Higher Categories

La théorie des catégories est très puissante.
<u>Mais</u> X et Y deux objets de $\mathcal{C}$ vérifient les mêmes ppts (ou se comportent pareil) s'il existe un iso : $f : X \to Y$.
Sauf que les iso sont trop stricts.
Deux ex. 1) Top, $f : X \to Y$ fct continues
$\rightsquigarrow$ homéomorphismes. " à homéo près"
$\rightsquigarrow$ Topologie algébrique étudier les espaces à équivalence d'(faible) homotopie près.
$\rightsquigarrow$ catégorie homotopique (inverser formellement les équivalences d'homotopie.).

2) Catégorie des catégories, morphismes sont les foncteurs. Dans ce contexte les iso sont les iso de catégories.
Or, c'est trop strict. On veut comparer les catégories à équivalence près.
On peut toujours localiser par rapport aux équivalences de catégories mais on perd de l'information.

$\to$ Motive la notion de catégorie supérieure
On veut avoir
- 0-morphismes : objets
- 1-morphisme
- 2-morphismes entre 1-morphismes
- ⋮
- n-morphismes : entre (n−1)-morphismes.

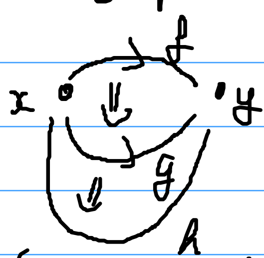
Ex 2-catégorie des catégories : catégorie enrichie des catégories.
Ob : Cat
Mor : Foncteurs
encode les équivalences ⇝ (2-Mor : transfo naturelle
$\forall X, Y \in Ob(Cat)$ $\quad Fun(X,Y) \times Fun(Y,Z) \to Fun(X,Z)$
composition est strictement associative.

Déf une n-catégorie est une catégorie enrichie dans les $(n-1)$-catégories.
Trop strict.

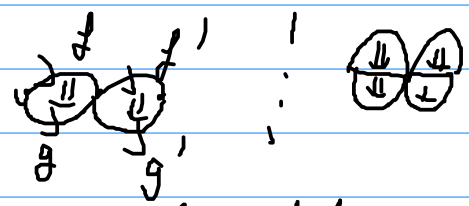
Ex 1 : 2-catégorie 0-mor $*$
1-mor $*$
2-mor : M est un monoïde commutatif.

⇝ 0-mor $*$
1-mor M $\Rightarrow$ M est un monoïde

Si 2-catégorie avec un seul objet
⇝ $\mathcal{C}(*,*)$ est une catégorie monoïdale (strict)
$\Phi : \mathcal{C}(*,*) \times \mathcal{C}(*,*) \to \mathcal{C}(*,*)$ composition
est strictement associative.
→ loi d'échange provient de $\Phi(f \circ g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$.
Plus précisément dans une 2-catégorie on a deux composition.



Comp verticale



comp horizontale

Si 0-mor = $*$ $\quad$ 1-mor = $*$
M a deux lois de composition associative
et unitaires vérifiant la loi d'échange.

$$(a*b)\cdot(c*d) = (a\cdot c)*(b\cdot d)$$

L'argument d'Eckmann-Hilton dit que dans le cas où il y a des unités cela impose que $a\cdot b = a*b = b\cdot a$

$\Rightarrow$ n-catégorie stricte dont tous les k-morphismes $k<n$ sont des identités et un seul objet est un monoïde commutatif.

$\rightsquigarrow$ relâchant le côté strict

$\rightsquigarrow$ on reste dans le monde des E_n-algèbres.

Idée affaiblir les axiomes d'associativité et de cohérence, de rajouter des n-morphismes

$\rightsquigarrow$ rajouter des notions d'invertibilité

(n,k)-catégorie tous les m morphismes $n \geq m > k$ sont inversibles.

<u>Ex</u> $(1,0)$-catégorie : groupoïde.

<u>Ex</u> Soit X un espace topologique.

Ob : pt de X

Mor : $x \xrightarrow{f} y$ $\quad f : [0,1] \to X$

2-mor
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H"] & y \end{tikzcd}$$
H homotopies entre chemins

etc....

<u>Rem</u> On sait composer deux chemins

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \qquad (g\circ f)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $(h\circ g)\circ f \simeq h\circ(g\circ f)$

$\rightarrow$ homotope mais pas égal

Pas une n-catégorie stricte. $\rightsquigarrow$ $\Pi_1(X)$ et la catégorie homotopique associée à cette catégorie.

Affaiblir les axiomes d'associativité à l'aide d'associateurs et de cohérence entre les associateurs etc... $\rightsquigarrow$ n-catégorie faible $n \to \infty$ ω-catégories. (∞-catégories faibles). Pas l'objet du cours.

Affaiblir les axiomes d'associativité et même de composition dans un sens homotopique $\rightsquigarrow$ $(\infty, 1)$-catégories ou $(\infty, 0)$-catégories le modèle des espaces topologiques.

Plus précisément : $(\infty,1)$-catégorie est une catégorie enrichie dans les $(\infty,0)$-catégories. (= espaces).

c'est $\mathcal{C}$: 0-mor objets
1-mor $\mathcal{C}(a,y)$ est un espace topologique.

Rem

$$SSet = \hat{\Delta} \underset{Sing}{\overset{|-|}{\rightleftarrows}} Top$$

structure de catégorie modèle (Kan-Quillen) les objets fibrants sont les complexes de Kan

structure de cat modèle

Modèle pour les ∞-groupoïdes sont → esp top
→ cx de Kan.

$(\infty,1)$ catégories → enrichies dans Top — catégories topologiques
→ enrichies dans les cx de Kan ← SCat catégories simpliciales

But du cours : (J. Bergner)

voir différentes notions de $(\infty, 1)$-catégories.

Chaque notion que l'on va voir sera obtenue comme la classe d'objets fibrants dans une catégorie de modèle.

Comparer ces notions reviendra à comparer ces catégories modèles entre elles et leur catégorie homotopique.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cat} \arrow[r, shift left=1.5, "N"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \hat{\Delta} \arrow[l, shift left=1.5, "\tau_1"] \arrow[r, shift left=1.5, "|-|"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Top} \arrow[l, shift left=1.5, "\mathrm{Sing}"] \end{tikzcd}$$

Le nerf d'une catégorie ...

$N(C)_n = \{ a_0 \xrightarrow{f_1} a_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} a_n \}$

N est un foncteur pleinement fidèle.

<u>Thm du nerf</u> Les propositions suivantes sont équivalentes. (Pour X un ens simplicial)

1) $X \underset{\text{isomorphe}}{\simeq} N(C)$

2) $$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists !"'] & \end{tikzcd} \quad \forall\ 0 < k < n$$

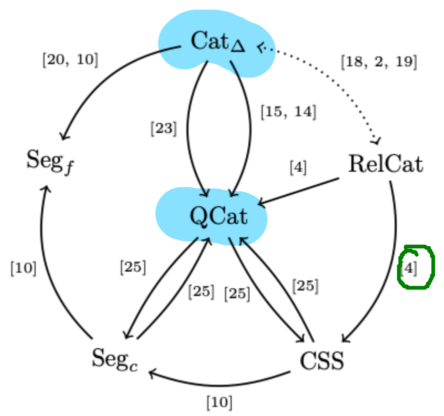
$\rightsquigarrow$ si l'on oublie l'unicité nous fournit la notion de quasi-catégorie

3) $$\begin{tikzcd} I^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists !"'] & \end{tikzcd}$$ I^n : $0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to n$ $\quad \Delta^1 \sqcup_{\Delta^0} \cdots \sqcup_{\Delta^0} \Delta^1$

$\Longleftrightarrow$ $X_n \xrightarrow[\text{bijection}]{} X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$

relâche cette condition "à homotopie près" (en fait X soit un espace simplicial)

$\rightsquigarrow$ notions de
- espaces de Segal (complet)
- catégories de Segal.



QCat	Quasicategories [12, 23, 27]
CSS	Complete Segal Spaces [31]
Cat$_\Delta$	Simplicial Categories [18, 9]
Seg$_c$	Segal Categories (injective) [20, 21, 30, 8, 34]
Seg$_f$	Segal Categories (projecive) [10, 34]
RelCat	Relative Categories [4]

FIGURE 1. Some right Quillen equivalences among models for the homotopy theory of homotopy theories.

→ catégorie simpliciale : enrichie dans les ensembles simpliciaux

→ espaces simpliciaux : $F : \hat{\Delta} \to sSet$ -

→ Relative catégories ⇝ voir plus tard -

Plan du cours :

→ Structure de modèle de Joyal sur $\hat{\Delta}$ qui permet de dire que les objets fibrants sont les quasi-catégories (Dém de Joyal, Dém de Lurie ?)

→ Structure de modèle sur les catégories simpliciales (sans dém) où les catégories enrichies en cx de Kan sont les obj fibrants.

$$\begin{tikzcd} SC \arrow[r, shift left, "N"] & (\hat{\Delta}, \text{Joyal}) \arrow[l, shift left, "\mathfrak{C}[-]"] \end{tikzcd}$$

Nerf cohérent (Cordier) = nerf simplicial (dans SC)

dém du fait que c'est une adjonction de Quillen -

→ Coin, lien dans les quasicat ...
→ Cat modèle ⇝ ∞-catégorie

Ensuite : exposés sur les papiers suivants -

1) Dugger-Spivak (Rigidification of quasi-cat)
idée : transformer une quasi-cat en catégorie simpliciale (enrichie en cx de Kan)
une autre approche de l'adjoint à gauche du nerf cohérent plus manipulable (lisible, combinatoire).

3) Barwick-Kan (relative categories ...)
Catégorie Relative : $(\mathcal{C}, W)$
RelCat : catégorie ob. relative categories
mor $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $(\mathcal{D}, W')$
$f(W) \subset W'$
Démontrent qu'il existe une structure modèle sur RelCat et une équivalence de Quillen avec CSS

2) "Complete Segal Spaces"
Comprendre la structure générale
→ Structure de modèle de Reedy
→ Localisation de Bousfield
⇝ application aux complete Segal space -
[d'après le livre de Bergner].
Exposé 2 est une bonne intro à l'exposé 3 -

4) Ara Higher quasi-catégories vs higher Rezk spaces.

Il existe aussi plein de modèles pour les (∞, n)-catégories

Θ_n-espaces, espaces de Segal complet itérés, Segal n-catégories, n-relative categories, n-quasicatégories ...

<u>Rem</u> Barwick et Schommer-Pries ont démontré que tous les modèles sont équivalents "On the unicity ..."

5) "Optionnel" [Lurie HTT].

∞-cat des ∞-cat.

Idée comment "encapsuler" la notion d'∞-cat (quasi-cat), de ∞-foncteurs etc.. dans une ∞-cat.

Plus précisément

il existe une "catégorie modèle"

tq "la" catégorie ∞ associée soit la ∞-cat de ∞-cat.

(idée une 30aine de pages de HTT).

$\to$ Toën Vezzosi : Quel modèle ??