécutifs était un nombre premier. Alaoglu et Erdös se sont aperçus qu'il fallait un argument qui n'était pas encore connu et qui correspondait à la forme simple sous laquelle je viens d'énoncer la conjecture des quatre exponentielles. Depuis, ce problème a été étudié de manière un petit peu plus précise. On peut remplacer 2 et 3 par des nombres algébriques et $\mathbb{Z}$ par $\overline{\mathbb{Q}}$. On a donc quatre nombres algébriques $2, 3, 2^x, 3^x$ qui sont les quatre exponentielles. On peut alors donner un énoncé un petit peu plus général. Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha_1^x \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\alpha_2^x \in \overline{\mathbb{Q}}$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ non nuls multiplicativement indépendants alors $x \in \mathbb{Q}$. Il n'y a donc pas de relations autres que les triviales. Il y a plusieurs manières équivalentes d'énoncer ce problème, dont l'une fait intervenir quatre exponentielles. Je ne vais pas donner celle-là. Je vais en donner une qui fait intervenir des déterminants. Avant cela, je vais définir ce qu'est un logarithme d'un nombre algébrique. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, un logarithme de α est un nombre complexe noté $\log \alpha$ tel que $e^{\log \alpha} = \alpha$ (on n'est pas obligé de prendre une détermination principale).

Conjecture des quatre exponentielles.
On considère une matrice

$$M = \begin{pmatrix} \log \alpha_1 & \log \alpha_2 \\ \log \alpha_3 & \log \alpha_4 \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont des logarithmes de nombres algébriques. Si les deux lignes sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, et si les deux colonnes sont aussi linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, alors le déterminant de M ne s'annule pas.

La relation avec l'énoncé précédent est la suivante. Si α_1^x et α_2^x appartiennent à $\overline{\mathbb{Q}}$, on peut écrire $x = \log \alpha_3 / \log \alpha_1 = \log \alpha_4 / \log \alpha_2$. Le déterminant de M est alors nul ce qui ne peut arriver que dans les cas triviaux : soit α_1 et α_2 sont multiplicativement dépendants, soit $x \in \mathbb{Q}$.

Je vais vous expliquer le lien entre cette conjecture et ces trois problèmes. Revenons au premier problème. On a $q \in \mathbb{C}$, $q \notin \mathbb{R}$ et $J(q) \in [0, 1728]$. S'il existe τ dans le domaine fondamental (figure (1), page 19) tel que $q = e^{2i\pi\tau}$, alors $j(\tau) = J(q)$, et le fait que $j(\tau)$ appartienne à l'intervalle $[0, 1728]$ implique que τ est sur le cercle unité (pour le cas où q n'est pas de la forme $e^{2i\pi\tau}$ avec τ dans le domaine fondamental, voir [Wal4]).

Finalement, la question qui est posée dans le Problème 1 consiste à dire que si le nombre τ est de module 1, cela doit entraîner que q est un nombre transcendant :

Problème (Diaz).
Si $\tau \in \mathbb{C}, |\tau| = 1, \tau \neq \pm 1$, alors $e^{2i\pi\tau}$ est transcendant.

C'est assez curieux comme question parce que vous regardez $e^{2i\pi\tau}$ quand τ varie sur le cercle unité. On a presque l'impression que c'est une faute de frappe, mais c'est bien τ qui est de la forme $e^{2i\pi\theta}$ avec θ réel. Quand τ décrit le cercle unité, $e^{2i\pi\tau}$ va décrire une assez jolie courbe qui va éviter tous les nombres algébriques. On connait quelques autres courbes qui évitent tous les nombres

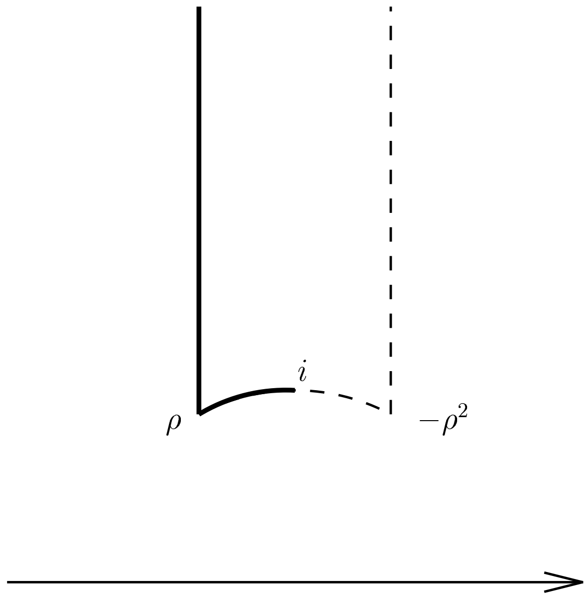

Figure 1. Domaine fondamental

algébriques : une droite d'équation $\Re e z = \alpha$ où α est un nombre transcendant, ne passera par aucun point de $\overline{\mathbb{Q}}$. Un cercle dont le rayon est un nombre transcendant et le centre un point algébrique (ou bien le rayon algébrique et le centre transcendant) ne contient aucun point de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Ce problème posé par G. Diaz est un cas particulier de la conjecture des quatre exponentielles. Pour le voir, on va supposer que $e^{2i\pi\tau}$ est un nombre algébrique α. Un logarithme de α est $2i\pi\tau$, que je vais noter $\log\alpha$. On sait que si un nombre est algébrique, son conjugué (complexe) est algébrique et si on a un logarithme d'un nombre algébrique, son conjugué l'est aussi. On peut définir un logarithme de $\bar{\alpha}$ en prenant $\log\bar{\alpha} = -2i\pi\bar{\tau}$. Maintenant, on écrit que τ est de module 1, i.e. $\tau\bar{\tau} = 1$. Cela donne la relation

$$-(2i\pi)^2 = (\log\alpha)(\log\bar{\alpha}).$$

Vous écrivez comme ça qu'un déterminant dont les coefficients sont des logarithmes de nombres algébriques est nul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} \log\alpha & 2i\pi \\ 2i\pi & \log\bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

On a donc dét $A = 0$ ce qui entraîne, d'après la conjecture, que $\log\alpha$ et $2i\pi$ (ou $2i\pi$ et $\log\bar{\alpha}$, ça revient au même) sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$. Cela n'est possible que si $\log\alpha$ est un multiple rationnel de $2i\pi$ donc α une racine de l'unité, c'est-à-dire ± 1. Cela explique le premier problème.

Pour le deuxième, c'est un petit peu la même chose. On veut regarder ce qui se passe quand $J(\alpha_1) = J(\alpha_2)$. Il faut montrer que $\alpha_1 = \alpha_2$. Le Problème 2 est encore une conséquence de la conjecture des quatre exponentielles. On part de α_1 et α_2 avec $J(\alpha_1) = J(\alpha_2)$. On va passer à la fonction j. On pose les relations

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e^{2i\pi\tau_1}, & \alpha_2 &= e^{2i\pi\tau_2}, \\ \log\alpha_1 &= 2i\pi\tau_1, & \log\alpha_2 &= 2i\pi\tau_2. \end{aligned}$$

avec τ_1 et $\tau_2 \in \mathfrak{H}$. Les nombres τ_1 et τ_2 sont reliés par l'équation $J(\alpha_1) = J(\alpha_2)$ qui s'écrit $j(\tau_1) = j(\tau_2)$. La fonction j n'est pas injective mais elle possède la propriété suivante : si $j(\tau_1) = j(\tau_2)$, alors τ_1 et τ_2 sont reliés par une transformation modulaire. On a donc $\tau_2 = (a\tau_1 + b)/(c\tau_1 + d)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Je remplace τ_1 et τ_2 par des $\log\alpha$ et je regarde l'équation que ça donne :

$$\frac{\log\alpha_2}{2i\pi} = \frac{a\log\alpha_1 + 2i\pi b}{c\log\alpha_1 + 2i\pi d} \ .$$

Encore une fois, on a une relation qui nous dit qu'un certain déterminant est nul : celui de la matrice

$$\begin{pmatrix} \log\alpha_2 & a\log\alpha_1 + 2i\pi b \\ 2i\pi & c\log\alpha_1 + 2i\pi d \end{pmatrix}.$$

Les nombres $\log\alpha_2$ et $2i\pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ car α_2 n'est pas une racine de l'unité puisque $|\alpha_2| < 1$. Les deux lignes sont donc linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. De même, $\log\alpha_1$ n'est pas un multiple de $2i\pi$. Donc les deux colonnes sont indépendantes sauf si $c = 0$. Le fait que ce déterminant soit nul, si l'on en croit la conjecture des quatre exponentielles, ne peut arriver que quand $c = 0$. Il faut revenir un petit peu en arrière. Si $c = 0$, on a $\tau_2 = (a\tau_1 + b)/d$ avec $ad = 1$. Donc, le nombre $\tau_2 - \tau_1$ appartient à $\mathbb{Z}$. Dans ce cas-là, on a $\alpha_1 = \alpha_2$. C'est bien ce que je voulais : la fonction J est injective.

Il me reste le Problème 3. Je ne suis pas en train de résoudre les problèmes l'un à la suite de l'autre. Je me contente de voir le lien avec la conjecture des quatre exponentielles. Pour le Problème 3, c'est dans l'autre sens que ça se passe : ce problème implique un cas particulier de la conjecture des quatre exponentielles où deux des α_i sont des racines de l'unité et les deux autres ont un module $\neq 1$. C'est un cas un peu spécial mais dans lequel on ne sait toujours pas résoudre le problème. Ce n'est donc pas un cas inintéressant. Je ne vais peut-être pas donner trop de détails. Je vous dis en deux mots ce que l'on fait. Je vous rappelle que dans le Problème 3, il s'agit de montrer que si α_1 et α_2 sont multiplicativement indépendants alors $J(\alpha_1)$ et $J(\alpha_2)$ sont algébriquement indépendants. Il y a un petit travail de préparation à faire sur le déterminant. Il faut regarder ce qui se passe si vous avez $2i\pi$ fois un nombre rationnel, deux fois. Le seul cas intéressant est celui où ils sont opposés. Ça ressemble à ce qu'on avait vu tout à l'heure. En fait, on va avoir la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 2i\pi a & \log\alpha \\ \log\alpha' & 2i\pi b \end{pmatrix}$$

avec α et α' qui sont tous les deux de module plus petit que 1. On voudrait montrer que la nullité du déterminant de B ne peut arriver que dans les cas triviaux, i.e. $\log\alpha$ et $\log\alpha'$ sont des multiples de $2i\pi$. On suppose donc dét $B = 0$. On va utiliser le résultat énoncé dans le problème 3 avec α et α' en utilisant la propriété que, comme dét $B = 0$, si je pose

$$\tau = \frac{\log\alpha}{2i\pi}, \quad \tau' = \frac{\log\alpha'}{2i\pi},$$

alors le nombre $\tau\tau' \in \mathbb{Q}$. On utilise alors un petit peu les propriétés des fonctions modulaires : si $\tau\tau' \in \mathbb{Q}$, les nombres $j(\tau)$ et $j(\tau')$ sont algébriquement dépendants (c'est l'équation modulaire qui nous donne cela). On en déduit que les nombres τ, τ' et 1 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Une fois que l'on sait cela, le reste vient tout seul. On en déduit que τ est quadratique. Il faut quand même utiliser le Septième Problème de Hilbert (ou Théorème de Gelfond-Schneider) dont j'ai parlé tout à l'heure pour obtenir la conclusion.

Je vais peut-être m'arrêter là pour la conjecture des quatre exponentielles. Mais, vous voyez que c'est un peu curieux. Cette conjecture des quatre exponentielles, qui concerne des logarithmes de nombres algébriques, a des applications à la fonction J. Ce que je viens de vous raconter va un peu dans l'autre sens de ce que j'ai fait au début. On travaillait avec π et e^{π} qui a priori font intervenir la fonction exponentielle, et puis on a été amené à travailler avec des fonctions modulaires. Ici, c'est l'inverse. Pour obtenir des propriétés des fonctions modulaires, on est amené à introduire des fonctions exponentielles. Cette conjecture des quatre exponentielles a des avatars qui portent sur des logarithmes elliptiques. Il y a plusieurs manières d'énoncer des analogues dans le cas elliptique. Il y en a une qui consiste à remplacer partout des logarithmes par des logarithmes elliptiques. Il y a aussi un autre point de vue qui consiste à prendre deux logarithmes elliptiques et deux logarithmes usuels. C'est ce que je vais faire parce que ça a vraiment beaucoup d'intérêt dans ce domaine-là. C'est ce qu'on appelle l'analogue elliptique mixte de la conjecture des quatre exponentielles. En termes de groupes algébriques, dans le cadre de la conjecture classique, on travaille avec le carré d'un groupe multiplicatif et ici, on va travailler avec le produit d'une courbe elliptique par un groupe multiplicatif. On va prendre une courbe elliptique. On a donc une fonction $\wp$ de Weierstrass comme celle de tout à l'heure. On va supposer que g_2 et g_3 sont algébriques. La fonction $\wp$ va remplacer la fonction exponentielle : au lieu de prendre un point $\log\alpha$ qui donne une valeur algébrique à la fonction exponentielle, on va prendre deux points complexes u_1 et u_2 tels que $\wp(u_1)$ et $\wp(u_2)$ sont algébriques. On prend aussi $\log\alpha_1$ et $\log\alpha_2$, deux logarithmes de nombres algébriques. On va regarder la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \log\alpha_1 & \log\alpha_2 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Je voudrais avoir comme conclusion le fait que le déterminant de M n'est pas nul. Il faut mettre des hypothèses pour que ce ne soit pas trivial. L'hypothèse est simplement que les deux colonnes sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ (on ne prend pas deux fois la même colonne) et il n'y a pas de ligne nulle, i.e. $(u_1, u_1) \neq (0,0)$ et $(\log\alpha_1, \log\alpha_2) \neq (0,0)$. C'est une hypothèse beaucoup plus simple à vérifier que celle d'indépendance linéaire de tout à l'heure. La conclusion de la conjecture, c'est que le déterminant de M est non nul. Il se trouve que cet analogue elliptique de la conjecture des quatre exponentielles a beaucoup de liens avec ce que j'ai raconté. Je ne peux pas m'étendre trop là-dessus mais je vais juste donner un exemple qui est le Théorème Stéphanois. Ce théorème équivaut à dire que cette conjecture est vraie dans le cas où l'on met le plus de périodes possibles. Que va-t-on prendre pour u_1 et u_2? On demande que les $\wp(u_i)$ soient algébriques. On va prendre deux périodes. Les périodes, ça ne marche pas tout à fait parce que ça donne un pôle. On prend donc des demi-périodes. On va prendre $u_1 = \omega_1/2$ et $u_2 = \omega_2/2$. Les valeurs de $\wp(u_i)$ sont des racines du polynôme $4x^3 - g_2x - g_3$. Ce sont donc des nombres algébriques. Pour $\log\alpha_1$, on va prendre $i\pi$ (qui est la moitié de la période de l'exponentielle). En résumé, il y a donc équivalence entre le Théorème Stéphanois et le fait que la conjecture des quatre exponentielles mixte est vraie pour $u_1 = \omega_1/2, u_2 = \omega_2/2$ et $\log\alpha_1 = i\pi$. On considère donc le déterminant

$$\text{dét} \begin{pmatrix} 2i\pi & \log\beta \\ \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}$$

(on a tout multiplié par deux). Le Théorème Stéphanois nous dit que ce déterminant n'est pas nul. Les nombres ω_1 et ω_2 forment un couple de périodes fondamentales qui sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Les colonnes sont donc bien linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Les nombres $2i\pi$, ω_1 et ω_2 étant tous trois non nuls, les lignes de la matrice ne sont pas nulles non plus. Le déterminant ne doit donc pas être nul d'après la conjecture. Comment voit-on ça ? J'ai supposé que g_2 et g_3 sont algébriques donc $j(\tau)$ est algébrique. Si ce déterminant était nul, cela donnerait que $\beta = e^{2i\pi\omega_2/\omega_1}$. Mais ω_2/ω_1, c'est ce qu'on a toujours appelé τ. Ici, on a supposé que $J(q)$ est algébrique, le nombre q ne peut donc pas être algébrique. On ne peut donc pas avoir $q = e^{2i\pi\tau} = \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$. Ça, c'est un des liens entre l'analogue elliptique et les questions dont j'ai parlé avant. Il y a d'autres liens où l'on met d'autres conditions, on ne prend pas autant de périodes. C'est dans un travail de Manin qu'apparaît le problème où l'on a deux périodes dans la première ligne de la matrice et dans un autre travail de Daniel Bertrand, les deux autres périodes. Il y a donc d'autres liens qui sont intéressants et qui mériteraient d'être développés encore.

Pour conclure, je dirais simplement que j'ai présenté un petit aspect de la question. J'ai expliqué un peu les résultats. Je n'ai pas vraiment parlé des démonstrations, exception faite de la démonstration ultra-rapide du Théorème de Schneider. Maintenant, si vous voulez en savoir plus sur les démonstrations, vous pouvez avoir facilement tous les détails en consultant l'exposé que je vais faire au Séminaire Bourbaki la semaine prochaine, dont vous pouvez télécharger le texte depuis ma page web (U.R.L. : `http://www.math.jussieu.fr/~miw`).

Questions.

Éric Charpentier : – Tu as dit tout à l'heure que la transcendance pouvait avoir des applications dans d'autres domaines des mathématiques et que tu ne voulais pas t'étendre trop là-dessus. Mais, est-ce-que tu peux nous donner une idée rapide?

Michel Waldschmidt : – Oui. Bon, je vous ai invité à consulter ma page web. Je peux vous inviter aussi à assister à un colloquium que je vais donner à Lille dans deux semaines où je vais justement parler des applications de la théorie des nombres transcendants. Il y a beaucoup d'applications dans différents domaines. Les applications les plus connues sont celles qui viennent de la théorie de Baker où des méthodes de transcendance permettent de résoudre des équations diophantiennes. On peut dire que, de manière générale, les méthodes de transcendance donnent des résultats négatifs du genre "il n'existe pas". C'est bien cela qu'on a fait aujourd'hui : on a montré qu'il n'y a pas de relation polynomiale inattendue entre certains nombres comme π, e^π et $\Gamma(1/4)$. C'est un phénomène constant que les méthodes transcendantes donnent des énoncés négatifs de ce genre-là. Quand on a une équation diophantienne (une équation en nombres entiers), des méthodes d'approximation diophantienne permettent de démontrer qu'il n'y a pas de solutions autres que celles que l'on connaît déjà et qu'on peut trouver par ordinateur par exemple. C'est ça le thème général. Maintenant, il y a quand même des résultats de transcendance qui permettent d'obtenir des résultats positifs. Par exemple, il y avait une question posée par Sansuc et Colliot-Thélène sur la densité du plongement logarithmique d'un corps de nombres. On cherchait un sous-groupe de type fini d'un corps de nombres dont l'image par le plongement logarithmique soit dense et on demandait quel est était le plus petit rang possible. La réponse a été apportée par Damien Roy qui donne le rang exact.

Ça, c'est un résultat positif parce qu'il dit qu'il existe un sous-groupe qui a le bon rang. Quand on analyse bien la démonstration, on s'aperçoit qu'elle consiste à dire essentiellement : "vous prenez un sous-groupe raisonnable et qui devrait convenir. S'il ne convenait pas, il y aurait des relations inattendues et on montre qu'il n'y en a pas". Ça reste quand même des résultats négatifs. Parmi les applications qu'on peut avoir, j'ai eu récemment une correspondance avec un informaticien théoricien (Jean-Michel Muller) qui voulait montrer que des algorithmes implantés sur différents ordinateurs vont donner le même résultat. Ce n'est pas difficile pour les opérations fondamentales (sommes, différences, produits, quotients) mais pour des fonctions transcendantes, une difficulté apparaît. Elle est du type suivant. Vous prenez un nombre x autorisé par la machine (donc rationnel, dans un ensemble fini) et vous demandez à la machine de calculer disons e^x. Le nombre que va donner la machine est une approximation de e^x et il faut savoir comment arrondir. Quelle que soit la règle que l'on va utiliser, il faut savoir que e^x, quantité transcendante, ne peut pas être trop proche d'un nombre rationnel. Il faut une estimation explicite et cette estimation est effectivement donnée par des méthodes transcendantes.

Il y a d'autres domaines où les méthodes transcendantes ont des applications. Un exemple est la théorie des fonctions L p-adiques où intervient, dans des travaux de Mazur et de plusieurs autres personnes, le Théorème Stéphanois. Et puis, il y a aussi des travaux de Masser et Wüstholz qui concernent le théorème d'isogénie qui apparaît chez Serre et dans le théorème de Faltings, pour lequel les méthodes transcendantes donnent des algorithmes effectifs, des bornes quantitatives précises. Disons, qu'en gros, un des domaines d'application de cette théorie, c'est de fournir des estimations souvent explicites (pas toujours : certaines fois, elles ne sont même pas effectives) qui sont utiles dans d'autres branches. Par exemple, la théorie des équations diophantiennes, l'arithmétique des courbes elliptiques, la recherche de minoration de hauteur de points qui ne sont pas de torsion, la borne de la torsion...

Henri Hogbé-Nlend : – Est-ce qu'il y a des théorèmes de convergence?

Michel Waldschmidt : – Quand on veut démontrer qu'un nombre est transcendant, on a besoin de bonnes approximations. On a donc besoin de formules qui convergent relativement rapidement. A priori, c'est très différent de ce que font les personnes qui étudient l'approximation par des fonctions ou l'approximation numérique, et qui ont besoin de formules dans lesquelles peu de calculs vont donner une approximation très bonne. Le problème qui se pose ici, c'est la rapidité de la convergence non pas en termes du nombre d'opérations à effectuer, mais en fonction du dénominateur : on veut savoir s'il va être grand ou non quand l'approximation est bonne. Maintenant, la question que tu poses me fait penser à une remarque un peu curieuse : quand on regarde les valeurs de la fonction Γ pour lesquelles on a des algorithmes de convergence rapide, ce sont précisément des valeurs de la fonction Γ en des points rationnels pour lesquels on sait démontrer que le nombre est transcendant. Cette remarque n'est pas très profonde parce que ces algorithmes font intervenir la moyenne arithmético-géométrique.

Henri Hogbé-Nlend : – Est-ce qu'il y a des opérations algébriques qui permettent de fabriquer des nombres transcendants à partir d'autres nombres transcendants. Par exemple, on sait que le nombre e^{π}, formé à l'aide des nombres transcendants e et π, est transcendant. Que sait-on sur π^e?

Michel Waldschmidt : – Les nombres e et $i\pi$ sont tous deux transcendants, mais $e^{i\pi}$ est algébrique... Pour le nombre π^e, on n'a aucune idée. On ne sait pas du tout s'il est irrationnel. C'est un peu irritant mais on ne le sait pas.

Jacques Martinet : – Est-ce qu'il y a du nouveau du côté de la conjecture de Schanuel?

Michel Waldschmidt : – Non, pas vraiment. Ça dépend un peu de la façon dont on la regarde. Damien Roy a introduit un point de vue un petit peu nouveau. On regarde souvent la conjecture sous l'angle "indépendance de logarithmes" : c'est le cas particulier le plus intéressant, je crois, de cette conjecture (enfin, celui qui aurait le plus d'applications). La conjecture dit que si on a des logarithmes de nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, ils sont algébriquement indépendants. Cela consiste à fixer les logarithmes et à regarder quels sont les polynômes qui s'annulent dessus. Ce qu'a fait Damien Roy, c'est changer de point de vue : il prend un polynôme et il se demande quels sont les points à coordonnées logarithmes de nombres algébriques où le polynôme va s'annuler. Il a des résultats non triviaux. Ce nouveau point de vue sur cette conjecture permet d'obtenir quelques résultats nouveaux, mais sur la conjecture elle-même, on n'a rien pour le moment. Quand on regarde l'ensemble des logarithmes de nombres algébriques, on ne sait toujours pas montrer qu'il y en a deux qui sont algébriquement indépendants.

Jacques Martinet : – On ne sait toujours pas montrer la non-nullité du régulateur p-adique?

Michel Waldschmidt : – Malheureusement non, c'est bien triste.

RÉFÉRENCES

[Bak] A. BAKER, *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, 1979.

[BDGP] K. BARRÉ-SIRIEIX, G. DIAZ, F. GRAMAIN, G. PHILIBERT, *Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin*, Invent. Math. **124**, 1996, 1–9.

[Be1] D. BERTRAND, *Séries d'Eisenstein et transcendance*, Bull. Soc. Math. France, **104**, 1976, 309-321.

[Be2] D. BERTRAND, *Fonctions modulaires, courbes de Tate et indépendance algébrique*, Sém. Delange-Pisot-Poitou (Théorie des Nombres) 19ème année (1977/78), n°36, 11 pp.

[Be3] D. BERTRAND, *Modular functions and algebraic independence*, Proc. Conf. p-adic analysis, Nijmegen 1978, Kath. Univ. Report n°7806.

[Be4] D. BERTRAND, *Fonctions modulaires et indépendance algébrique II*, Journées Arithmétiques Luminy, Soc. Math. France, Astérisque **61** (1979), 29–34.

[Bu] P. BUNDSCHUH, *Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationalitätsausagen*, Invent. Math. **9** (1970), 175–184.

[Chud1] G.V. CHUDNOVSKY, *Algebraic independence of constants connected with exponential and elliptical functions*, Dokl. Ukr. SSR Ser. A **8** (1976), 698–701 (en russe); résumé anglais p. 767.

[Chud2] G.V. CHUDNOVSKY, *Algebraic independence of values of exponential and elliptic functions*, Proc. Intern. Cong. Math. Helsinki **1** (1978), 339–350.

[Chud3] G.V. CHUDNOVSKY, *Contributions to the theory of transcendental numbers*, Math. Surveys and Monographs N°19, Amer. Math. Soc., 1984, 450 pp.

[Liou1] J. LIOUVILLE, *Remarques relatives à des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, C. R. Acad. Sc. Paris, **18** (1844), 883–885.

[Liou2] J. LIOUVILLE, *Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques inséré dans le compte-rendu de la dernière séance*, C. R. Acad. Sc. Paris, **18** (1844), 910–911.

[Liou3] J. LIOUVILLE, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, J. Math. Pures App. **16** (1851), 133–142.

[Lü] J. LÜTZEN, *Joseph Liouville 1809–1882, Master of Pure and Applied Mathematics*, Springer-Verlag, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, N°15 (1990), 884 pp.

[N1] YU.V. NESTERENKO, *Modular functions and transcendence problems - Un théorème de transcendance sur les fonctions modulaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. 1 **322** (1996), 909–914.

[N2] YU.V. NESTERENKO, *Modular functions and transcendence problems*, à paraître.

[Sch1] TH. SCHNEIDER, *Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale*, Math. Ann. **113** (1937), 1–13.

[Sch2] TH. SCHNEIDER, *Einführung in die transzendenten Zahlen*, Springer-Verlag 1957 (en allemand); traduction française : *Introduction aux nombres transcendants*, Gauthier-Villars 1959.

[Wal1] M. WALDSCHMIDT, *Nombres transcendants*, Springer Lecture Notes in Math. **402**, Berlin, 1974.

[Wal2] M. WALDSCHMIDT, *Linear independence of logarithms of algebraic numbers*, The Institute of Mathematical Sciences, Madras, IMSc Report N°116 (1992), 168 pp.

[Wal3] M. WALDSCHMIDT, *Sur la nature arithmétique des valeurs de fonctions modulaires*, Séminaire BOURBAKI, Exposé 824, 17 Novembre 1996, 36 pp.

[Wal4] M. WALDSCHMIDT, *Transcendance et indépendance algébrique de valeurs de fonctions modulaires*, Proc. CNTA5 - Carleton, Août 1996.