Discours

Michèle Vergne
29 juin 1998

Monsieur le Président du Sénat,
Monsieur le Président,
Monsieur le Vice-président,
Messieurs les secrétaires perpétuels,
Chères consœurs, chers confrères,
Mesdames et messieurs,

Je vous remercie vivement, chers consœurs et confrères, de m'avoir élue cette année membre de votre compagnie. L'année dernière, j'ai été très honorée d'être élue correspondante et de recevoir un des grands prix de l'Académie.

Il y a cependant pour moi quelque chose de difficile à vivre dans ces distinctions honorifiques. Car ce qui m'apparaît à moi-même le plus évident, c'est le peu que j'ai atteint, l'immensité de ce que je ne connais pas. Mais, je suis profondément fière d'être parmi vous. J'éprouve, dès à présent, un grand plaisir à participer au travail de l'Académie et à m'insérer dans une communauté qui contribue au rayonnement de la science française.

Je voudrais aussi remercier le Centre national de la recherche scientifique, institution qui m'a permis depuis exactement trente ans d'être dans la recherche en Mathématiques. Comprendre quelque chose de nouveau est un intense bonheur. Je voudrais aussi mentionner les longues périodes de vide, où mon jugement sur mes capacités se fait sévère. Cette alternance douloureuse entre satisfaction éphémère et doute total m'a toujours forcée à travailler.

Mais prenons comme sujet ici les moments heureux. Je travaille sur quelques thèmes avec obstination. Quelquefois cette recherche se mue en obsession pénible et creuse, mais quelquefois, comme on le dit familièrement, une idée me passe par la tête. Ce moment est un grand plaisir. Le travail de comprendre, ennuyeux et ardu auparavant, devient facile, enthousiasmant. L'idée m'entraîne. Elle me dicte mon travail et mes occupations, jour après jour, mois après mois, années après années.

Il y a aussi les autres mathématiciens, espace de configuration instable de rivaux et d'amis, qui ont des idées. C'est une constellation qui est une source d'inhibitions et d'excitations. Parfois le progrès de l'un me paralyse. Parfois, je vois clairement que l'idée d'un autre peut mener plus loin que là où il s'est arrêté. Il y a alors pour moi la joie et l'excitation de la collaboration. Les idées partagées deviennent vivantes, réelles. Je remercie en particulier Nicole Berline qui m'a fait profiter ces dernières années de ses bonnes idées sur la cohomologie équivariante, Michel Brion sur les polyèdres, Michel Duflo sur les représentations des groupes, Masaki Kashiwara sur la représentation de Weil.

Michèle Vergne, Membre de l'Académie des sciences élue dans la discipline "Mathématique"

Je vais parler ici presque uniquement de la formule de Poisson-Plancherel. C'est une idée ancienne, mais mon travail actuel sur la quantification géométrique et celui en projet, sur la formule de Verlinde, m'apparaissent en fait comme de nouvelles pirouettes de cette idée. L'interrogation, à laquelle j'ai parfois pu répondre dans des cas précis, est celle du rapport entre discret et continu. On imagine facilement que le nombre de points de coordonnées entières à l'intérieur d'un polyèdre devient proportionnel au volume, lorsque ce volume devient grand. Cependant, il nous fût moins évident, à Michel Brion et à moi-même, d'obtenir une formule exacte pour ce nombre de points.

J'ai commencé à étudier les représentations des groupes de Lie dans les années 1970. Beaucoup de mes intérêts et de mes collaborations ultérieurs se sont amorcées à cette époque. Je remercie particulièrement Monique Levy-Nahas qui m'a soutenue à mes débuts dans ce monde scientifique, où, malgré de nombreux progrès, les femmes sont trop rares.

La théorie des représentations unitaires des groupes de Lie est née de la mécanique quantique. Un article essentiel et toujours actuel dans ce sujet est dû au physicien Valentine Bargmann. Il est consacré à l'étude de toutes les représentations unitaires du groupe de symétrie de l'espace-temps, à deux dimensions d'espace.

Reconstruire une fonction grâce à ses coefficients de Fourier, c'est l'objet de la mesure de Plancherel. La formule de Plancherel généralise donc la notion de série de Fourier. Il s'agit de décrire une fonction périodique par superposition d'ondes.

La formule de Plancherel pour les groupes de Lie semi-simples avait été déterminée par Harish-Chandra. Entre temps était apparue la méthode des orbites du mathématicien russe Kirillov. C'est une idée très séduisante. Les variétés hamiltoniennes, espaces de la mécanique classique, devaient pouvoir, sous certaines conditions, être quantifiées en espaces de Hilbert, les variables positions et moments devenant des opérateurs auto-adjoints qui ne commutent pas. Ceci était une formidable généralisation des représentations des relations d'incertitude d'Heisenberg. Or, toutes les orbites d'un groupe de Lie dans le dual de son algèbre de Lie sont des variétés hamiltoniennes. Mais, comme le prescrit la physique, toutes les orbites ne sont pas "quantifiables" et ne donnent pas toutes lieu à une représentation, car seuls certains niveaux d'énergie peuvent apparaître. Seules les orbites, dont la forme symplectique est la courbure d'un fibré linéaire, devraient produire des représentations par quantification géométrique. Cette différence entre la forme symplectique qui peut varier de manière continue et classes de Chern de fibrés linéaires qui ne varient que sur une échelle discrète m'intriguait. Grâce à la méthode des orbites, l'analyse harmonique sur le groupe aurait du se réduire à l'analyse sur l'algèbre de Lie. La formule d'inversion pour un groupe de Lie se devait d'être aussi simple que la formule d'inversion de Plancherel pour les fonctions sur la droite, une simple superposition d'ondes. Je voulais qu'elle le soit, mais elle ne l'était pas, la contradiction venant de l'existence de niveaux d'énergie interdits. Par ailleurs, dans un travail sur un autre sujet : les fonctions thêta, j'avais beaucoup utilisé la formule de Poisson. C'est une formule merveilleuse que nous connaissons tous : la somme des valeurs d'une

fonction sur tous les entiers est égale à la somme des valeurs de sa transformée de Fourier sur tous les entiers. Pour la formule de Poisson, les sommes sur les ondes non entières s'annihilent par sommation. Tout d'un coup, l'idée d'une généralisation possible de la formule de Poisson m'apparût qui résoudrait ce mystère qui m'avait préoccupée. Cette idée m'enchanta. L'intermédiaire nécessaire n'était pas un réseau, c'était l'espace des éléments de l'algèbre de Lie d'exponentielle égale à l'identité. On pouvait espérer que l'intégrale d'une fonction sur cet ensemble d'orbites dans l'algèbre de Lie soit égale à l'intégrale de sa transformée de Fourier sur les niveaux d'énergie permis, qui seraient les seuls non annulés par superposition. Cet intermédiaire expliquerait ainsi la sélection de niveaux d'énergie. Il en est bien ainsi.

Combien de temps a pris la germination de cette idée? Longtemps : de 1970 à 1980, c'est-à-dire 10 ans. Puis il y eût la période très heureuse de son développement pendant 6 ans, de 1980 à 1986. Dès 1970, j'avais un désir vague d'établir une connexion entre formule universelle de caractères et formule de Plancherel, mais mes connaissances techniques minimes et l'état du sujet à cette époque ne me permettait pas de formuler ce rapport. Je travaillais sur un autre sujet en maintenant un intérêt particulier pour les formules de caractères. En 1980, j'eus cette idée de démontrer un analogue de la formule de Poisson pour les groupes de Lie. J'éprouvais la joie de comprendre enfin l'aspect mystérieux du spectre d'énergie d'un groupe de Lie semi-simple, avec ses sous-ensembles continus et discrets. Séries principales continues, *séries discrètes avaient chacune leur raison d'être, exactement là où elles avaient été trouvées. C'était suffisant pour moi, j'écrivis un article, puis je changeais de sujet, et je travaillais sur la cohomologie équivariante avec Nicole Berline. Mais, Michel Duflo me fit espérer mieux : une transmutation possible de ma formule de Poisson en formule de Plancherel. Pour réussir à cela, nous avons beaucoup travaillé, en réclamant aussi de l'aide à d'autres mathématiciens, et à nos étudiants et étudiantes, que je remercie. Nous avons publié notre dernier article sur ce sujet en 1986.*

On peut donc voir qu'entre mon désir vague dès 1970 d'établir une connexion entre formule universelle de caractères et formule de Plancherel, l'idée, issue de mon engouement passager pour les fonctions thêta, de la formule de Poisson-Plancherel, en 1980, et l'article, en commun avec Michel Duflo, en 1986, qui donnait une démonstration combinatoire de la formule de Plancherel, il s'est écoulé beaucoup de temps : 16 ans.

Cette idée a réapparu récemment dans mon esprit, après une longue absence. C'est évidemment une formule de Poisson-Plancherel qui concentre les multiplicités sur les fibres entières de l'application moment dans la quantification géométrique et qui explique la conjecture de Guillemin-Sternberg.

Serait-ce aussi une formule de Poisson qui expliquerait la formule si surprenante de Verlinde ? Mais ceci reste à démontrer. Me faudra-t-il encore 16 ans ?

Je vous remercie de votre attention.