Algèbre des nombres d'Euler-Zagier, calculs effectifs et conjectures

Gérard Jacob†,

et

Michaël Bigotte†, Hoang Ngoc Minh*,
Nour-Eddine Oussous†, Michel Petitot†

† Université Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq, France
* Université Lille II, 59024 Lille, France

20 octobre 1999

Table des matières

1 Introduction

1.1 Un faisceau convergent de travaux de recherches

Un ensemble de travaux de recherches en des domaines apparemment très différents, conduisent à se tourner à nouveau vers des problèmes issus de la théorie des nombres, et concernant la fonction zêta de Riemann, et à les revisiter. Il s'agit de problèmes combinatoires issus

- de la mécanique statistique (voir par exemple [11, 42]),
- de la génétique: étude du rôle des replis des chromosomes, et de la topologie des nœuds qu'ils peuvent former (voir le numéro spécial "La Science des nœuds", de la revue *Pour la Science*, [1]),
- de la théorie des singularités: Que se passe-t-il dans les solutions d'une équation différentielle, quand on déplace simultanément plusieurs singularités?

Dans ces différents domaines on retrouve le groupe des tresses, et la théorie des nœuds, avec leurs caractérisations algébriques, topologiques et combinatoires (Invariants de Vassiliev, Polynômes de Jones, équations de Yang-Baxter, etc.)

Ces questions ont été classiquement abordées avec des outils venus de la géométrie algébrique et de la théorie des catégories : catégories monoïdales tressées et groupes quantiques (voir [28, 9]), Théorie de Hodge (voir [10]), algèbres de Hopf (voir [28, 13]).

Le développement de ces études et le souci de résultats effectifs nécessitent de nouvelles techniques de calcul.

1.2 Les outils de recherche et de calculs

Si l'on fait le bilan des techniques de calcul disponibles, on peut relever :

- Les outils mathématiques avancés :

  Géométrie algébrique, Homotopie, Théorie des invariants.
- Les nouveaux outils de nature combinatoire :
  - la combinatoire algébrique (fonctions quasi-symétriques, algèbres de Hecke),
  - les méthodes syntaxiques (série génératrices, mots et algèbre de mélange),
  - les approches algébriques (Algèbres de Hopf),

- Les Instruments de Calcul : on dispose récemment
  - de techniques de calculs numériques de très haute précision (p. ex. à 1000, voire 10^6 chiffres après la virgule), qui peuvent conduire à énoncer des conjectures que l'on peut qualifier de "presque sûres"
  - de techniques de calcul exact:

    performances croissantes du Calcul Formel, progrès des matériels et logiciels, progrès dans l'algorithmique symbolique.

1.3 Au cœur de ces recherches, la fonction zêta

Au cœur de ces recherches, on retrouve les problèmes de structure qui sont liés aux nombres définis par les "sommes de Riemann". Les premiers calculs concernant les sommes de Riemann $\zeta(s)$ remontent au moins à Euler ([15]).

1.3.1 Sommes de Riemann

La somme de Riemann $\zeta(s)$ est définie, pour $s \in \mathbb{N}$, par la série suivante :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

Cette série est convergente pour $s \geq 2$. Euler a établi que $\zeta(2p)$ est un multiple rationnel de π^{2p}. On a par exemple $\zeta(2) = \pi^2/6$.

On ne connaît rien actuellement sur l'irrationalité des $\zeta(2p+1)$. Cependant en 1978, en utilisant la formule de Hjortnaes [21] :

$$\zeta(3) \quad = \quad \frac{5}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k} k^3},$$

Apéry [2] a prouvé que $\zeta(3)$ est irrationnel. On ne connaît encore rien sur l'irrationnalité des $\zeta(2p+1)$, pour $p \geq 2$.

Certaines formules *expérimentales* analogues aux formules de Hjortnaes sont proposées par Borwein et Bradley [7] pour $\zeta(4n+3)$. Elles sont obtenues grâce à des calculs numériques de très haute précision (variantes de l'algorithme PSLQ pour la recherche numériques de relations rationnelles).

1.3.2 Extensions, et retombées

Récemment, plusieurs extensions des nombres $\zeta(s)$ ont été introduites : les sommes harmoniques, les sommes d'Euler-Zagier (déjà introduites par Euler, [15]), et leurs versions colorées. On peut aussi introduire des déformations des théories classiques (quantisées par un paramètre q).

Les retombées de ces recherches sont à attendre notamment en théorie des nombres [43, 6], en géométrie algébrique (réponse espérée à une conjecture de Gontcharov [18]), en théorie des nœuds et des tresses, [29, 30], avec ses conséquences espérées en génétique, ou en théorie des singularités, aux applications en physique statistique ou en physique des hautes énergies [32].

1.3.3 Intérêt des méthodes syntaxiques

Dans le texte qui suit, nous mettons principalement l'accent sur les méthodes syntaxiques, c'est-à dire celles qui sont liées à la combinatoire des mots, et plus précisément sur les *séries formelles génératrices non commutatives*, et ceci principalement pour deux raisons. Tout d'abord, elles permettent de regrouper synthétiquement toute une famille infinie d'identités (démontrées souvent une par une dans la littérature) en une seule, portant sur les séries génératrices, donnant ainsi une explication naturelle à leurs propriétés récursives. De plus elles permettent une mise en œuvre élégante de la méthode des intégrales itérées de K.T. Chen ([12]) pour les calculs de monodromie. En outre, elles sont particulièrement bien adaptées aux implantations génériques par les méthodes du Calcul Formel.

2 De la fonction ζ aux MZVs

2.1 Fonction ζ de Riemann

Les sommes de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pour $s \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ se présentent comme les valeurs de la *fonction* ζ de Riemann de la variable complexe z pour la valeur entière $z = s$. Cette fonction peut être définie aussi bien par un développement en série que par un développement en produit infini :

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \prod_{p\ premier} (1 - p^{-z})^{-1}$$

(on a posé, pour z complexe, $n^{-z} = exp(-z\ log\ n)$). Ces deux développements sont absolument convergents si la partie réelle de z est strictement supérieure à 1.

La fonction ζ a pour seul pôle $z = 1$. Elle donne lieu à la fameuse

Hypothèse de Riemann :

> *Tous les zéros de la fonction ζ de partie réelle positive sont situés sur la droite $\Re z = 1/2$.*

2.2 Valeurs de la fonction ζ sur les entiers

Quand on se restreint aux valeurs de la fonction ζ sur les entiers positifs, les nombres $\zeta(n)$ posent encore des questions non résolues. On souhaiterait en particulier avoir des informations sur la $\mathbb{Q}$-algèbre qu'ils engendrent. On peut conjecturer que c'est une algèbre de polynômes, autrement dit, qu'elle est une extension purement transcendante de $\mathbb{Q}$. Le meilleur résultat que l'on puisse espérer dans cette direction serait d'exhiber une *base de transcendance* sur $\mathbb{Q}$ de cette algèbre. On pourrait alors explorer systématiquement les relations polynomiales à coefficients rationnels entre les valeurs $\zeta(n)$.

Les récents progrès pour l'obtention de nouveaux résultats s'appuient sur un enrichissement de structure : on cherche à construire une algèbre plus grande, dans laquelle on dispose d'outils d'algèbre, ou d'analyse, ou de codage symbolique.

2.3 Valeurs de ζ sur les multi-indices : sommes d'Euler-Zagier

Une première extension consiste à étendre le domaine de définition de la fonction $\zeta(n)$, en remplaçant l'entier n par un *multi-indice* $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$, avec $s_i \in \mathbb{N}^\star = \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Définition 2.1 *On appelle* taille *du multi-indice* $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$ *l'entier* k, *et* poids *de* $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$ *l'entier* $s_1 + s_2 + \dots + s_k$.

Définition 2.2 *On appelle* somme d'Euler-Zagier, *ou "MZV" (Multiple Zeta Value) de multi-indice* $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$ *la somme de la série suivante :*

$$\zeta(\mathbf{s}) = \zeta(s_1, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > \dots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}}. \tag{2}$$

Cette somme converge si et seulement si $s_1 > 1$.

Une voie pour l'étude et le calcul des relations entre les sommes d'Euler-Zagier consiste à chercher une structure plus riche, pour permettre l'utilisation de techniques algébriques ou analytiques.

3 Enrichir la structure

Le but visé est de chercher des *relations algébriques* dans une structure plus riche que celle des nombres. On obtiendra alors des relations entre les sommes d'Euler-Zagier en *spécialisant* la structure.

3.1 Une version discrète : les Fonctions Quasi-symétriques

3.1.1 Définition

L'anneau *Qsym* des *fonctions quasi-symétriques* a été introduit et étudié par Gessel ([17]), pour résoudre des problèmes d'énumération de permutations.

Définition 3.1 (voir [40]) *Soit* $T = \{t_1,t_2,t_3,\dots\}$ *un alphabet infini totalement ordonné. On appelle* fonction quasi-symétrique *toute série formelle* $\mathbf{F}$ *(commutative) de degré fini sur* T*, à coefficients dans* $\mathbb{Z}$*, qui vérifie,* pour tout multi-indice $\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_k)$ *:*

$$\left\{\begin{array}{rl} & i_1 < i_2 < \dots < i_k \\ \textit{et} & j_1 < j_2 < \dots < j_k \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rll} & t_{i_1}^{s_1} t_{i_2}^{s_2} \dots t_{i_k}^{s_k} & \textit{ont le même} \\ \textit{et} & t_{j_1}^{s_1} t_{j_2}^{s_2} \dots t_{j_k}^{s_k} & \textit{coefficient dans } \mathbf{F} \end{array}\right.$$

Il s'agit donc d'une invariance par toute recopie des variables "respectant l'ordre strict" entre les lettres.

Par série *de degré fini*, on entend série dont tous les monômes sont de degré borné par un entier fixé.

On vérifie que le produit $\mathbf{F}\,\mathbf{G}$ de deux fonctions quasi-symétriques $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ (produit usuel des séries formelles commutatives) est encore une fonction quasi-symétrique. (Ce produit est bien sûr commutatif).

Il faut prendre garde au fait que les fonctions quasi-symétriques *sont toujours des sommes infinies*, même si elles sont de degré fini.

Notation 3.1 *Pour tout multi-indice* $\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_k)$*, on note* $F_{\mathbf{s}}$ *la fonction quasi-symétrique* (*voir* [20, 26, 40]) *suivante :*

$$F_{\mathbf{s}} = \sum_{n_1 > \dots > n_k > 0} t_{n_1}^{s_1} \cdots t_{n_k}^{s_k} \tag{3}$$

Cette série est de degré k, bien qu'elle fasse intervenir une infinité de variables. Gessel a montré [17] que les fonctions quasi-symétriques $F_{\mathbf{s}}$ forment *une base de Qsym sur* $\mathbb{Z}$.

On retrouve la somme d'Euler-Zagier $\zeta(\mathbf{s})$ à partir de la fonction quasi-symétrique $F_{\mathbf{s}}$, en *spécialisant* t_n en $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire en substituant à chaque lettre t_n la fraction $\frac{1}{n}$:

$$\boxed{F_{\mathbf{s}} \xrightarrow[t_n \mapsto \frac{1}{n}]{} \zeta(\mathbf{s})}$$

3.1.2 Polynômes et séries non commutatifs

Soit A un alphabet fini de lettres. On appelle *mot* sur A toute suite finie de lettres de A. L'ensemble des mots sur A est noté $A^\star$. Le produit de deux mots m et m' est défini comme la concaténation des deux suites définissant m et m'. Par exemple : pour $A = \{a,b\}$

$$abb \cdot aba \;=\; abbaba$$

La *longueur* d'un mot m, notée $|m|$, est la longueur de la suite de lettres définissant m. Le *mot vide*, noté ε, est la suite de longueur 0 (ne comportant aucune lettre).

Un polynôme sur A à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est une combinaison linéaire de mots. Un polynôme P sera noté

$$P \;=\; \sum_{m\in A^\star} \langle P|m\rangle\, m \qquad \text{somme finie.}$$

où $\langle P|m\rangle$ désigne le coefficient du mot m dans P. On note $\mathbb{Q}\langle A\rangle$ l'ensemble des polynômes sur A à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Une série formelle S sur A à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est une somme formelle, éventuellement infinie

$$S \;=\; \sum_{m\in A^\star} \langle S|m\rangle\, m$$

On note $\mathbb{Q}\langle\langle A\rangle\rangle$ l'ensemble des séries formelles sur A à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

3.1.3 Codage non commutatif et structure algébrique

Dans toute la suite, nous noterons encore *Qsym* le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les fonctions quasi-symétriques $F_{\mathbf{s}}$.

Pour tout multi-indice $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, on peut coder $F_{\mathbf{s}}$ par le mot $w = y_{s_1} \cdots y_{s_k}$ sur l'alphabet infini $Y = \{y_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}$. On appelle alors *taille(s)* l'entier k et *poids(s)* l'entier $s_1 + \cdots + s_k$. Tout polynôme non commutatif $P \in \mathbb{Q}\langle Y\rangle$ sur l'alphabet Y code alors une fonction quasi-symétrique notée F_P, qui est combinaison linéaire de fonctions de la forme $F_{\mathbf{s}}$.

Le produit (commutatif) des fonctions quasi-symétriques peut être relevé en un produit associatif et commutatif sur les polynômes de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$, que l'on note " $*$ " [14, 25, 40], appelé *"quasi-mélange"*.

On montre que ce produit peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon * w = w * \varepsilon = w & \text{pour } w \in Y^* \\ y_i u * y_j v = y_i(u * y_j v) + y_j(y_i u * v) + y_{i+j}(u * v) & \text{pour } y_i, y_j \in Y,\ u,v \in Y^* \end{cases}$$

Cette propriété est une généralisation de la formule suivante :

$$\sum_{n>1,p>1} \frac{1}{n^i p^j} \;=\; \sum_{n>p>1} \frac{1}{n^i p^j} + \sum_{p>n>1} \frac{1}{p^j n^i} + \sum_{p>1} \frac{1}{p^{i+j}}$$

Exemple

$$y_2 * y_3y_1 \quad = \quad y_2y_3y_1 + y_3y_2y_1 + y_3y_1y_2 \quad + y_5y_1 + y_3y_3$$

Théorème 3.1 ([14, 25, 40]) *L'application $P \mapsto F_P$ est un morphisme pour le quasi-mélange. En d'autres termes, $F_{P * Q} = F_P \cdot F_Q$.*

Corollaire 3.1 *Si $\zeta(P)$ et $\zeta(Q)$ convergent, alors :*

$$\zeta(P * Q) = \zeta(P)\zeta(Q)$$

3.2 Une version analytique : les Polylogarithmes

Nous donnons d'abord une définition des fonctions polylogarithmes sous forme de séries analytiques, convergeant à l'intérieur du disque unité ouvert. Mais on peut aussi les définir par des "intégrales itérées", qui les définissent par prolongement analytique sur tout le plan complexe privé des deux points 0 et 1.

3.2.1 Les Polylogarithmes

Le polylogarithme d'ordre $n \geq 1$, est la fonction définie, pour $|z| < 1$, par la série entière [33, 34]

$$\mathrm{L}i_n(z) = \sum_{k>0} \frac{z^k}{k^n}.$$

La valeur en $z = 1$ de cette somme (pour $n > 1$, car la série $\mathrm{L}i_1(1)$ est divergente), redonne la fonction zêta de Riemann pour les arguments entiers (voir Section 2.2) :

$$\zeta(n) \quad = \quad \mathrm{L}i_n(1).$$

Cette définition de $\mathrm{L}i_n(z)$ généralise le *dilogarithme* $\mathrm{L}i_2(z)$, étudié par Nielsen [35] sous le nom de *fonction de Legendre*, et connu depuis Leibnitz en 1696, puis par Euler, Abel, Hill, Jonquière, Kummer, Lindelöf, Lobachev [33, 34]. (chez les physiciens, il est connu comme la fonction de Spence [33]).

Cette définition se généralise aux multi-indices comme suit :

Définition 3.2 *Le* polylogarithme *d'indice* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ *est la fonction de la variable complexe z qui est la somme du développement en série:*

$$\mathrm{L}i_{\mathbf{s}}(z) \quad = \quad \sum_{n_1 > \cdots > n_k > 0} \frac{z^{n_1}}{{n_1}^{s_1} \cdots {n_k}^{s_k}} \tag{4}$$

Pour tout $\mathbf{s} = (s_1, \ldots ,s_k)$, cette série est convergente pour tout nombre complexe z intérieur au disque de rayon unité.

Si $s_1 > 1$, on retrouve la somme d'Euler-Zagier $\zeta(\mathbf{s})$ en *spécialisant* $\mathrm{L}i_s(z)$ en $z = 1$:

$$\boxed{\mathrm{L}i_{\mathbf{s}}(z) \xrightarrow[z \mapsto 1]{} \zeta(\mathbf{s})}$$

En particulier, pour tout multi-indice "simple" $\mathbf{s} = (n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on retrouve la définition précédente : $\mathrm{L}i_{(n)}(z) = \mathrm{L}i_n(z)$. On obtient alors en particulier :

$$\mathrm{L}i_1(z) = \sum_n \frac{z^n}{n} = -\mathrm{L}og(1 - z)$$

$\mathrm{L}i_1(z)$ est donc une primitive de $\dfrac{1}{1-z}$. Nous allons voir que les polylogarithmes peuvent aussi être définis récursivement par intégration, à partir de la fonction $\mathrm{L}i_1$.

3.2.2 Intégrales itérées

Soit $X = \{x_0,x_1\}$ un alphabet et soit $X^\star$ le monoïde libre sur X (ensemble des mots sur X). On introduit les deux formes différentielles:

$$\omega_{x_0} = \frac{dz}{z} \qquad \text{et} \quad \omega_{x_1} = \frac{dz}{1-z}$$

Les mots w sur X permettent alors de coder les *intégrales itérées*. Pour toute fonction $f(z)$, l'intégrale itérée de f par rapport à une *forme différentielle* ω est définie comme suit :

$$\int_0^z \omega f \stackrel{def}{=} \int_0^z \omega(t) f(t) \qquad \text{où } t \text{ est la variable d'intégration.}$$

Définition 3.3 *Pour tout mot $w \in X^\star$ se terminant par la lettre x_1, le polylogarithme $L_w(z)$ est défini récursivement comme suit :*

$$\begin{array}{rrclcl}
 & L_{x_1}(z) & = & \displaystyle\int_0^z \omega_{x_1} & = & \mathrm{L}i_1(z), \\
\textit{et, pour tout } u \in X^\star x_1 : & L_{x_0 u}(z) & = & \displaystyle\int_0^z \omega_{x_0} L_u & = & \displaystyle\int_0^z \frac{dt}{t} L_u(t) \\
 & L_{x_1 u}(z) & = & \displaystyle\int_0^z \omega_{x_1} L_u & = & \displaystyle\int_0^z \frac{dt}{1-t} L_u(t)
\end{array}$$

Cette définition 3.3 des polylogarithmes reste cohérente avec la définition 3.2 donnée par les multi-indices, comme on va le voir en traduisant les mots sur l'alphabet infini Y par des mots sur l'alphabet X à deux lettres :

3.2.3 Codage des multi-indices sur deux lettres

Tout multi-indice $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ peut être codé sur l'alphabet $X = \{x_0, x_1\}$ à deux lettres, en posant :

$$code(\mathbf{s}) \quad = \quad x_0^{s_1-1}x_1 \cdots x_0^{s_k-1}x_1$$

ou, ce qui revient au même, en définissant *code* comme étant le morphisme de monoïde défini par :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} Y^* & \longrightarrow & X^* \\ & y_i \mapsto x_0^{i-1}x_1 & \end{array}}$$

On remarque qu'un mot w est le code d'un multi-indice si et seulement s'il se termine par la lettre x_1. Si on appelle poids d'un mot $w \in X^*$ sa longueur, on voit que la fonction *code* préserve le poids. Le résultat de base est le suivant :

Proposition 3.1 *Si le mot $w \in X^\star$ est le code du multi-indice $\mathbf{s}$, on a l'égalité:*

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{s}}(z) = L_w(z)$$

La démonstration par récurrence, bien que fastidieuse, ne présente pas de difficulté particulière.

3.2.4 Polylogarithmes : définition étendue

La définition des polylogarithmes par *intégrales itérées*, et la définition par *somme infinie* coïncident donc à l'intérieur du disque unité. Mais la définition intégrale permet en outre de définir un **prolongement analytique** des polylogarithmes dans tout le plan complexe privé de deux points $\{0,1\}$ (à condition de gérer les coupures, de 0 à $-\infty$ et de 1 à $+\infty$ qui les rendent uniformes), ou *mieux*, sur la **surface de Riemann** $\mathcal{R}$ au dessus du plan complexe privé des deux points $\{0,1\}$.

Toutefois, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \omega_{x_0} = \int_0^1 \frac{dz}{z} = \left|\,\mathrm{L}og(z)\right|_0^1$ est divergente. On contourne cette difficulté en modifiant la borne inférieure d'intégration *pour les mots de la forme x_0^n*. On pose donc :

Définition 3.4 (Définition étendue) *Pour tout mot $w \in X^\star$, le polylogarithme $L_w(z)$ est défini récursivement comme suit :*

$$\left\{\begin{array}{lcll} L_{x_0^n} & = & \dfrac{1}{n!}\mathrm{L}og^n(z) & \\ L_{x_0 w}(z) & = & \displaystyle\int_0^z \frac{dt}{t} \cdot L_w(t) & \textit{si } w \in X^\star x_1 X^\star, \textit{ et} \\ L_{x_1 w}(z) & = & \displaystyle\int_0^z \frac{dt}{1-t} \cdot L_w(t) & \textit{si } w \in X^\star \end{array}\right. \tag{5}$$

Cette définition prolonge donc la définition des L_w à tous les mots w de X^*. Et l'on a encore $\mathrm{Li}_{\mathbf{s}}(z) = L_w(z)$ dans le cas où w est le code de $\mathbf{s}$ (et dans ce cas, w se termine par x_1).

3.2.5 Structure algébrique : l'algèbre de mélange

L'algèbre des *polynômes non commutatifs* $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ est l'ensemble des combinaisons formelles de mots sur X, munie du produit induit par la concaténation des mots. Un polynôme P s'écrit:

$$P \;=\; \sum_{w\in X^*} \langle P \mid w\rangle\, w \qquad \text{(somme finie)}$$

On vérifie, grâce à la loi de dérivation d'un produit (ou encore, de la loi d'intégration par parties), que le produit des intégrales itérées se relève en un produit associatif et commutatif sur l'algèbre de polynômes $\mathbb{Q}\langle X\rangle$, que l'on appelle le *"produit de mélange"*. Il est noté $⧢$, et peut encore être défini comme suit:

Définition 3.5 *Le* produit de mélange *est défini récursivement par :*

$$\begin{array}{ll} \varepsilon ⧢ w = w ⧢ \varepsilon = w & \textit{pour } w \in X^\star \\ x_i u ⧢ x_j v = x_i(u ⧢ x_j v) + x_j(x_i u ⧢ v) & \textit{pour } x_i,x_j \in X,\ u,v \in X^\star \end{array}$$

Exemple 3.1

$$\begin{aligned} x_0 ⧢ x_0x_1 &= x_0(\varepsilon ⧢ x_0x_1) + x_0(x_0 ⧢ x_1) \\ &= 2\,{x_0}^2x_1 + x_0x_1x_0 \end{aligned}$$

Définition 3.6 *Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ muni du produit de mélange est aussi appelé* algèbre de mélange *et noté $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ (car le produit de mélange se nomme "shuffle product" en anglais).*

On étend la définition de L par linéarité aux polynômes $P \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$ sur l'alphabet X en posant $L_P = \sum \langle P \mid w\rangle L_w$.

Théorème 3.2 *L'application $P \mapsto L_P$ est un morphisme de l'algèbre de mélange dans l'algèbre des fonctions de la variable complexe. En d'autres termes, $L_{P ⧢ Q} = L_P L_Q$.*

Preuve :

C'est une conséquence classique de la règle d'intégration par parties. $\diamondsuit$

3.2.6 Algèbre de Hopf

Le produit de mélange permet de définir sur $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ par dualité un coproduit, c'est-à-dire une application linéaire $\Delta : \mathbb{Q}\langle X\rangle \to \mathbb{Q}\langle X\rangle \otimes \mathbb{Q}\langle X\rangle$ en posant, pour tout polynôme P :

$$\text{pour } u,v \in X^*, \qquad \langle \Delta P \mid u \otimes v\rangle \;=\; \langle P \mid u ⧢ v\rangle$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\Delta(P) = \sum_{u,v \in X^*} \langle P \mid u \sqcup\!\sqcup\, v \rangle \, u \otimes v$$

Ce coproduit, coassociatif, admet une coünité $e : \mathbb{Q}\langle X \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par :

$$e(P) = \langle P \mid \varepsilon \rangle$$

On vérifie en effet que l'on a :

$$\begin{array}{rclcll} (Id \otimes e)\Delta(P) & = & \sum_{w \in X^*} \langle P \mid w \rangle w \otimes 1 & = & P \otimes 1 & \big(\scriptstyle{\in \mathbb{Q}\langle X \rangle \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}\langle X \rangle}\big) \\ (e \otimes Id)\Delta(P) & = & \sum_{w \in X^*} \langle P \mid w \rangle 1 \otimes w & = & 1 \otimes P & \big(\scriptstyle{\in \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}\langle X \rangle \simeq \mathbb{Q}\langle X \rangle}\big) \end{array}$$

Lemme 3.1 *Le coproduit Δ est un morphisme pour le produit de concaténation.*

En d'autres termes, $\Delta(PQ) = \Delta(P)\Delta(Q)$, pour le produit défini dans $\mathbb{Q}\langle X \rangle \otimes \mathbb{Q}\langle X \rangle$ par :

$$(u \otimes v)(f \otimes g) = uf \otimes vg$$

On a donc (si l'on note m le produit de concaténation) une bigèbre $(\mathbb{Q}\langle X \rangle, m, 1, \Delta, e)$, qui est en fait une algèbre de Hopf, car elle possède une antipode $a : \mathbb{Q}\langle X \rangle \to \mathbb{Q}\langle X \rangle$, définie par :

$$\text{pour tout } w \in X^*, \qquad a(w) = (-1)^{|w|} \widetilde{w}$$

où $\widetilde{w}$ est l'image miroir du mot w.

Toutes ces définitions se prolongent par continuité aux séries formelles.

Remarque :

On peut aussi définir sur $\mathbb{Q}\langle Y \rangle$ une structure d'algèbre de Hopf en dualisant le quasi-mélange ([40, 27])

3.3 Mots de Lyndon et algèbre de Lie libre

3.3.1 Mots de Lyndon et base de l'algèbre de mélange

Un mot $w \in X^\star$ est, par définition, un *mot de Lyndon* s'il est strictement inférieur (pour l'ordre lexicographique) à chacun de ses facteurs droits propres. On note $\mathcal{L}yndon(X)$ l'ensemble des mots de Lyndon sur X.

Nous citons sans démonstration le résultat fondamental suivant :

Théorème 3.3 (de Radford [38]) *L'algèbre de mélange $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X \rangle$ est une extension purement transcendante de $\mathbb{Q}$, admettant pour base de transcendance la famille $\mathcal{L}yndon(X)$ des mots de Lyndon.*

En d'autres termes, $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ est isomorphe à *l'algèbre des polynômes commutatifs engendrée par les mots de Lyndon.*

Le calcul formel permet de calculer effectivement tout polynôme $P \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$ comme un polynôme commutatif sur les mots de Lyndon pour le mélange (algorithme XTaylor [36]).

3.3.2 Polynômes de Lie

Le produit de Lie de deux polynômes $P,Q \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$ est défini par:

$$[P,Q] \quad = \quad PQ - QP$$

L'algèbre de Lie libre sur $X = \{x_0,x_1\}$, notée $\mathcal{L}ie\langle X\rangle$ est l'algèbre de Lie engendrée par les lettres x_0 et x_1. Par complétion, on définit aussi les *séries de Lie* comme étant les sommes infinies de polynômes de Lie homogènes. Ce sont des séries formelles de $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$, c'est-à-dire des sommes formelles indexées par X^* de la forme $S = \sum_{w\in X^*} \langle S \mid w\rangle w$. Par extension linéaire, on pose pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$:

$$\langle S \mid P\rangle \quad = \quad \sum_{w\in X^*} \langle P \mid w\rangle\langle S \mid w\rangle$$

Le coproduit Δ permet de caractériser les *éléments de Lie*, c'est-à-dire les sommes (éventuellement infinies) de polynômes de Lie homogènes. En effet, on a :

Théorème 3.4 (Ree [39]) *Les propriétés suivantes, pour une série formelle S, sont équivalentes:*

(i) S est un élément primitif *(i.e. $\Delta(S) = 1 \otimes S + S \otimes 1$)*

(ii) S est une série de Lie (i.e. une somme de polynômes de Lie homogènes)

(iii) $T = exp(S)$ est "group-like" (i.e. $\Delta(T) = T \otimes T$)

(iv) $T = exp(S)$ vérifie les relations de mélange (ou "relations de battage"):

$$\langle T \mid u ⧢ v\rangle \quad = \quad \langle T \mid u\rangle\langle T \mid v\rangle \qquad \forall u,v \in X^\star$$

Corollaire 3.2 *Toute série formelle T vérifiant $\langle T|\varepsilon\rangle = 1$ et qui est "group-like" est l'exponentielle d'une série de Lie.*

Preuve :

Posons $T = 1 + H$ (et donc $\langle H|\varepsilon\rangle = 0$). Alors la série $log(T)$ est bien définie, et elle est primitive, et donc série de Lie. $\diamondsuit$

3.3.3 Base de Lie et base duale

A chaque mot de Lyndon l on associe un polynôme de Lie $P(l)$ comme suit : si $l = uv$ avec $l,u,v \in \mathcal{L}yndon(X)$, (avec le suffixe v le plus long possible), on pose :

$$\begin{cases} P(l) &= [P(u),P(v)] \\ P(x) &= x \qquad \text{pour toute lettre } x \in X \end{cases}$$

Le polynôme $P(l)$ est homogène de degré égal à la longueur du mot l. Il est classique que la famille $\mathcal{B} = \{P(l);\ l \in \mathcal{L}yndon(X)\}$ est une base de $\mathcal{L}ie(X)$. On l'ordonne suivant l'ordre *lexicographique par longueur* des mots de Lyndon.

L'algèbre $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ est aussi l'algèbre enveloppante de $\mathcal{L}ie(X)$. Elle admet donc pour base graduée la base de Poincarré-Birkhoff-Witt $PBW(\mathcal{B})$ construite sur $\mathcal{B}$. Les éléments $W \in PBW(\mathcal{B})$ sont les produits des $P(l) \in \mathcal{B}$ pris dans l'ordre décroissant.

Soit $PBW(\mathcal{B})^* = \{W^*\}$ la base duale de $PBW(\mathcal{B})$, définie par :

$$\text{pour tous } W,W' \in PBW(\mathcal{B}), \qquad \langle W^* | W' \rangle = \delta_{W,W'}$$

La restriction à $\mathcal{B}$, notée $\mathcal{B}^*$, est appelée la “base duale graduée” de $\mathcal{B}$. Elle est formée des polynômes $(P^*(l))_{l \in \mathcal{L}yndon(X)}$. Pour tout $l \in \mathcal{L}yndon(X)$, $P^*(l)$ et $P(l)$ sont homogènes, de degré égal à la longueur de l.

Lemme 3.2 *L'algèbre de mélange $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ est une extension purement transcendante de $\mathbb{Q}$, admettant la famille $(P(l))_{l\in\mathcal{B}}$ comme base de transcendance.*

En d'autres termes, $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ est une algèbre de polynômes commutatifs sur $(P(l))_{l\in\mathcal{B}}$.

3.3.4 Factorisation

On sait (voir p.ex. [31]) que tout mot w sur $X = \{x_0,x_1\}$ admet une et une seule factorisation $w = l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_k}$ en mots de Lyndon, *décroissante* (pour l'ordre lexicographique sur les mots), ce que l'on notera encore :

$$X^\star \;=\; \prod_{l \in \mathcal{L}yndon(X)\,\searrow} star(l)$$

Où on a posé $star(l) = \sum_{n\in\mathbb{N}} l^n$. *La flèche $\searrow$ signifie que les produits sont pris dans l'ordre décroissant.*

On remarque que ce produit infini a un sens, car le calcul du coefficient d'un mot w dans ce produit ne fait intervenir qu'un nombre fini de facteurs (correspondants aux mots de Lyndon l pour $|\,l\,| \leq |\,w\,|$).

La *base duale* $\mathcal{B}^*$ permet de transférer cette factorisation aux exponentielles de Lie.

Théorème 3.5 *Toute exponentielle de Lie $T = exp(S)$ est égale au produit infini :*

$$T \;=\; \sum_{w\in X^\star} \langle T \mid w\rangle\, w = \prod_{l\in\mathcal{L}yndon(X)\searrow} e^{\langle T|P^*(l)\rangle\, P(l)}$$

Le calcul du coefficient d'un mot w dans ce produit ne fait intervenir qu'un nombre fini de facteurs (correspondants aux polynômes $P(l)$ pour $|\,l\,|\leq|\,w\,|$).

On peut aussi voir la série T comme l'image par l'application

$$T\otimes Id \;\;:\;\; u\otimes v \mapsto \langle T\mid u\rangle\, v$$

de la "série double" $\sum_{w\in X^*} w\otimes w$ dans l'algèbre des séries formelles sur X^* et à coefficients dans l'algèbre de mélange. Le théorème découle d'un théorème de factorisation de cette série double, et de son image par l'application $T\otimes Id$, qui est un morphisme d'algèbre, puisque $w\mapsto\langle T\mid w\rangle$ est un morphisme pour le mélange (car T est "group-like"), et Id un morphisme pour la concaténation.

4 Série génératrice et renormalisation

4.1 Série génératrice des polylogarithmes

La série génératrice L des polylogarithmes est la série formelle $L(z)$ non commutative dépendant de la variable $z\in\mathbb{C}$, ou mieux de la variable z sur la surface de Rieman $\mathcal{R}$ au dessus de $\mathbb{C}\setminus\{0{,}1\}$:

$$L(z) \;=\; \sum_{w\in X^\star} L_w(z) w, \qquad \forall z\in\mathcal{R}$$

Cette série résume à la fois les propriété récursives des $L_w(z)$ et leurs propriétés intégrales. Elle vérifie :

$$L(z) \;=\; 1+\sum_{u\in X^\star} L_{x_0u}(z)\, x_0 u + \sum_{v\in X^\star} L_{x_1v}(z)\, x_1 v$$

On en déduit que la série génératrice $L(z)$ est l'unique solution dans $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ de l'équation différentielle suivante (avec condition limite), qui n'est autre que l'*équation de Drinfel'd* ([13], voir aussi [19]) :

Proposition 4.1 *La série $L(z)$ vérifie l'équation différentielle avec condition limite :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dz}L(z) &=& \left(\dfrac{x_0}{z}+\dfrac{x_1}{1-z}\right)L(z) \\ L(\epsilon) &=& e^{x_0 log(\epsilon)}+O(\sqrt{\epsilon}) \qquad si\ \epsilon\to 0^+ \end{array}\right. \tag{6}$$

(valeur asymptotique de $L(\epsilon)$ quand ϵ tend vers zéro en restant sur l'axe réel positif).

Preuve :

Elle découle de la définition récursive de $L(w)$ (équation (5)). Le terme en exponentielle $e^{x_0 log\epsilon}$ traduit la première égalité de la définition 3.4. On montre que le coefficient de tout mot $w \in X^* x_1 X^*$ dans la série $L(\epsilon)$ est borné par $O(\epsilon^n log^m \epsilon)$, quand $\epsilon \to 0^+$, où n (resp. m) est le nombre d'occurences dans w de la lettre x_1 (resp. x_0). $\diamondsuit$

4.2 Renormalisation, série Φ_{KZ} de Drinfel'd

En accord avec la définition de $L(z)$ comme série formelle non commutative, on pose pour tout polynôme P :

$$L_P(z) \quad = \quad \langle L(z) \mid P \rangle \; = \; \sum_{w \in X^\star} \langle P \mid w \rangle L_w(z)$$

Théorème 4.1 *Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, la série $L(z)$ est l'exponentielle d'une série de Lie. Ou encore, équivalemment, $L(z)$ vérifie les relations de mélange :*

$$L_{u \,\sqcup\!\sqcup\, v}(z) \quad = \quad L_u(z) L_v(z), \qquad \forall u,v \in X^\star$$

Preuve :

Intuitivement, ceci provient du fait que $lim_{\epsilon \to 0^+} \; L(\epsilon)$ est une exponentielle de Lie.

Il suffit de montrer que L est "group-like", ou encore que $T(z) = \Delta L(z) - L(z) \otimes L(z)$ est égale pour tout z à la série nulle. En effet, on a

$$\frac{d}{dz} L(z) \quad = \quad V(z)\, L(z) \qquad \text{où } V(z) \;=\; \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z} \right).$$

On en déduit, pour tous u et v dans $X^\star$:

$$\begin{aligned} \langle \frac{d}{dz} \Delta(L(z)) | u \otimes v \rangle \quad &= \quad \langle \frac{d}{dz} L(z) | u \sqcup\!\sqcup\, v \rangle \\ &= \quad \langle V(z) L(z) | u \sqcup\!\sqcup\, v \rangle \\ &= \quad \langle \Delta(V(z))\, \Delta(L(z)) | u \otimes v \rangle \end{aligned}$$

d'où $\dfrac{d}{dz} \Delta(L(z)) \;=\; \Delta(V(z))\, \Delta(L(z))$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (L(z) \otimes L(z)) \quad &= \quad V(z)\, L(z) \otimes L(z) + L(z) \otimes V(z)\, L(z) \\ &= \quad \Delta(V(z))\, (L(z) \otimes L(z)) \end{aligned}$$

Donc la série $T(z)$ vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} T(z) \quad &= \quad (\Delta V(z)) T(z) \\ lim_{\epsilon \to O^+} \; T(\epsilon) \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

Ceci fournit une formule récursive définissant les coefficients de $T(z)$ par des équations différentielles avec condition limite en 0^+. Puisque ces limites sont nulles en 0^+, par induction, tous les coefficients de $T(z)$ sont identiquement nuls. $\diamondsuit$

Si $P^\star(l)$ est un élément de la "base duale", on a $\langle L(z) \mid P^\star(l)\rangle = L_{P^\star(l)}(z)$. On en déduit, par le théorème 3.5 :

Théorème 4.2 *([40]). La série $L(z)$ admet la factorisation en produit infini :*

$$L(z) \quad = \quad e^{-log(1-z)x_1} \left[\prod_{l \in \mathcal{L}yndon(X) \setminus \{x_0,x_1\} \searrow} e^{L_{P^\star(l)}(z)\ P(l)} \right] e^{log(z)x_0} \tag{7}$$

On peut donc définir la série $L(z)$ *"renormalisée"*

$$L(z)_{ren} \quad = \quad \prod_{l \in \mathcal{L}yndon(X) \setminus \{x_0,x_1\} \searrow} e^{L_{P^\star(l)}(z)\ P(l)} \tag{8}$$

Cette série est encore une exponentielle de Lie (puisque le produit d'exponentielles de Lie est encore une exponentielle de Lie).

En outre, $L(z)_{ren}$ converge quand z tend vers 1, car pour $l \in \mathcal{L}yndon(X) \setminus \{x_0,x_1\}$ on a $L_{P^\star(l)}(1) = \zeta(P^*(l))$. On obtient alors:

$$Z = L(1)_{ren} \quad = \quad \prod_{l \in \mathcal{L}yndon(X) \setminus \{x_0,x_1\} \searrow} e^{\zeta_{P^\star(l)}\ P(l)} \tag{9}$$

La série Z n'est autre que la série Φ_{KZ} (ou plus précisément KZ_3) de Drinfel'd, [13].

Exemple 4.1 *La valeur de $\log Z$ jusqu'au poids 4 est :*

$$\begin{aligned} \log Z \quad = \quad & \zeta(2)[x_0,x_1] + \zeta(3)[x_0,[x_0,x_1]] + \zeta(3)[[x_0,x_1],x_1] \\ & + \frac{2}{5}\zeta(2)^2[x_0,[x_0,[x_0,x_1]]] + \frac{1}{10}\zeta(2)^2[x_0,[[x_0,x_1],x_1]] \\ & + \frac{2}{5}\zeta(2)^2[[[x_0,x_1],x_1],x_1] + \cdots \end{aligned}$$

4.3 Séries de Chen et monodromie

4.3.1 Série de Chen d'un chemin

Soit a un point de la surface de Rieman $\mathcal{R}$ au dessus de $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ et soit $a \rightsquigarrow b$ un chemin différentiable de a à b dans $\mathcal{R}$.

Définition 4.1 *On appelle série de Chen du chemin γ la série formelle $S_\gamma = S_{a \rightsquigarrow b}$ qui est la valeur en $z = b$ de la solution de l'équation différentielle :*

$$\frac{d}{dz}S(z) \quad = \quad \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}\right) S(z) \qquad \textit{pour } z \in \gamma([0,1])$$

avec $S(a) = 1$ comme condition initiale.

On vérifie que la concaténation $\gamma_1\gamma_2$ de deux chemins a pour série de Chen $S_{\gamma_1\gamma_2} = S_{\gamma_2}S_{\gamma_1}$, (dans l'ordre inverse du produit des chemins), et l'on a $S_{\gamma^{-1}} = S_\gamma^{-1}$.

Lemme 4.1 *Soit $z_0 \rightsquigarrow z$ un chemin différentiable dans $\mathcal{R}$. On peut prolonger analytiquement la série $L(z)$ le long de ce chemin, et l'on a:*

$$L(z) \;=\; S_{z_0 \rightsquigarrow z} L(z_0), \tag{10}$$

Preuve :

En effet, les séries $L(z)$ et $S_{z_0\rightsquigarrow z}L(z_0)$ satisfont la même équation differentielle (6) et prennent la même valeur en $z = z_0$. $\diamondsuit$

Par cette méthode, on déduit par exemple le développement asymptotique :

$$S_{\epsilon \rightsquigarrow 1-\epsilon} \;\sim\; e^{-x_1 \log \epsilon}\, Z\, e^{-x_0 \log \epsilon}, \qquad \text{pour } \epsilon \to 0^+, \tag{11}$$

Remarque

On peut systématiser le calcul de la "renormalisation" par le procédé classique de *régularisation* : On considère la $\mathbb{C}$–application linéaire $\rho : \mathbb{C}[\epsilon, \log\epsilon] \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à tout polynôme de $\mathbb{C}[\epsilon, \log\epsilon]$ associe son terme constant. Ce morphisme s'étend de manière naturelle aux séries formelles non commutatives en une $\mathbb{C}$–application linéaire : $\rho : \mathbb{C}[\epsilon, \log\epsilon]\langle\langle X\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$. On obtient alors $\rho(S_{\epsilon\rightsquigarrow 1-\epsilon}) = Z$. En d'autres termes, l'application ρ *renormalise la série* $S_{\epsilon\rightsquigarrow 1-\epsilon}$.

4.3.2 Calcul de la monodromie

Soit t un réel, $t \in]0,1[$. Notons $\gamma_0(t)$ le chemin circulaire de rayon t (resp. $1-t$), débutant en t, et faisant un tour autour de 0 (resp. autour de 1) dans le sens direct. Il est montré dans [22] que les séries de Chen $S_{\gamma_0(\epsilon)}$ et $S_{\gamma_1(\epsilon)}$, lorsque ϵ tend vers 0 en restant sur l'axe réel positif, ont respectivement pour valeur asymptotique :

$$S_{\gamma_0(\epsilon)} \;=\; e^{2\mathrm{i}\pi x_0} + O(\epsilon), \qquad S_{\gamma_1(\epsilon)} \;=\; e^{-2\mathrm{i}\pi x_1} + O(\epsilon)$$

La composition des séries de Chen (voir [22]) permet alors de relier les séries de Chen $S_{\gamma_0(t)}$ et $S_{\gamma_1(1-t)}$ aux séries de Chen $S_{\gamma_0(\epsilon)}$ et $S_{\gamma_1(\epsilon)}$ respectivement, en utilisant les chemins d'intégration décrits dans la figure 1.

On peut ainsi calculer la monodromie $\mathcal{M}_0L(t)$ (resp. $\mathcal{M}_1L(t)$) correspondant à un tour autour de $z=0$ (resp. autour de $z=1$). Le calcul donne [22] :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \mathcal{M}_0L(t) &=& L(t)\, e^{2\mathrm{i}\pi x_0} &=& L(t)(1 + 2i\pi x_0 + \dots) \\ \mathcal{M}_1L(t) &=& L(t)\, Z^{-1}\, e^{-2\mathrm{i}\pi x_1}\, Z &=& L(t)(1 - 2i\pi x_1 + \dots) \end{array}\right.$$

Le produit dans les membres droits est le produit de Cauchy des séries non commutatives. Ces formules permettent alors de calculer la monodromie en 0 et en 1 de $L_w(z)$ pour tout mot w, en identifiant dans les deux membres les coefficients du mot w. Par exemple:

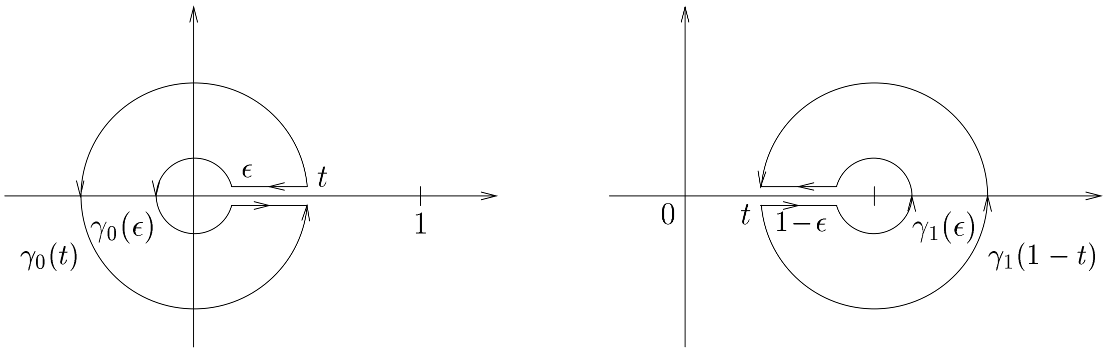

FIG. 1 – *Chemins d'intégration* $\gamma_0(t)$ *et* $\gamma_1(1-t)$

$$\mathcal{M}_0 L_{x_0^3}(t) \quad = \quad L_{x_0^3}(t) + (2i\pi)L_{x_0^2}(t) + \frac{(2i\pi)^2}{2!}L_{x_0}(t) + \frac{(2i\pi)^3}{3!}$$

Il est plus judicieux de ne calculer la monodromie que pour les *mots de Lyndon*, puisque les $(L_l)_{l\in\mathcal{L}yndon(X)}$ forment une base algébrique de $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ sur $\mathbb{Q}$.

Par exemple, puisque l'on a $x_0^{\sqcup\!\sqcup\, 3} = 3!\, x_0^3$, on obtient plus simplement :

$$\mathcal{M}_0 L_{x_0^3}(t) \quad = \quad \frac{1}{3!}\left[\mathcal{M}_0 L_{x_0}(t)\right]^3 \;=\; \frac{1}{3!}(L_{x_0}(t) + 2i\pi)^3$$

4.3.3 Monodromie en 1

Pour obtenir la *monodromie en* 1, on pose $Z^{-1}e^{-2\mathrm{i}\pi x_1}Z = e^{2\mathrm{i}\pi\mathfrak{m}_1}$ où $\mathfrak{m}_1$ est une série de Lie (car le produit d'exponentielles de Lie est encore l'exponentielle d'une série de Lie, par le théorème de Baker-Campbell-Hausdorff). On a bien sûr intérêt à calculer la série $\mathfrak{m}_1$ une fois pour toute (voir [37]).

Proposition 4.2 ([22]) *La série* $\mathfrak{m}_1$ *est donnée par:*

$$\mathfrak{m}_1 \quad = \prod_{l\in\mathcal{L}yndon(X)\setminus\{x_0,x_1\}\searrow} e^{-\zeta(P^*(l))\,\mathrm{ad}_{P(l)}}(-x_1).$$

Preuve :

On utilise la factorisation de la série Z donnée par (9) et les propriétés classiques de la représentation adjointe d'un groupe de Lie : $ad_{P(l)} :\ Q \mapsto [P(l),Q]$ $\diamondsuit$

Voici le début du développement de la série de Lie $\mathfrak{m}_1$ jusqu'au poids 6 (où le polynôme $P(l)$ pour $l \in \mathcal{L}yndon(X)$ est noté en abrégé $[l]$) :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_1 \quad = \quad & -x_1 + \zeta_{x_0x_1}[x_0x_1^2] + \zeta_{x_0^2x_1}[x_0^2x_1^2] + \zeta_{x_0x_1^2}[x_0x_1^3] + \zeta_{x_0^3x_1}[x_0^3x_1^2] \\
& -\zeta_{x_0^3x_1}[x_0^2x_1x_0x_1] + \zeta_{x_0^2x_1^2}[x_0^2x_1^3] + (\zeta_{x_0^2x_1^2} - \frac{1}{2}\zeta_{x_0x_1^2})[x_0x_1x_0x_1^2] \\
& +\zeta_{x_0x_1^3}[x_0x_1^4] + \zeta_{x_0^4x_1}[x_0^4x_1^2] - 2\zeta_{x_0^4x_1}[x_0^3x_1x_0x_1] \\
& +\zeta_{x_0^3x_1^2}[x_0^3x_1^3] + (3\zeta_{x_0^3x_1^2} + \zeta_{x_0^2x_1x_0x_1})[x_0^2x_1x_0x_1^2] \\
& +(3\zeta_{x_0^3x_1^2} + \zeta_{x_0x_1}\zeta_{x_0^2x_1} + 2\zeta_{x_0^2x_1x_0x_1})[x_0^2x_1^2x_0x_1] \\
& +\zeta_{x_0^2x_1^3}[x_0^2x_1^4] + (4\zeta_{x_0^2x_1^3} + \zeta_{x_0x_1x_0x_1^2})[x_0x_1x_0x_1^3] + \zeta_{x_0x_1^4}[x_0x_1^5].
\end{aligned}$$

Algorithme :

La monodromie de $L_l(z)$ en 1 jusqu'au poids n peut en principe s'obtenir comme suit :

1. On calcule la série de Lie $\mathfrak{m}_1$ jusqu'à l'ordre n,
2. On calcule le développement de Taylor de $e^{2i\pi\mathfrak{m}_1}$ à l'ordre n,
3. On a alors: $\mathcal{M}_1 L_l(z) = \sum_{uv=l} L_u(z) \, \langle e^{2i\pi\mathfrak{m}_1} \mid v\rangle$.

Pour un calcul efficace, on travaille plutôt avec les séries de Lie et le produit de Hausdorff, tronqué à l'ordre n. Finalement :

Corollaire 4.1 *La monodromie des polylogarithmes vérifie :*

$$\begin{aligned}
\forall w \in X^*, \quad \mathcal{M}_0 L_{wx_0} &= L_{wx_0} + 2i\pi L_w + R \\
\mathcal{M}_1 L_{wx_0} &= L_{wx_0} + R' \\
\mathcal{M}_0 L_{wx_1} &= L_{wx_1} \\
\mathcal{M}_1 L_{wx_1} &= L_{wx_1} - 2i\pi L_w + R''
\end{aligned}$$

où les "restes" R, R' et R'' sont des combinaisons linéaires de polylogarithmes indicés par les mots strictement plus courts *que w.*

On en déduit en particulier que pour tout $w \in X^*$, L_{wx_1} est sans monodromie en 0.

Corollaire 4.2 *Le groupe de monodromie des fonctions L_w pour $|w| \leq n$ est nilpotent à l'ordre $n+1$.*

Preuve :

Puisque $e^a\, e^b = e^{[a,b]+Q}$ où Q est un polynôme en a et b d'ordre strictement supérieur à 2, on en déduit que le produit de $n+1$ exponentielles égales soit à $M_0 = e^{2i\pi x_0}$ soit à $M_1 = e^{2i\pi x_1}$ est l'exponentielle d'une série en x_0 et x_1 *d'ordre au moins égal à* $n+1$. $\diamondsuit$

A titre d'exemple, voici la monodromie en 1 des polylogarithmes jusqu'au poids 4, calculs faits en AXIOM (où p est une abréviation pour $2i\pi$) :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 L_{x_0} &= L_{x_0} \\
\mathcal{M}_1 L_{x_1} &= L_{x_1} - p \\
\mathcal{M}_1 L_{x_0x_1} &= L_{x_0x_1} - pL_{x_0} \\
\mathcal{M}_1 L_{x_0^2x_1} &= L_{x_0^2x_1} - \frac{1}{2}pL_{x_0}^2 \\
\mathcal{M}_1 L_{x_0x_1^2} &= L_{x_0x_1^2} - pL_{x_0x_1} + \frac{1}{2}p^2L_{x_0} + p\zeta_{x_0x_1} \\
\mathcal{M}_1 L_{x_0^3x_1} &= L_{x_0^3x_1} - \frac{1}{6}pL_{x_0}^3 \\
\mathcal{M}_1 L_{x_0^2x_1^2} &= L_{x_0^2x_1^2} - pL_{x_0^2x_1} + \frac{1}{4}p^2L_{x_0}^2 + p\zeta_{x_0x_1}L_{x_0} + p\zeta_{x_0^2x_1} \\
\mathcal{M}_1 L_{x_0x_1^3} &= L_{x_0x_1^3} - pL_{x_0x_1^2} + \frac{1}{2}p^2L_{x_0x_1} - \frac{1}{6}p^3L_{x_0} + p\zeta_{x_0x_1^2} - \frac{1}{2}p^2\zeta_{x_0x_1}
\end{aligned}
$$

4.4 Algèbre des polylogarithmes

Les résultats précédents permettent d'obtenir élégamment des résultats de structure :

Proposition 4.3 *Les fonctions $L_w(z)$ pour $w \in X^\star$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.*

Preuve :

On établit ce résultat grâce à l'hypothèse de récurrence suivante :

"Les fonctions L_w pour $\mid w \mid \leq n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ sont linéairement indépendantes".

- Cette hypothèse est vérifiée pour $n = 0$ (car $\mathrm{L}i_\varepsilon = 1 \neq 0$).
- Supposons-la vraie pour $n \geq 0$ fixé. Toute relation $\mathbb{C}$-linéaire entre les L_w pour des mots w vérifiant $|w| \leq n+1$ peut s'écrire :

$$\sum_{|u|=n} \lambda_{ux_0} \mathrm{L}i_{ux_0} + \sum_{|u|=n} \lambda_{ux_1} \mathrm{L}i_{ux_1} + \sum_{|w|\leq n} \lambda_w \mathrm{L}i_w = 0. \tag{12}$$

D'après le Corollaire 4.1, en appliquant les opérateurs $(\mathcal{M}_0 - \mathrm{Id})$ et $(\mathcal{M}_1 - \mathrm{Id})$ à l'expression (12), nous obtenons respectivement :

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{i}\pi \sum_{|u|=n} \lambda_{ux_0} \mathrm{L}i_u + R_1 &= 0, \\
-2\mathrm{i}\pi \sum_{|u|=n} \lambda_{ux_1} \mathrm{L}i_u + R_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

où les restes R_1 et R_2 (voir corollaire 4.1) sont des combinaisons linéaires de polylogarithmes indicés par les mots de longueur strictement plus petite que n.

Par l'hypothèse de récurrence, nous déduisons que les coefficients λ_{ux_0} et λ_{ux_1} sont nuls pour $|u| = n$. La somme (12) se réduit donc aux mots de longueur au plus n, et par conséquent $\lambda_w = 0$ pour $|w| \leq n$. D'où le résultat. $\diamondsuit$

On en déduit le théorème :

Théorème 4.3 (Théorème de structure, [22]) *La $\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par les polylogarithmes $\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$ est isomorphe à l'algèbre de mélange $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$. C'est donc une algèbre de polynômes commutatifs engendrée par l'ensemble infini des Li_l où l parcourt l'ensemble des mots de Lyndon.*

Preuve :

En effet, d'après la proposition précédente, le noyau du morphisme L de l'algèbre de mélange $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ dans la $\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par les polylogarithmes est nul. $\diamondsuit$

Corollaire 4.3 *Les polylogarithmes classiques $\mathrm{Li}_l(z)$ pour $l \in \mathcal{L}yndon(X)$ sont algébriquement indépendants.*

5 Algèbre des nombres d'Euler-Zagier

5.1 Les conjectures

Actuellement, de nombreux auteurs [6, 16, 18, 24, 45] étudient le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les sommes d'Euler-Zagier $\zeta(\mathbf{s})$. On dispose de la conjecture suivante [45] :

Conjecture 5.1 (Zagier [45]) *Soit d_n la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les $\zeta(w)$ pour $|w| = n$. Alors :*

$$d_1 = 0, \qquad d_2 = d_3 = 1, \quad d_n = d_{n-2} + d_{n-3}, \qquad n \geq 4.$$

Cet espace vectoriel, inclus dans $\mathbb{R}$, est en fait une algèbre, notée $\mathcal{Z}$, quotient de l'algèbre de mélange $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$, par l'application composée

$$\zeta \ : \ w \ \mapsto \ \mathrm{Li}_w(z) \ \mapsto \ \mathrm{Li}_w(1) \ = \ \zeta(w)$$

La conjecture précédente revient à dire que la série de Poincarré $F(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} d_i t^i$ de cette algèbre quotient Z est donnée par:

$$F(t) \ = \ \frac{t^2 + t^3}{1 - t^2 - t^3}$$

L'étude de l'image de l'application ζ se ramène donc à celle de son noyau $ker\zeta$. En d'autres termes, il s'agit de calculer l'idéal des relations qui définit ce passage au quotient.

Or nous pouvons approcher $ker\zeta$ par des constructions syntaxiques, puisque nous disposons de *deux descriptions syntaxiques* du produit des MZV.

1. le produit de *mélange* dans $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$
2. le produit de quasi-mélange dans l'algèbre $Qsym$ des fonctions quasi-symétriques.

$$\begin{array}{ccc} F_{P*Q} = F_P F_Q & \xrightarrow{\text{code}} & F_{code(P)} F_{code(Q)} = F_{code(P) \sqcup\!\sqcup\, code(Q)} \\ \searrow & & \swarrow \\ & \zeta(P)\zeta(Q) & \end{array}$$

On peut transporter le produit de quasi-mélange dans $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ grâce au codage non commutatif. (section 3.1.3). Ces deux relèvements du produit des nombres d'Euler-Zagier permettent, par différence, de définir un idéal de relations dans $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$.

Définition 5.1 *Notons $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ engendré par les relations*

$$\begin{array}{rclcll} & & u * v - u \sqcup\!\sqcup\, v & \equiv & 0 & \textit{pour } u,v \in x_0X^*x_1 \\ D(v) & = & x_1 * v - x_1 \sqcup\!\sqcup\, v & \equiv & 0 & \textit{pour } v \in x_0X^*x_1 \end{array}$$

La première famille de relations est dans $ker\zeta$. On montre que la seconde famille de relations, introduite par Hoffman, est aussi dans $ker\zeta$. Elle nécessite apparemment une renormalisation, puisque $L_1(1)$ est divergente. Cependant dans la différence $x_1 * v - x_1 \sqcup\!\sqcup\, v$ les termes divergents se simplifient, d'où l'on déduit $\zeta(x_1 * v - x_1 \sqcup\!\sqcup\, v) = 0$ par renormalisation.

Conjecture 5.2 *L'idéal $\mathcal{J}$ est exactement l'idéal de définition des sommes d'Euler-Zagier, en d'autres termes, l'algèbre $\mathcal{Z}$ des sommes d'Euler-Zagier est isomorphe à l'algèbre quotient*

$$\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle/\mathcal{J}$$

Les résultats obtenus jusqu'à présent sont basés sur le calcul de l'idéal $\mathcal{J}$. Ils sont obtenus soit par la *recherche numérique de très haute précision* de relations conjecturées entre différentes valeurs de ζ, soit obtenus par *calcul symbolique exact.* Cette deuxième voie nécessite le calcul exhaustif des tables correspondantes, jusqu'à un poids donné, comme indiqué dans la sous-section qui suit. On peut ainsi vérifier exactement, pour l'idéal $\mathcal{J}$, la conjecture des dimensions de Zagier, jusqu'au poids 13.

Conjecture 5.3 *L'algèbre $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle/\mathcal{J}$ vérifie la conjecture des dimensions de Zagier* ([45]).

5.2 Le calcul des relations

5.2.1 Etablissement des tables

Si l'on choisit sur $\mathcal{L}yndon(X)$ l'ordre lexicographique *par poids*, on peut calculer pour l'idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ engendré par les deux familles de relations

$$l_1 \sqcup\!\sqcup\, l_2 - l_1 \star l_2 \qquad \text{et} \qquad l_1 \sqcup\!\sqcup\, x_1 - l_1 \star x_1$$

une base de Gröbner jusqu'à un poids donné k, c'est-à-dire une famille complète de règles indiquant comment certains $\zeta(l)$ *se réécrivent* comme des polynômes en les $\zeta(l')$ pour des l' plus petits que l. Les $\zeta(l)$ qui n'apparaissent pas en membre gauche dans la table sont irréductibles. Si la conjecture 5.2 est vérifiée, ils forment donc une base de l'algèbre engendrée par les MZV, jusqu'au poids k.

Actuellement, ces tables (nous les donnons en annexe jusqu'au poids 5) ont été calculées jusqu'au poids 10 en AXIOM, jusqu'au poids 12 en MAPLE et jusqu'au poids 13 en C^{++} [41], validant ainsi un certain nombre de relations obtenues expérimentalement par d'autres auteurs par des calculs numériques de haute précision.

5.2.2 Exploitation des tables

Les tables décrivent complètement (jusqu'au poids indiqué) l'idéal des relations polynomiales entre les nombres d'Euler-Zagier. Elles constituent ainsi un système de réécriture, qui permet de mettre toute combinaison polynomiale entre nombres d'Euler-Zagier *sous forme normale*. Une telle combinaison polynomiale est nulle si et seulement si elle se réécrit en zéro. Onpeut donc tester effectivement les relations algébriques entre nombres d'Euler-Zagier.

On obtient par exemple :

- la relation suivante (voir [6]) :

$$\begin{aligned}\zeta(4{,}2{,}4{,}2) \quad = \quad & 72\zeta(5)\zeta(3)\zeta(2)^2 - \frac{93}{2}\zeta(10{,}2) + 36\zeta(2)\zeta(8{,}2) - 486\zeta(5)\zeta(7) - \frac{3742}{9}\zeta(3)\zeta(9)\\ & -\frac{3}{2}\zeta(3)^4 + 36\zeta(2)\zeta(5)^2 - \frac{6}{5}\zeta(2)^2\zeta(6{,}2) + 16\zeta(8{,}2{,}1{,}1) + 56\zeta(7)\zeta(2)\zeta(3)\\ & +\frac{368}{35}\zeta(2)^3\zeta(3)^2 + \frac{209369756}{7882875}\zeta(2)^6.\end{aligned}$$

- Hoffman [24] a proposé deux bases pour l'espace vectoriel des $\zeta(s)$ qu'il a vérifiées jusqu'au poids 8 :
  - la H-*base* contient tous les monômes écrits avec les lettres y_2 et y_3.
  - la G-*base* contient y_2 et tous les mots de Lyndon écrits sur les y_i avec i impair.

  La G-base de Hoffman [24] est mise en défaut [5], au poid 12 par la relation suivante :

$$\zeta(9{,}3) = \frac{9}{14}\zeta(7{,}5) + \frac{388112}{1226225}\zeta(2)^6 - 6\zeta(5)\zeta(7) \tag{13}$$

  qui montre que $\zeta(9{,}3)$ est un polynôme en $\zeta(2)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$ et $\zeta(7{,}5)$.

– Wojkowiak (Décembre 1997, [44]) prédit que les termes irréductibles jusqu'au poids 14 sont :

$(2i\pi)^2$,$\zeta(3)$,$\zeta(5)$,$\zeta(7)$,$\zeta(9)$,$\zeta(11)$,$\zeta(13)$,$\zeta(3{,}5)$,$\zeta(3{,}7)$,
un terme de longueur ≥ 3 et de poids 11,
deux termes de longueur ≥ 2 et de poids 12,
deux termes de longueur ≥ 3 et de poids 13,
trois termes de longueur ≥ 2 et de poids 14

Or les tables fournissent, jusqu'à l'ordre 13, les termes irréductibles suivants :

$\zeta(2)$,$\zeta(3)$,$\zeta(5)$,$\zeta(7)$,$\zeta(9)$,$\zeta(11)$,$\zeta(13)$,
$\zeta(6{,}2)$,
$\zeta(8{,}2)$,
$\zeta(8{,}2{,}1)$,
$\zeta(8{,}2{,}1{,}1)$,$\zeta(10{,}2)$,
$\zeta(8{,}2{,}1{,}1{,}1)$,$\zeta(10{,}2{,}1)$

6 Relations fonctionnelles

6.1 Action du groupe du birapport

On considère le groupe Γ engendré par les transformations projectives de la droite complexe $P^1\mathbb{C}$ qui laissent globalement invariants les trois points $0{,}1{,}\infty$: Un élément $h \in \Gamma$ est déterminé par son action sur ces trois points. Donc Γ est isomorphe au groupe de permutations $\mathfrak{S}_3$. Il est engendré par les deux transformations $z \mapsto 1-z$ (transposition échangeant 0 et 1) et $z \mapsto (z-1)/z$ (cycle d'ordre 3: $0 \mapsto \infty \mapsto 1 \mapsto 0$). Tout élément $g \in \Gamma$ opère sur les formes différentielles par son image réciproque g^*, définie comme suit :

$$g^*(\omega^0) = \tfrac{dg(z)}{g(z)} \quad et \quad g^*(\omega^1) = \tfrac{dg(z)}{1-g(z)}$$

L'action de g^* sur les combinaisons linéaires de ω_0 et ω_1 est alors une application linéaire. Ainsi :

$g(z)$	$z \mapsto 1-z$	$z \mapsto \frac{z-1}{z}$
$g^*\omega_0$	$-\omega_1$	$-\omega_0 - \omega_1$
$g^*\omega_1$	$-\omega_0$	ω_0

L'application image directe par g, notée g_*, opère sur les séries de Chen. Sur les lettres x_0 et x_1, ce n'est autre que l'application linéaire transposée de la restriction de g^* aux combinaisons linéaires de ω_0 et ω_1 :

$g(z)$	$z \mapsto 1-z$	$z \mapsto \frac{z-1}{z}$
g_*x_0	$-x_1$	$-x_0 + x_1$
g_*x_1	$-x_0$	$-x_0$

L'image directe g_* se prolonge par substitution à $X^\star$, puis par sommation aux séries de $\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$. Elle vérifie le théorème :

Théorème 6.1 *Soit g une transformation du groupe Γ, et S la série de Chen associée à un chemin γ de $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Avec les conventions précédentes, on a :*

$$g_*(S_\gamma) = S_{go\gamma}$$

Ce théorème permettra d'obtenir des relations fonctionnelles entre les séries génératrices $L(g(t))$ et $L(t)$ pour t appartenant à l'intervalle réel $]0,1[$ par le procédé suivant :

> On approche $L(g(t))$ par une série de Chen $S_{go\gamma}$ pour un chemin γ ne passant pas par les singularités, puis on exprime cette série de Chen grâce à l'application image directe g_* .

Il sera commode de noter $g_*L(z) = L(g_*(x_0), g_*(x_1) \mid z)$.

Proposition 6.1 ([23]) *(cas $g : z \mapsto 1-z$) Pour tout réel $t \in]0,1[$, on a :*

$$L(1-t) = L(-x_1, -x_0 \mid t)Z \tag{14}$$

Preuve :

On a $g(t) = 1-t$. D'où $g_*(x_0) = -x_1$ et $g_*(x_1) = -x_0$.
On choisit le chemin $\gamma = 1-\epsilon \rightsquigarrow 1-t$ sur l'axe réel positif. En utilisant le lemme 4.1, on obtient :

$$L(1-t) \quad = \quad S_{1-\epsilon\rightsquigarrow 1-t}L(1-\epsilon)$$

On calcule séparément :

$$\begin{array}{rcl} S_{1-\epsilon\rightsquigarrow 1-t} & = & g_*(S_{\epsilon\rightsquigarrow t}) = g_*(L(t)L^{-1}(\epsilon)) \sim g_*(L(t))g_*(e^{-x_0 log\epsilon}) = g_*(L(t))e^{x_1 log\epsilon} \\ L(1-\epsilon) & = & S_{\epsilon\rightsquigarrow 1-\epsilon}L(\epsilon) \sim [e^{-x_1 log\epsilon}Ze^{-x_0 log\epsilon}]e^{x_0 log\epsilon} = e^{-x_1 log\epsilon}Z \end{array}$$

On en tire:

$$\begin{array}{rcl} S_{1-\epsilon\rightsquigarrow 1-t}L(1-\epsilon) & \sim & g_*(L(t))e^{x_1 log\epsilon}e^{-x_1 log\epsilon}Z \\ & \sim & g_*(L(t))Z \end{array}$$

D'où finalement :

$$L(1-t) = g_*(L(t))\ Z$$

$\diamondsuit$

Cette simple formule inclue une famille infinie de relations fonctionnelles. Nous les donnons jusqu'à $|w|=3$:

Exemple 6.1 ([23])

$$\begin{aligned}
\log(1-t) &= -\mathrm{L}i_1(t)\\
\mathrm{L}i_1(1-t) &= -\log(t)\\
\mathrm{L}i_2(1-t) &= -\mathrm{L}i_2(t)+\log(t)\mathrm{L}i_1(t)+\zeta(2)\\
\mathrm{L}i_3(1-t) &= -\mathrm{L}i_{2,1}(t)+\mathrm{L}i_1(t)\mathrm{L}i_2(t)-\frac{1}{2}\log(t)\mathrm{L}i_1(t)^2-\zeta(2)\mathrm{L}i_1(t)+\zeta(3)\\
\mathrm{L}i_{2,1}(1-t) &= -\mathrm{L}i_3(t)+\log(t)\mathrm{L}i_2(t)-\frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{L}i_1(t)+\zeta(3)
\end{aligned}$$

Corollaire 6.1 *On déduit, pour $t=1/2$, la famille infinie de relations entre les $L_w(\frac{1}{2})$:*

$$L(\frac{1}{2})=L(-x_1,-x_0\mid\frac{1}{2})Z$$

Exemple 6.2 (suite)

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{2}\right) &= -\mathrm{L}i_1\left(\frac{1}{2}\right)\\
\mathrm{L}i_1\left(\frac{1}{2}\right) &= -\log\left(\frac{1}{2}\right)\\
\mathrm{L}i_2\left(\frac{1}{2}\right) &= -\mathrm{L}i_2\left(\frac{1}{2}\right)+\log\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}i_1\left(\frac{1}{2}\right)+\zeta(2)\\
\mathrm{L}i_3\left(\frac{1}{2}\right) &= -\mathrm{L}i_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{L}i_1\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}i_2\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}i_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\\
&\quad -\zeta(2)\mathrm{L}i_1\left(\frac{1}{2}\right)+\zeta(3)\\
\mathrm{L}i_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right) &= -\mathrm{L}i_3\left(\frac{1}{2}\right)+\log\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}i_2\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{L}i_1\left(\frac{1}{2}\right)\\
&\quad +\zeta(3)
\end{aligned}$$

On prouve par la même méthode, pour $g : z \mapsto 1-\frac{1}{z}$, grâce à un chemin (voir la figure 2.1) qui contourne la singularité $t=0$:

Proposition 6.2 ([23]) *Pour tout réel $t \in]0,1[$, on a :*

$$L(\frac{t-1}{t}) = L(-x_0+x_1,-x_0\mid t)Z^{-1}(-x_0+x_1,-x_0)e^{i\pi x_0}.$$

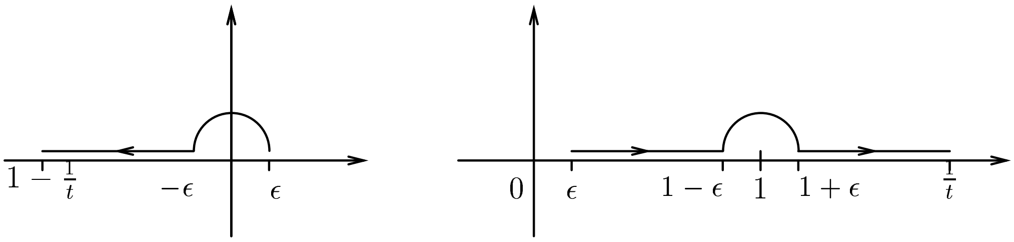

fig. 2.1 fig. 2.2

FIG. 2 – *Chemins d'intégration pour $L(\frac{t-1}{t})$ et $L(\frac{1}{t})$*

Cette formule inclue une famille infinie de relations fonctionnelles. Nous les donnons jusqu'à $|w|= 3$:

Exemple 6.3 ([23])

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{t-1}{t}\right) &= (i\pi) - \mathrm{L}i_1(t) - \log(t)\\
\mathrm{L}i_1\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \log(t)\\
\mathrm{L}i_2\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \mathrm{L}i_2(t) - \log(t)\mathrm{L}i_1(t) - \zeta(2) - \frac{1}{2}\log(t)^2\\
\mathrm{L}i_3\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \mathrm{L}i_{2,1}(t) - \mathrm{L}i_3(t) - \mathrm{L}i_1(t)\mathrm{L}i_2(t) + \frac{1}{2}\log(t)\mathrm{L}i_1(t)^2\\
&\quad + \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\log(t)^2\right)\mathrm{L}i_1(t) + \log(t)\zeta(2) + \frac{1}{6}\log(t)^3\\
\mathrm{L}i_{2,1}\left(\frac{t-1}{t}\right) &= -\mathrm{L}i_3(t) + \log(t)\mathrm{L}i_2(t) - \frac{1}{2}\log(t)^2\mathrm{L}i_1(t) + \zeta(3) - \frac{1}{6}\log(t)^3
\end{aligned}$$

On notera que pour tout mot $w \in X^*x_1$, la formule obtenue pour $L_w(\frac{t-1}{t})$ ne comporte pas de termes en $i\pi$.

Pour $g : z \mapsto \frac{1}{z}$, la même méthode s'applique, grâce à un chemin (voir figure 2.2) qui contourne la singularité $t = 1$:

Proposition 6.3 ([23]) *Pour tout réel $t \in]0,1[$, on a :*

$$L(\frac{1}{t}) = L(-x_0 + x_1,x_1 \mid t)Z^{-1}(-x_0 + x_1,x_1)e^{i\pi x_1}Z$$

Théorème 6.2 *Pour tout g élément du groupe du birapport Γ, et tout mot de Lyndon l, la fonction $L_l(g)$ est un polynôme en les polylogarithmes $L_{l'}$, pour$l' < l$, et à coefficients dans l'algèbre des sommes d'Euler-Zagier* (voir Section 2.2).

En d'autres termes, pour tout $l \in \mathcal{L}yndon(X)$ il existe un polynôme $Q_{l,g}$, à coefficients dans l'algèbre des sommes d'Euler-Zagier, de degré (sur X) au plus égal à $|\,l\,|$ sur les l' de poids $|\,l'\,|<|\,l\,|$, tel que :

$$Li_l(g(z)) \quad = \quad Li_{Q_{l,g}}(z)$$

6.1.1 Dualité

On sait que l'inverse d'une exponentielle de Lie S est égale à son image par l'antipode : $S^{-1} = a(S) = \sum_w \langle S \mid w\rangle(-1)^{|w|}\widetilde{w}$. Utilisons le changement de variable $g : z \mapsto 1-z$:

$$S_{t\rightsquigarrow 1-t} \quad = \quad S_{1-t\rightsquigarrow t}(-x_1, -x_0) \quad = \quad S^{-1}_{t\rightsquigarrow 1-t}(-x_1, -x_0) \quad = \quad a(S_{t\rightsquigarrow 1-t}(-x_1, -x_0))$$

Soit $S \mapsto \hat{S}$ l'application composée de g_* et de a (c'est un antimorphisme). Cette application consiste donc à substituer d'abord respectivement x_0 par x_1 et x_1 par x_0, puis à remplacer chaque mot w par son miroir $\widetilde{w}$. On en déduit $S_{t\rightsquigarrow 1-t} = \widehat{S}_{t\rightsquigarrow 1-t}$. Et donc :

Proposition 6.4 *La série Z est autoduale, c'est-à-dire :*

$$Z \quad = \quad \hat{Z}$$

Corollaire 6.2

$$Z \quad = \quad \hat{L}(1-t)L(t) \quad = \quad \hat{L}(\frac{1}{2})L(\frac{1}{2})$$

Preuve :

D'après l'équation (14), si $g : z \mapsto 1-z$, puisque a est une involution et que L est une exponentielle de Lie, on a :

$$\begin{aligned} Z \quad &= \quad L^{-1}(-x_1, -x_0 \mid t)L(1-t) \quad = \quad a(L(-x_1, -x_0 \mid t))L(1-t) \\ Z \quad &= \quad \hat{Z} \quad = \quad \hat{L}(1-t)\; g_*(L(-x_1, -x_0 \mid t)) \quad = \quad \hat{L}(1-t)L(t) \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

On notera que cette formule permet d'exprimer les nombres $\zeta(\mathbf{s})$ en fonction des nombres $\mathrm{Li}_{\mathbf{s}}(\frac{1}{2})$. Ce qui peut accélérer grandement le calcul numérique, au vu des égalités :

$$\zeta(k) = \mathrm{Li}_k(1) = \sum_n \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{Li}_k(\frac{1}{2}) = \sum_n \frac{1}{2^n n^k}$$

6.1.2 Relation hexagonale

Le contour "hexagonal" de la figure 3 n'entoure aucune singularité. La série de Chen de ce chemin est donc égale à 1. Elle est composée de la série de Chen $S_{\epsilon\rightsquigarrow 1-\epsilon}\, e^{i\pi x_0}$ et de ses images par les deux transformations h_* et h_*^2, où $h : z \mapsto (z-1)/z$. On a donc:

$$S_{\epsilon\rightsquigarrow 1-\epsilon}e^{i\pi x_0}\; h_*(S_{\epsilon\rightsquigarrow 1-\epsilon}e^{i\pi x_0})\; h_*^2(S_{\epsilon\rightsquigarrow 1-\epsilon}e^{i\pi x_0}) \quad \sim \quad 1 \qquad \text{pour } \epsilon \to 0^+$$

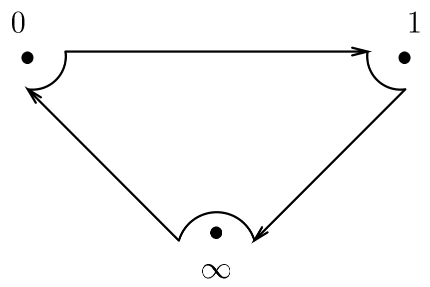

FIG. 3 – *Contour hexagonal*

où $h_*(x_0) = -x_0 + x_1, h_*(x_1) = -x_0$. En renormalisant pour $z \to 0^+$ et en interprétant h_*, on obtient :

Proposition 6.5

$$Ze^{i\pi x_0}\, Z(-x_0 + x_1, -x_0)e^{i\pi(-x_0+x_1)}\, Z(-x_1, x_0 - x_1)e^{-i\pi x_1} \quad = \quad 1$$

Le calcul restreint aux crochets de Lie de longueur 2 permet en particulier de retrouver la relation bien connue $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque

La relation de dualité, tout comme la relation hexagonale, sont des propriétés syntaxiques. Cependant, nous ne pouvons pas actuellement montrer qu'elles sont conséquences de l'idéal de relations $\mathcal{J}$, défini à l'aide des différences des deux produits de mélange.

La relation hexagonale peut être dérivée des calculs dans les catégories monoïdales tressées. C'est aussi le cas de la relation pentagonale (voir p. ex. Drinfel'd). Nous ne pouvons pas non plus montrer qu'elles sont conséquences de l'idéal $\mathcal{J}$. Cependant, aux poids où les tables ont été calculées, la relation pentagonale n'apporte rien de plus que l'idéal $\mathcal{J}$, tel qu'il est calculé dans nos tables.

6.2 Relations algébriques et décidabilité

Le théorème 6.2 permet de *décider de l'existence de relations* entre les $Li_l(g(z))$ pour les $g \in \Gamma$. Soit en effet une combinaison linéaire à coefficients rationnels:

$$K(z) \quad = \quad \sum_{g \in \Gamma} r_g \mathrm{Li}_l(g(z))$$

Avec les notations de la section précédente, on a $K(z) = Li_H(z)$ si H est le polynôme $H = \sum_{g\in\Gamma} r_g Q_{l,g}$, qui est de degré au plus égal à $\mid l \mid$. On en déduit que $K(z)$ est un polynôme en $L_{x_0}(z)$ et $L_{x_1}(z)$ si et seulement si H est un polynôme (pour le mélange) en x_0 et x_1. Or ceci équivaut à la propriété suivante:

$$\forall l' \in \mathcal{L}yndon(X) \backslash \{x_0, x_1\} \quad \Longrightarrow \quad H \triangleright [l'] = 0$$

où intervient le "calcul de résiduel à droite" [1] par le polynôme de Lie $[l']$, qui est une dérivation pour le produit de mélange. Mais on a aussi $H \triangleright [l'] = 0$ pour tout mot de Lyndon l' tel que $deg(H) <\mid l' \mid$.

On déduit de tout ceci:

Théorème 6.3 *Supposons connue la table des relations d'Euler-Zagier jusqu'au poids $n-1$, et soit l un mot de Lyndon de longueur n. Alors on peut décider effectivement s'il existe des nombres rationnels r_g, pour $g \in \Gamma$, tels que $\sum_{g\in\Gamma} \left[r_g \mathrm{Li}_{x_0^n x_1}(g(z))\right]$ soit un polynôme en $log(z)$ et $log(1-z)$ à coefficients dans l'algèbre des sommes d'Euler-Zagier.*

Plus précisément,

- On calcule les polynômes $Q_{l,g}$, puis le polynôme H à coefficients r_g indéterminés.
- On résout, pour les inconnues r_g, le système

$$H \triangleright l' = 0, \quad \text{pour } 1 < \mid l' \mid \leq n$$

Cette résolution est possible si l'on dispose de la table des relations entre les nombres d'Euler-Zagier de poids inférieur ou égal à n.

7 Adjonction des racines de l'unité

Nous présentons à présent l'enrichissement des sommes d'Euler-Zagier par un ensemble de racines de l'unité. On obtiendra ainsi de nouvelles tables, indexées par les mots de Lyndon sur un alphabet "coloré".

Nous les présentons ici, avec la construction des tables correspondantes, suivant l'exposé plus détaillé fait en [3, 4].

Les tables de relations ainsi obtenues auront comme conséquence les relations entre nombres d'Euler-Zagier classiques. On construit ces tables en particulier pour vérifier si elles impliquent de nouvelles relations entre les nombres d'Euler-Zagier classiques.

7.1 Sommes d'Euler-Zagier colorées

Soit $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des racines $n^{èmes}$ de l'unité (par exemple $\mathcal{O}_2 = \{-1,1\}$, ou encore $\mathcal{O}_3 = \{j,j^2,1\}$).

On appelle *multi-indice coloré* de longueur k tout couple $(\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma})$ où $\mathbf{s} = (s_1, \ldots ,s_k)$ est un multi-indice de longueur k, et $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots ,\sigma_k)$ est une suite de k racines $n^{èmes}$ de l'unité, $\sigma_i \in \mathcal{O}_n$ (par extension ε désigne le multi-indice coloré trivial, i.e. de longueur 0).

1. si $P \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$, le résiduel à droite $H \triangleright P$ d'une série H par rapport à P est défini par : $\langle H \triangleright P|w\rangle = \langle H|Pw\rangle$.

On appelle *somme d'Euler-Zagier de multi-indice coloré* $(\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma})$ la somme infinie :

$$\zeta(\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma}) \quad = \quad \sum_{n_1>\cdots>n_k>0} \frac{{\sigma_1}^{n_1}\cdots{\sigma_k}^{n_k}}{{n_1}^{s_1}\cdots{n_k}^{s_k}} \tag{15}$$

Mais cette somme ne converge que si $(s_1;\sigma_1)\neq(1;1)$, et elle ne converge absolument que si $s_1>1$.

7.1.1 Fonctions quasi-symétriques colorées, et codage non commutatif

Si l'on introduit les fonctions quasi-symétriques colorées en posant $F_\varepsilon=1$, et

$$F_{\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma}} \quad = \quad \sum_{n_1>\cdots>n_k>0} \sigma_1^{n_1} t_{n_1}^{s_1}\cdots\sigma_k^{n_k} t_{n_k}^{s_k}$$

on retrouve, dans le cas où $(s_1;\sigma_1)\neq(1;1)$, les sommes d'Euler-Zagier colorées par la substitution :

$$\boxed{F_{\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma}} \quad \xrightarrow[t_n\,\mapsto\,\frac{1}{n}]{} \quad \zeta(\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma})}$$

On peut coder les multi-indices sur l'alphabet $Y=\{y_{i;\sigma},\ i\in\mathbb{N}^*,\ \sigma\in\mathcal{O}_n\}$. Le multi-indice $(\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma})$, et donc aussi $F_{\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma}}$, est alors codé par le mot:

$$w \quad = \quad y_{s_1;\sigma_1}\cdots y_{s_k;\sigma_k}$$

L'opération $(y_i,y_j)\mapsto y_{i+j}$ doit être remplacée, pour les lettres colorées, par l'opération suivante utilisant la structure de groupe de $\mathcal{O}_n$:

$$(y_{i;\sigma},y_{i';\sigma'}) \quad \mapsto \quad y_{i+i',\sigma\sigma'}$$

Tout polynôme non commutatif $P\in\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ code une fonction quasi-symétrique colorée F_P. Le produit ordinaire des fonctions quasi-symétriques colorées se relève dans Y^* en le produit de quasi-mélange, associatif et commutatif, défini par :

$$\left\{\begin{array}{ll} \varepsilon * w = w * \varepsilon = w & \text{pour } w\in Y^* \\[1ex] y_{i;\sigma}u * y_{j;\rho}v & \\ \quad = y_{i;\sigma}(u * y_{j;\rho}v) + y_{j;\rho}(y_{i;\sigma}u * v) + y_{i+j;\sigma\rho}(u*v) & \text{pour } y_{i;\sigma},y_{j;\rho}\in Y,\ u,v\in Y^* \end{array}\right.$$

Théorème 7.1 *L'application $P\mapsto F_P$ est un morphisme pour le quasi-mélange. En d'autres termes, $F_{P\,*\,Q}=F_P.F_Q$.*

7.1.2 Polylogarithmes colorés

Définition 7.1 *Le* polylogarithme coloré *pour le multi-indice* $(\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma})$ *de longueur* k *est la fonction de la variable complexe* z *somme de la série :*

$$\mathrm{L}i_{\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma}}(z) \quad = \sum_{n_1>\cdots>n_k>0} z^{n_1}\frac{{\sigma_1}^{n_1}\cdots{\sigma_k}^{n_k}}{{n_1}^{s_1}\cdots{n_k}^{s_k}} \tag{16}$$

Cette somme converge à l'intérieur du disque unité ouvert. Sous la condition $(s_1;\sigma_1)\neq(1;1)$, on retrouve les sommes d'Euler-Zagier colorées en spécialisant en $z=1$:

$$\boxed{\mathrm{L}i_{\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma}}(z) \quad \underset{z\mapsto 1}{\longrightarrow} \quad \zeta(\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma})}$$

7.1.3 Intégrales itérées

L'interprétation analytique fait appel aux formes différentielles ([6, 8]) :

$$\omega_{x_0} \;=\; \frac{dz}{z}, \qquad \text{et} \qquad \omega_{x_\sigma} \;=\; \frac{\sigma\ dz}{1-\sigma z} \quad \text{pour} \quad \sigma\in\mathcal{O}_n$$

On étend la définition des polylogarithmes (prenant en compte les singularités $z=\sigma_i^{-1}$) par :

$$\left\{\begin{array}{rcll} L_{x_0^n} &=& \dfrac{1}{n!}Log^n(z) & \\ L_{x_0 w}(z) &=& \displaystyle\int_0^z \omega_{x_0}L_w \;=\; \int_0^z \frac{dt}{t}\,L_w(t) & \text{si } \ w\in X^\star x_1 X^\star, \ \text{ et} \\ L_{x_\sigma w}(z) &=& \displaystyle\int_0^z \omega_{x_\sigma}L_w \;=\; \int_0^z \frac{\sigma\ dt}{1-\sigma t}L_w(t) & \text{si } w\in X^\star \ \text{ et } \sigma\in\mathcal{O}_n \end{array}\right. \tag{17}$$

7.1.4 Codage des muti-indices colorés sur l'alphabet X

Tout multi-indice coloré $(\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma})$ est codé sur l'alphabet $X=\{x_0\}\cup\{x_\sigma,\sigma\in\mathcal{O}_n\}$, par le mot :

$$code(\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma}) \;=\; x_0^{s_1-1}x_{\sigma_1}x_0^{s_2-1}x_{\sigma_1\sigma_2}\cdots x_0^{s_k-1}x_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}$$

Proposition 7.1 *Si le mot* $w\in X^*$ *est le code de* $(\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma})$*, alors on a :*

$$Li_{\mathbf{s};\boldsymbol{\sigma}}(z) \;=\; L_w(z)$$

Le *produit de mélange* se définit dans le cas coloré par la même formule récursive que dans le cas $X=\{x_0,x_1\}$. On notera encore $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ l'*algèbre de mélange colorée.*

On étend la définition de L par linéarité aux polynômes $P\in\mathbb{Q}\langle X\rangle$.

Théorème 7.2 *L'application* $P\mapsto L_P$ *est un morphisme de l'algèbre de mélange dans l'algèbre des fonctions de la variable complexe.*

7.1.5 L'idéal des relations

Le calcul de l'image de l'application ζ s'obtient encore en calculant son noyau $ker\zeta$.

Nous disposons à nouveau de *deux descriptions syntaxiques* du produit des MZV colorés, et l'on peut reproduire le schéma :

$$\begin{array}{ccc} F_{P * Q} = F_P F_Q & \xrightarrow{\text{code}} & F_{code(P)} F_{code(Q)} = F_{code(P) \sqcup\!\sqcup\, code(Q)} \\ & \searrow \qquad \swarrow & \\ & \zeta(P)\zeta(Q) & \end{array}$$

soumis aux conditions de convergence $P,Q \in \mathbb{Q}\langle Y\rangle \setminus y_{1;1}\mathbb{Q}\langle Y\rangle$.

Définition 7.2 *Notons $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$ engendré par les relations*

$$\begin{array}{rcllll} & & u * v - u \sqcup\!\sqcup\, v & \equiv & 0 & \textit{pour } u,v \in X^\star X_{\mathcal{O}_n} \setminus x_1 X^\star \\ D(v) & = & x_1 * v - x_1 \sqcup\!\sqcup\, v & \equiv & 0 & \textit{pour } v \in X^\star X_{\mathcal{O}_n} \setminus x_1 X^\star \end{array}$$

où $X_{\mathcal{O}_n} = \{x_\sigma, \sigma \in \mathcal{O}_n\}$.

La seconde famille de relations, introduite par Hoffman, est aussi dans $ker\zeta$. Bien que $L_{1;1}(1)$ soit divergente, dans la différence $x_1 * v - x_1 \sqcup\!\sqcup\, v$ les termes divergents se simplifient.

Conjecture 7.1 *L'idéal $\mathcal{J}$ est exactement l'idéal $ker\zeta$ de définition des sommes d'Euler-Zagier colorés, en d'autres termes, l'algèbre des sommes d'Euler-Zagier colorées est isomorphe à l'algèbre quotient*

$$\mathcal{S}h_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle / \mathcal{J}$$

7.1.6 Tables pour les sommes d'Euler-Zagier colorées

On peut donc établir les tables des sommes d'Euler-Zagier colorées par la même méthode de base de Gröbner que dans le cas classique. Cette méthode nécessite de définir un ordre total sur l'alphabet X. On adopte sur les racines de l'unité l'ordre :

$$e^{\frac{2i\pi}{n}} \;<\; \cdots \;<\; e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} \;<\; 1$$

Et sur l'alphabet Y l'ordre suivant :

$$y_{i_1;\sigma_1} < y_{i_2;\sigma_2} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{soit} & i_1 > i_2 \\ \text{soit} & i_1 = i_2 \text{ et } \sigma_1 < \sigma_2 \end{cases}$$

On munit alors Y^* de l'ordre lexicographique par poids. Le début de ces tables est donné en annexe. Elles ont été calculées jusqu'au poids 8 en MAPLE (voir [3, 4]).

Références

[1] *La science des nœuds*, Dossiers "Pour la science" (édition française de Scientific American), avril 1997.

[2] R. Apery.– *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Société Mathématique de France Astérique 61 (1979) p. 11-13

[3] M. Bigotte, G. Jacob, N.E. Oussous, M. Petitot.– *Coloured multiple zeta values relations tables*, Symposium IMACS ACA99, Madrid, june 1999.

[4] M. Bigotte, G. Jacob, N.E. Oussous, M. Petitot.– *Lyndon words and shuffle algebras for generating the coloured multiple zeta values relations tables*, Colloque "WORDS", Rouen, France, sept. 1999.

[5] M. Bigotte, Hoang Ngoc Minh, G. Jacob, N.E. Oussous, M. Petitot.– *Un contre exemple à une conjecture de Hoffman*, Techn. report N°5, L.I.F.L. Université Lille 1, 1999.

[6] J.M. Borwein, D.M. Bradley & D.J. Broadhurst.– *Evaluation of k-fold Euler/Zagier sums : a compendium of results for arbitrary k*. Electronic J. Combinatorics, (1997).

[7] J.M. Borwein & D.M. Bradley.– *Searching Symbolically for Apéry-like Formulae for Values of the Riemann Zeta Function*, SIGSAM Bulletin of Symbolic and Algebraic Manipulation, Association of Computing Machinery, Vol. 30, No. 2, Issue 116, June 1996, pp. 2-7.

[8] D.J. Broadhurst.– *Massive 3-loop Feynmann diagrams reductible to SC^* primitives of algebras of the sixth root of unity*, Physics Deparment, Open University, U.K., 1998.

[9] P. Cartier.– *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev–Kontsevich des noeuds*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.316, série I, pp. 1205–1210, 1993.

[10] P. Cartier.– *Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales généralisées*, Séminaire Bourbaki, 40ème année, 1987-88, n°687.

[11] P. Cartier.– *Nouvelles aventures au pays des q-analogues (équation de Yang-Baxter)*, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1993, 460/S-23, p. 5-37.

[12] K.T. Chen.– *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc., vol 83, 1977, pp. 831-879.

[13] V. Drinfel'd.– *On quasitriangular quasi–hopf algebra and a group closely connected with gal($\bar{q}/q$)*. Leningrad Math. J. 2, 4 (1991), 829–860.

[14] J. Ecalle.– *Six lectures on transseries, analysable functions and the constructive proof of Dulac's conjecture*, in Bifurcations and periodic orbits of vector fields, Dana Schlowiuk ed., Math. and physical sciences, Kluwer academic publ., 1993, p. 75-184.

[15] L. Euler, *"Opera omnia"*, Ser. 1,vol XV, Teubner, Berlin 1917, p.217-267.

[16] Ph. Flajolet & B. Salvy.– *Euler Sums and Contour Integral Representations*, techn. report, INRIA Rocquencourt, 1996.

[17] I. Gessel.– *Multipartite P-partitions and inner product of skew Schur functions*, Combinatorics and algebra, C. Greene, éd., Contemporary Mathematics **34**, 1984, p. 289–301.

[18] A.B. Goncharov.– *Multiple polylogarithms at the roots of unity and motivic Lie algebra*, in Preprint MPI-62/97, Proc. of Arbeitstagung, Bonn, june 1997.

[19] J. Gonzalez-Lorca.– *Série de Drinfel'd, monodromie et algèbres de Hecke*, thèse, Ecole Normale Supérieure, Paris, 1998.

[20] I.M. Guelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc & C. Reutenauer.– *Noncommutative symmetric functions*, Adv. Math., 1995, vol.112, p. 218-348.

[21] M.M. Hjortnaes.– *Overforing av rekken* $\sum_1^\infty(1/k^3)$ *till and bestemt integral*, Proc. 12th Cong. Scand. Maths, (Lund 1953), (Lund 1954).

[22] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot & J. Van der Hoeven.– *Polylogarithms and Shuffle Algebra*, FPSAC'98, Toronto, Canada, Juin 1998.

[23] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot & J. Van der Hoeven.– *L'algèbre des polylogarithms par les séries génératrices*, FPSAC'99, Barcelon, Espagne, Juillet 1999.

[24] M. Hoffman.– *Multiple harmonic series*, Pacific Journal of Mathematics, 152(2):275–290, 1995.

[25] M. Hoffman.– *The algebra of multiple harmonic series*, Journal of Algebra, August 1997.

[26] M.E. Hoffman.– *Quasi-Shuffle Hopf Algebras*, techn. report, Math. Department, U.S. Naval Academy, Annapolis, 1998.

[27] M.E. Hoffman.– *Algebraic Structures on the Set of Multiple Zeta Values*, IMACS-ACA'99, Madrid, June 1999.

[28] C. Kassel, M. Rosso & V. Turaev.– *Quantum groups and knot invariants* Panoramas et Synthèses, n¡5, Société mathématique de France 1997.

[29] M. Kontsecivh.– *Vassiliev's knot invariants*, in *I.M. Gelfand Serminar*, Adv. Soviet Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, vol. 16,Part 2(1993).

[30] T.Q.T. Le & J. Murakami.– *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links*, Comp. Math. 102 (1996), p. 41-64.

[31] M. Lothaire.– *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, 1983.

[32] T.Q.T. Lê & J. Murakami.– *Kontsevich's integral for Kauffman polynomial*, Nagoya Math., pp 39-65, 1996.

[33] L. Lewin.– *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, New York and Oxford, 1981.

[34] L. Lewin.– *Structural properties of polylogarithms*, Mathematical survey and monographs, Amer. Math. Soc., vol 37, 1992.

[35] N. Nielsen.– *Recherches sur des généralisations d'une fonction de Legendre et d'Abel*, Annali di Matematica, 9:219–235, 1904.

[36] M. Petitot.– *Algèbre non commutative en Scratchpad. Application au problème de la réalisation minimale analytique*, PhD Thesis, Université Lille I, 1992.

[37] M. Petitot.– *Quelques méthodes de Calcul Formel appliquées à l'étude des équations différentielles*, HDR, Université Lille I, 1999.

[38] D.E. Radford.– *A natural ring basis for the shuffle algebra and an application to group schemes*, Journal of Algebra, 58:432–454, 1979.

[39] R. Ree.– *Lie elements and an algebra associated with shuffles*, Ann. of Math, 68 (1958), 210–220.

[40] C. Reutenauer & C. Malvenuto.– *Duality between quasi-symetric functions and the Solomon descent algebra*, J. of Algebra, 1995, p. 967-982.

[41] El Wardi.– mémoire DEA, Lille 1, Juillet 1999.

[42] C.N. Yang & M.L. Ge (editors).– *Braid groups, knot theory and statistical mechanics*, Av. Series Math. Phys., vol. 9, World Scientific, 1989.

[43] D. Zagier.– *Values of zeta functions and their applications*, in "First European Congress of Mathematics", volume 2, pp. 179–512. Birkhäuser, 1994.

[44] Z. Wojtkowiak.– *Non abelian unipotent periods. Monodromy of iterated integrals*, London Math. Soc. Lecture Notes serie, Vol.243, pp 219-289, 1997.

[45] D. Zagier.– *Values of zeta functions and their applications*, in First European Congress of Mathematics, 1994, vol. 2, Birkhaüser, p. 497-512.

ANNEXE

Table des nombres d'Euler-Zagier

poids 3 :

$$\zeta(2,1) = \zeta(3) \tag{18}$$

poids 4 :

$$\begin{align} \zeta(4) &= \frac{2}{5}\,\zeta(2)^2 \tag{19}\\ \tag{20}\\ \zeta(3,1) &= \frac{1}{10}\,\zeta(2)^2 \tag{21}\\ \tag{22}\\ \zeta(2,2) &= \frac{3}{10}\,\zeta(2)^2 \tag{23}\\ \tag{24}\\ \zeta(2,1,1) &= \frac{2}{5}\,\zeta(2)^2 \tag{25} \end{align}$$

poids 5 :

$$\begin{align} \zeta(4,1) &= 2\,\zeta(5) - \zeta(2)\,\zeta(3) \tag{26}\\ \tag{27}\\ \zeta(3,2) &= -\frac{11}{2}\,\zeta(5) + 3\,\zeta(2)\,\zeta(3) \tag{28}\\ \tag{29}\\ \zeta(3,1,1) &= 2\,\zeta(5) - \zeta(2)\,\zeta(3) \tag{30}\\ \tag{31}\\ \zeta(2,3) &= \frac{9}{2}\,\zeta(5) - 2\,\zeta(2)\,\zeta(3) \tag{32}\\ \tag{33}\\ \zeta(2,2,1) &= -\frac{11}{2}\,\zeta(5) + 3\,\zeta(2)\,\zeta(3) \tag{34}\\ \tag{35}\\ \zeta(2,1,2) &= \frac{9}{2}\,\zeta(5) - 2\,\zeta(2)\,\zeta(3) \tag{36}\\ \tag{37}\\ \zeta(2,1,1,1) &= \zeta(5) \tag{38} \end{align}$$

Cette table, calculée en MAPLE par M. Bigotte jusqu'à l'ordre 12, est disponible sur le site web : (http://www.lifl.fr/~bigotte). Nous disposons aussi d'un calcul jusqu'à l'ordre 13 en C^{++} par A. El Wardi. On y retrouve les relations conjecturées dans [6].

Table des nombres d'Euler-Zagier colorés

Voici la table pour 2 racines de l'unité, 1 *et* −1, *jusqu'à l'ordre 5.*

poids 2 :

$$\begin{aligned}
\zeta(2;-1) &= -\frac{1}{2}\,\zeta(2)\\
\zeta(1{,}1;-1,-1) &= -\frac{1}{2}\,\zeta(2)+\frac{1}{2}\,\zeta(1;-1)^2\\
\zeta(1{,}1;-1{,}1) &= \frac{1}{2}\,\zeta(1;-1)^2
\end{aligned}$$

poids 3 :

$$\begin{aligned}
\zeta(3;-1) &= -\frac{3}{4}\,\zeta(3)\\
\zeta(2{,}1;-1,-1) &= -\frac{13}{8}\,\zeta(3)-\frac{3}{2}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(2)\\
\zeta(2{,}1;-1{,}1) &= \frac{1}{8}\,\zeta(3)\\
\zeta(2{,}1;1,-1) &= \zeta(3)+\frac{3}{2}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(2)\\
\zeta(2{,}1) &= \zeta(3)\\
\zeta(1{,}2;-1,-1) &= \frac{5}{8}\,\zeta(3)+\zeta(1;-1)\,\zeta(2)\\
\zeta(1{,}2;-1{,}1) &= -\frac{1}{4}\,\zeta(3)-\frac{1}{2}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(2)\\
\zeta(1{,}1{,}1;-1,-1,-1) &= -\frac{1}{4}\,\zeta(3)-\frac{1}{2}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(2)+\frac{1}{6}\,\zeta(1;-1)^3\\
\zeta(1{,}1{,}1;-1,-1{,}1) &= -\frac{7}{8}\,\zeta(3)-\frac{1}{2}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(2)+\frac{1}{6}\,\zeta(1;-1)^3\\
\zeta(1{,}1{,}1;-1{,}1,-1) &= \frac{1}{8}\,\zeta(3)+\frac{1}{6}\,\zeta(1;-1)^3\\
\zeta(1{,}1{,}1;-1{,}1{,}1) &= \frac{1}{6}\,\zeta(1;-1)^3
\end{aligned}$$

poids 4 :

$$\begin{aligned}
\zeta(4;-1) &= -\frac{7}{20}\,\zeta(2)^2 \\
\zeta(4) &= \frac{2}{5}\,\zeta(2)^2 \\
\zeta(3{,}1;-1,-1) &= -\frac{11}{20}\,\zeta(2)^2 - \frac{7}{4}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3) - \zeta(3{,}1;-1{,}1) \\
\zeta(3{,}1;1,-1) &= \frac{19}{40}\,\zeta(2)^2 + \frac{7}{4}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3) \\
\zeta(3{,}1) &= \frac{1}{10}\,\zeta(2)^2 \\
\zeta(2{,}2;-1,-1) &= -\frac{3}{40}\,\zeta(2)^2 \\
\zeta(2{,}2;-1{,}1) &= \frac{1}{8}\,\zeta(2)^2 - 2\,\zeta(3{,}1;-1{,}1) \\
\zeta(2{,}1{,}1;-1,-1,-1) &= -\frac{21}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3) - \frac{7}{20}\,\zeta(2)^2 - \frac{3}{2}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2) \\
\zeta(2{,}1{,}1;-1,-1{,}1) &= -\frac{23}{40}\,\zeta(2)^2 - \frac{3}{4}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2) - \frac{3}{2}\,\zeta(3{,}1;-1{,}1) \\
&\quad -\frac{21}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3) \\
\zeta(2{,}1{,}1;-1{,}1,-1) &= \frac{7}{4}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3) + \frac{3}{10}\,\zeta(2)^2 + \frac{3}{4}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2) \\
&\quad +\zeta(3{,}1;-1{,}1) \\
\zeta(2{,}1{,}1;-1{,}1{,}1) &= -\frac{1}{40}\,\zeta(2)^2 + \frac{1}{2}\,\zeta(3{,}1;-1{,}1) \\
\zeta(2{,}2;1,-1) &= -\frac{11}{40}\,\zeta(2)^2 + 2\,\zeta(3{,}1;-1{,}1) \\
\zeta(2{,}2) &= \frac{3}{10}\,\zeta(2)^2 \\
\zeta(2{,}1{,}1;1,-1,-1) &= \frac{1}{4}\,\zeta(2)^2 + \frac{3}{2}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2) + \frac{3}{2}\,\zeta(3{,}1;-1{,}1) \\
&\quad +\frac{21}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3) \\
\zeta(2{,}1{,}1;1,-1{,}1) &= \frac{7}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3) + \frac{1}{8}\,\zeta(2)^2 + \frac{3}{4}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2) \\
&\quad -\zeta(3{,}1;-1{,}1) \\
\zeta(2{,}1{,}1;1{,}1,-1) &= \frac{3}{40}\,\zeta(2)^2 - \frac{3}{4}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2) - \frac{1}{2}\,\zeta(3{,}1;-1{,}1) \\
\zeta(2{,}1{,}1) &= \frac{2}{5}\,\zeta(2)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(1{,}3;-1,-1) &= \frac{3}{20}\,\zeta(2)^2+\zeta(1;-1)\,\zeta(3)+\zeta(3{,}1;-1{,}1)\\
\zeta(1{,}3;-1{,}1) &= -\frac{1}{8}\,\zeta(2)^2-\frac{3}{4}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)\\
\zeta(1{,}2{,}1;-1,-1,-1) &= \frac{15}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)+\frac{1}{10}\,\zeta(2)^2+\frac{3}{2}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2)\\
&\quad +2\,\zeta(3{,}1;-1{,}1)\\
\zeta(1{,}2{,}1;-1,-1{,}1) &= \zeta(1;-1)\,\zeta(3)+\frac{1}{4}\,\zeta(2)^2+\frac{1}{2}\,\zeta(3{,}1;-1{,}1)\\
\zeta(1{,}2{,}1;-1{,}1,-1) &= -\frac{1}{4}\,\zeta(2)^2-\frac{3}{2}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2)-2\,\zeta(3{,}1;-1{,}1)\\
&\quad -\frac{5}{2}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)\\
\zeta(1{,}2{,}1;-1{,}1{,}1) &= \frac{3}{40}\,\zeta(2)^2-\frac{3}{2}\,\zeta(3{,}1;-1{,}1)+\frac{1}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)\\
\zeta(1{,}1{,}2;-1,-1,-1) &= -\frac{1}{4}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)+\frac{3}{20}\,\zeta(2)^2-\frac{1}{4}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2)\\
&\quad -2\,\zeta(3{,}1;-1{,}1)\\
\zeta(1{,}1{,}2;-1,-1{,}1) &= -\frac{1}{10}\,\zeta(2)^2+\frac{1}{2}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2)+\frac{1}{2}\,\zeta(3{,}1;-1{,}1)\\
&\quad +\frac{5}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)\\
\zeta(1{,}1{,}1{,}1;-1,-1,-1,-1) &= \frac{1}{40}\,\zeta(2)^2-\frac{1}{4}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)-\frac{1}{4}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2)\\
&\quad +\frac{1}{24}\,\zeta(1;-1)^4\\
\zeta(1{,}1{,}1{,}1;-1,-1,-1{,}1) &= -\frac{3}{40}\,\zeta(2)^2+\frac{3}{2}\,\zeta(3{,}1;-1{,}1)+\frac{1}{24}\,\zeta(1;-1)^4\\
&\quad -\frac{1}{4}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)-\frac{1}{4}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2)\\
\zeta(1{,}1{,}1{,}1;-1,-1{,}1,-1) &= -\frac{1}{8}\,\zeta(2)^2+\frac{1}{24}\,\zeta(1;-1)^4-\frac{7}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)\\
&\quad -\frac{1}{4}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2)\\
\zeta(1{,}1{,}1{,}1;-1,-1{,}1{,}1) &= -\frac{3}{8}\,\zeta(2)^2-\frac{1}{4}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2)-\frac{1}{2}\,\zeta(3{,}1;-1{,}1)\\
&\quad -\frac{7}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)+\frac{1}{24}\,\zeta(1;-1)^4\\
\zeta(1{,}1{,}2;-1{,}1,-1) &= \frac{5}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)+\frac{3}{40}\,\zeta(2)^2+\frac{1}{2}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2)\\
\zeta(1{,}1{,}2;-1{,}1{,}1) &= -\frac{3}{40}\,\zeta(2)^2-\frac{1}{4}\,\zeta(1;-1)^2\,\zeta(2)+\frac{3}{2}\,\zeta(3{,}1;-1{,}1)\\
&\quad -\frac{1}{4}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\zeta(1,1,1,1;-1,1,-1,-1) &= \frac{1}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)+\frac{3}{40}\,\zeta(2)^2-\frac{3}{2}\,\zeta(3,1;-1,1)\\
&\quad +\frac{1}{24}\,\zeta(1;-1)^4\\
\zeta(1,1,1,1;-1,1,-1,1) &= \frac{1}{20}\,\zeta(2)^2+\frac{1}{8}\,\zeta(1;-1)\,\zeta(3)+\frac{1}{24}\,\zeta(1;-1)^4\\
\zeta(1,1,1,1;-1,1,1,-1) &= -\frac{1}{40}\,\zeta(2)^2+\frac{1}{2}\,\zeta(3,1;-1,1)+\frac{1}{24}\,\zeta(1;-1)^4\\
\zeta(1,1,1,1;-1,1,1,1) &= \frac{1}{24}\,\zeta(1;-1)^4
\end{aligned}$$

Cette table, pour 2 racines de l'unité (1 et -1) a été calculée en Maple par M. Bigotte jusqu'à l'ordre 8. Elle est disponible sur le site web : (http://www.lifl.fr/~bigotte).