Chapitre 1 - Quasi-catégories - la structure de modèle de Joyal

I - Notations - Rappels -

1- Catégories de préfaisceaux -

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (petite)

$\hat{\mathcal{C}}$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}^{op} \to Set$

$$y : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$$
$$c \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(-, c) =: \underline{c} \quad \text{ou même } c$$

plongement pleinement fidèle

$\hat{\mathcal{C}}$ est complète et cocomplète

(lim et colim se calculent point par point)

<u>Thm</u> Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ avec $\mathcal{D}$ cocomplète

alors
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "y"'] & \mathcal{D} \\ \hat{\mathcal{C}} \arrow[ur, "\hat{F}"'] & \end{tikzcd} \qquad \hat{F} y \underset{\text{iso naturel}}{\simeq} F$$

car tout élément de $\hat{\mathcal{C}}$ est colimite de représentables. (on dit que les représentables sont denses).

Par ailleurs $\hat{F}$ admet un adjoint à droite

$$\hat{F} : \hat{\mathcal{C}} \rightleftarrows \mathcal{D} : Rep$$
$$Hom_{\mathcal{D}}(F- ; d) \longleftarrow\!\shortmid d$$

2- Localisation -

$(\mathcal{C}, W)$

localisation de $\mathcal{C}$ en W notée $(\mathcal{C}[W^{-1}], \ell)$ est la donnée $\ell : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[W^{-1}]$ vérifiant

$$\forall \mathcal{D} \quad \ell^* : Fun(\mathcal{C}[W^{-1}], \mathcal{D}) \to Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$
$$F \mapsto F \circ \ell$$

est, pleinement fidèle et d'image essentielle
l'ensemble des foncteurs qui envoient W sur les
isos de $\mathcal{D}$.
$\longrightarrow$ si $(\mathcal{C}[W^{-1}], \ell)$ existe alors elle
est unique à équivalence de catégorie près
et donc ℓ est unique à iso près.

$\longrightarrow$ Concrètement $\forall\, F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ avec $F(W) \subset \mathrm{Iso}$
alors $\exists\, G$ tq

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\ell"'] & \mathcal{D} \\ \mathcal{C}[W^{-1}] \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd} \qquad G\ell \simeq F \text{ iso natural}$$

Rappel (équivalences de catégories)
$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$
. F pleinement fidèle $\iff \eta$ (unité) est un iso
. G ——— $\iff \varepsilon$ (counité) est un iso

Si l'on note $W = F^{-1}(\mathrm{Iso}(\mathcal{D}))$ $(F(W) \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{D}))$
G pleinement fidèle $\iff \mathcal{C}[W^{-1}] \to \mathcal{D}$ est
une équivalence de catégorie.

[Gabriel-Zisman]
3. Catégories modèles (de Quillen).
dans le cas on peut calculer $\mathcal{C}[W^{-1}]$ précisément
(souvent noté $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$).

$\mathcal{C}$ munie de trois classes de morphismes $(\mathrm{Cof}, W, \mathrm{Fib})$
complète et cocomplète est de modèle si
1) W a la ppté 2 sur 3
2) $(\mathrm{Cof} \cap W, \mathrm{Fib})$ est un syst de factorisation faible
3) $(\mathrm{Cof}, \mathrm{Fib} \cap W)$

On dit que (A, B) est un système de factorisation faible si
- tout $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ se factorise $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} Y$, $i \in A$, $p \in B$

(i) $A = {}^{\boxslash}B$

(ii) $B = A^{\boxslash}$

Notation
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & T \end{tikzcd}$$

$i \in {}^{\boxslash}\{f\} \iff f \in \{i\}^{\boxslash}$

$\iff i \pitchfork f \iff \exists$ un relèvement dans le diagramme ci-dessus.

<u>Rem</u> (i) et (ii) $\iff \begin{cases} A \pitchfork B \\ {}^{\boxslash}B \subset A \\ A^{\boxslash} \subset B \end{cases}$

Voir Riehl (A concise def of a model category)

- $ho\,\mathcal{C} = \mathcal{C}[W^{-1}]$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}_c \arrow[dr, hook] & \\ \mathcal{C}_{cf} \arrow[ur] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{C} \\ & \mathcal{C}_f \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Vous avez vu la notion d'homotopie droite et homotopie gauche

Si A cof et X fib $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)/_{\simeq} = [A, X]$

$\simeq \; = \; \simeq_\ell \; = \; \simeq_r$ coincident et sont des relations d'équivalence.

$Ho(\mathcal{C}_{cf}) \simeq \pi_0(\mathcal{C}_{cf})$: objets sont les objets fibrants et cofibrants et les morphismes sont $\pi_0(\mathcal{C}_{cf})(A,X) = [A,X]$

De plus le diagramme ci-dessus induit des équivalences des catégories homotopiques — en particulier :

$Ho(\mathcal{C})$: les objets sont les objets de $\mathcal{C}$

morphismes $Ho(\mathcal{C})(X,Y) \simeq Hom(QX, RY)/\sim$

remplacement cofibrant de X — remplacement fibrant de Y

On a de plus le "théorème de Whitehead"

$f : A \rightarrowtail X$, A cof, X fib : $f \in W \iff Ho(f)$ iso.

Conséquence : $f \in W \iff Ho(f)$ iso

$$0 \rightarrowtail QX \xrightarrow[\sim]{u} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow[\sim]{v} RY \twoheadrightarrow *$$

Lemme de Brown :

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre deux catégories modèles

Si F envoie $Cof \cap W$ entre objets cofibrants sur W alors F envoie W entre obj cofibrants sur W.

(même énoncé pour les fibrations et objets fibrants)

Adjonction de Quillen

$F : \mathcal{C} \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathcal{D} : G$

$\rightsquigarrow \quad \mathbb{L}F : \mathrm{Ho}\,\mathcal{C} \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathrm{Ho}\,\mathcal{D} : \mathbb{R}G$

plus précisément : $\mathbb{L}F(X) = F(QX)$ ↗ remplacement cofibrant
et $\mathbb{R}G(Y) = G(RY)$ ↗ remplacement fibrant

On dit que une adjonction de Quillen est une équivalence de Quillen si $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}G)$ induit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ et $\mathrm{Ho}(\mathcal{D})$.

Ex de catégories modèles.

$(\hat{\Delta}$, mono, we, Fib de Kan$)$
we : éq faibles d'homotopie

$$\hat{\Delta} \underset{\mathrm{Sing.}}{\overset{|-|}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Top}$$

$(\mathrm{Top}$, retract de (CW) attachements cellulaires, we, Fib de Serre$)$

L'adjonction ci-dessus est une équivalence de Quillen (voir Homotopie II)

Ex $(\mathrm{Cat}$, mono, eq, isofibration$)$ est une structure modèle pour Cat
[Joyal-Tierney strong stacks and classifying spaces]

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ mono si : $F : ob(\mathcal{C}) \to ob(\mathcal{D})$ mono.

Isofibration :

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une isofibration si

$\forall$ $\varphi : F(c) \to d$ iso, il existe

$\psi : c \to c'$ iso tq $F(\psi) = \varphi$.

4. Ensembles simpliciaux.

Notations Δ : objets $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$

$\varphi : [n] \to [m]$

souvent notée $0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_n \leq m$.

Ex 0012 $[3] \to [2]$

On note Δ^n l'image de $[n]$ par le plongement de Yoneda.

$$Hom_{\hat{\Delta}}(\Delta^n, \Delta^m) = (\Delta^m)_n = Hom_{\Delta}([n], [m])$$

$$\forall X \in \hat{\Delta} \quad Hom_{\hat{\Delta}}(\Delta^n, X) \simeq X_n.$$

On notera souvent une transf nat $\Delta^n \to X$ par "les images" : une décoration du n-simplexe standard.

Ex $\Delta^2 \to X$

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\sigma"] & & z \end{tikzcd}$$

$x, y, z \in X_0$

$f, g, h \in X_1$ et $f = d_2 \sigma$ $g = d_0 \sigma$ $h = d_1 \sigma$.

$d_0 f = y = d_1 g$.

Ens simpliciaux utiles Δ^n

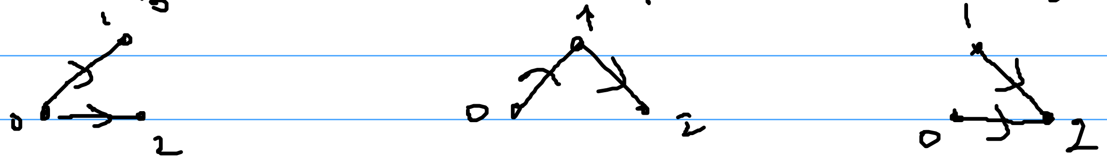
$$\partial \Delta^n = \bigcup_{i=0}^{n} Im\left(\Delta^{n-1} \xrightarrow{\sigma_i} \Delta^n\right) \text{ où } \sigma_i : [n-1] \to [n]$$

est l'application qui oublie i.

$$\Lambda^n_k = \bigcup_{\substack{i=0 \\ i\neq k}} \mathrm{Im}\left(\Delta^{n-1} \xrightarrow[\sigma_i]{} \Delta^n\right)$$. cornets

cornets internes : $1 \leq k \leq n-1$

Ex $\quad \Lambda^2_0 \qquad\qquad \Lambda^2_1 \qquad\qquad \Lambda^2_2$



Rappel $\quad$ Kan Fib $= \{\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n,\ 0\leq k\leq n,\ n\geq 1\}^{\boxslash}$

Cx de Kan : objet fibrant.

Rem :
$$Set \xrightarrow{i} \hat{\Delta}$$
$$X \mapsto cX = X_\bullet$$
$X_n = X \ \forall n$

$s_i, d_j = id$.

ens simplicial constant

ou discret.

admet un adjoint à gauche

$\pi_0(X) = \mathrm{Coeq}\left(X_1 \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} X_0\right)$ (produit de $\Delta \to Set$, $[n] \mapsto *$)

et un adjoint à droite

$i^*(X) = X_0$.

Lorsque X est un complexe de Kan

la relation $\quad x \xrightarrow{f} y \quad$ des X_0 définie par

$x \sim y \iff \exists f \in X_1$

$d_1 f = x,\ d_0 f = y$

est une relation d'équivalence

$\pi_0(X) = X_0 / \sim$.

5- Le nerf d'une catégorie.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Poset} & & P \\ & & \downarrow & & \downarrow I \\ \Delta & \longrightarrow & \mathrm{Cat} & & P \\ [n] & \longmapsto & \{0<1<\dots<n\} = P_n & & \end{array}$$

→ Fournit une adjonction

$$\tau_1 : \hat{\Delta} \underset{I}{\overset{}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cat} : N$$

$$(NC)_n = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(P_n, C)$$
$$= \{ a_0 \xrightarrow{f_1} a_1 \to \dots \xrightarrow{f_n} a_n \}$$

→ NC est 2-coskelettal
$$\mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(X, NC) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(sk_2 X, NC).$$

→ Nerf est un foncteur pleinement fidèle

→ Thm du nerf :

$X \simeq NC \iff$ X a la pté de relèvement à droite unique % $\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$
$0 < k < n$

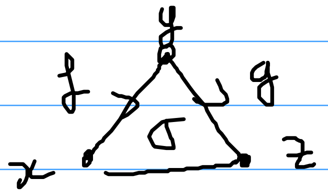
$\iff$ X a la pté de relèvement à droite unique % $I^n \hookrightarrow \Delta^n$.

n-spine

$$0 \to 1 \to \cdot \to \cdots \to n.$$

Cas $n=2$: $I^2 \hookrightarrow \Delta^2$ (notez $\Lambda^2_1 = I^2$)

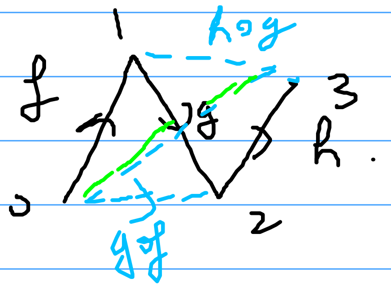
$$\begin{tikzcd} I^2 \arrow[r] \arrow[d] & X \\ \Delta^2 \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$



$d_1\sigma =$ "$g \circ f$"

relèvement unique permet de définir la "composition" de manière unique $g \circ f$.

. $X_0 \xrightarrow{s_0} X_1$ fournit $id_x = s_0 x$.



$$\begin{tikzcd} I^3 \arrow[r] \arrow[d] & X \\ \Delta^3 \arrow[ur, dashed, "\exists !"'] & \end{tikzcd}$$

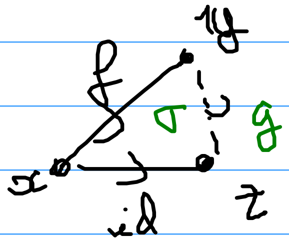
---- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

$(\partial_2 \Delta^2$ $\qquad$ $\partial_1 \Delta^1$

$\boxtimes$

Prop Le nerf d'une catégorie C est un complexe de Kan $\Longleftrightarrow$ C est un groupoïde.

En effet



$\exists g$ tq $g \circ f = id$

$\Lambda^2_0 \hookrightarrow \Delta^2$

$\exists h$ tq $f \circ h = id$

$\Lambda^2_2 \hookrightarrow \Delta^2$

$\Longrightarrow$ $g = h$ donc f inversible.

II – Quasi-catégories.

1) Premières définitions.

<u>Déf</u> On dit que $X \in \hat{\Delta}$ est une quasi-catégorie si X a la pté de relèvement à droite p/r $\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n$ $0 < k < n$. $n \geq 1$.

$n = 1$ $\quad \emptyset \hookrightarrow \Delta^1$.

$n = 2$ $\quad \Lambda^2_1 \hookrightarrow \Delta^2$

$n = 3$ $\quad \Lambda^3_1, \Lambda^3_2 \hookrightarrow \Delta^3$.

<u>Ex</u> . catégories (on va confondre C et NC)

. complexes de Kan.

<u>Rem</u>:

$$\begin{tikzcd} Cat \arrow[r, shift left, "N"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \hat{\Delta} \arrow[l, shift left, "\tau_1"] \end{tikzcd}$$

τ_1 est en général compliqué à calculer.

$\tau_1[n] = P_n = \{0 < \dots < n\}$.

Dans l'idée $\tau_1(X)$: Le graphe a pour objets X_0 et pour morphismes de $x \to y$ les éléments f de X_1 tel que $d_1 f = x$ $d_0 f = y$

La catégorie librement engendrée par ce graphe et quotientée par les relations

$id_x = s_0 x$.

"$g \circ f = d_1 \sigma$."

→ pour une quasi-catégorie $(\tau_1(X))(x, y)$ s'exprime comme le quotient d'1 ensemble par

une relation d'équivalence.
cela s'appellera la catégorie homotopique associée à X.

2. Composition faible et catégorie homotopique d'une quasi-catégorie.

Soit X une quasi-cat

Contrairement aux catégories ($=$ nerf d'une catégorie) la propriété de relèvement p/r $\Lambda^2_1 \hookrightarrow \Delta^2$ n'est plus unique.

En particulier

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\sigma"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "g\circ_\sigma f"'] & {} & z \end{tikzcd}$$

diagramme dans X

Si un autre $\tau \in X_2$ relève le diagramme il faut à un moment comparer $g \circ_\tau f$ et $g \circ_\sigma f$ pour espérer construire une catégorie.

Prop Soit X une quasi-cat f et $g \in X_1$ tq $d_1 f = d_1 g$, $d_0 f = d_0 g$.

les assertions suivantes sont équivalentes.

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "\mathrm{id}_y"] \arrow[d, phantom, "\sigma"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"'] & {} & \bullet \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "\mathrm{id}_y"] \arrow[d, phantom, "\tau"] & \\ \bullet \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & {} & \bullet \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\alpha"] & \\ \bullet \arrow[u, "\mathrm{id}_x"] \arrow[r, "g"'] & \bullet \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\beta"] & \\ \bullet \arrow[u, "\mathrm{id}_x"] \arrow[r, "f"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

$\exists \sigma$ $\qquad \exists \tau$ $\qquad \exists \alpha$ $\qquad \exists \beta$

On dit alors que f est équivalent à g et on note $f \simeq g$. C'est une relation d'équivalence.

Lundi 10h50 !