Lundi 15/03/21 - Cours 3 -

Chapitre 1 (Quasi catégories) -

2- Composition faible et catégorie homotopique -

Cours du 5/04 → 9/04 10h45 - 12h45
14/04 → 16/04 10h45 - 12h45
peut-être une séance supplémentaire le vendredi 16/04 16h → 18h (pour finir les exposés -
Date de l'examen : 12/05 de 9h30 à 12h30 -

Rappel : $\tau_1 : \hat{\Delta} \underset{N}{\overset{\perp}{\rightleftarrows}} Cat : N$

- Si $X \in \hat{\Delta}$ $\tau_1(X)$ s'appelle la catégorie fondamentale de X
- On a : $\tau_1 NC \simeq C$ iso de catégorie

$$\eta : X \longrightarrow N\tau_1 X = \tau_1 X$$

On a vu qu'une quasi catégorie est un ens simplicial ayant la pté de relèvement à droite par rapport à tous les cornets internes
$\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n$ $0 < k < n$.

Ex : → les catégories NC a cette pté et le relèvement est unique -

→ les complexes de Kan a cette pté puisque admet la pté % $\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n$ $0 \leq k \leq n$.

ex $Sing(X)$ -
espace topologique

En effet (ex) :

$$\begin{tikzcd} \Lambda_1^2 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ \Delta^2 \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

si $C = \mathrm{Sing}(X)$

$C_n = \{\sigma : \Delta^n \to X\}$

$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$

$a, b, c \in C_0$ | a, b pt de X

$f, g \in C_1$ | $f, g : I \to X$

Cas sing(X)

$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$, $a \xrightarrow{g \circ f} c$, σ

$\sigma : \Delta^2 \to X$

On sait composer des chemins

$$(f \circ g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 2$, σ $\rightsquigarrow$ $\forall \tau$: $\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$, τ, $d_1\tau$

$d_1\tau \sim d_1\sigma$

homotopique (chemin)

Terminologie

- $\sigma : \partial\Delta^2 \to X$

  s'appelle un triangle de X

on dit qu'il est commutatif si $\exists\, \tilde{\sigma}^n$ tq $\partial\tilde{\sigma} = \sigma$

- On note $X_1(a, b) = \{f : \Delta^1 \to X,\ d_0 f = b,\ d_1 f = a\}$

deux éléments f, g de X_1 sont parallèles si $\exists\, a, b$ tq $f, g \in X_1(a, b)$

Déf Soient $f, g \in X_1(a,b)$

On note $f \underset{\ell}{\Rightarrow} g$ si :
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "id_b"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

On note $f \underset{r}{\Rightarrow} g$
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "f"] & \\ \bullet \arrow[ur, "id_a"] \arrow[rr, "g"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

Prop Si X est une quasi-catégorie alors

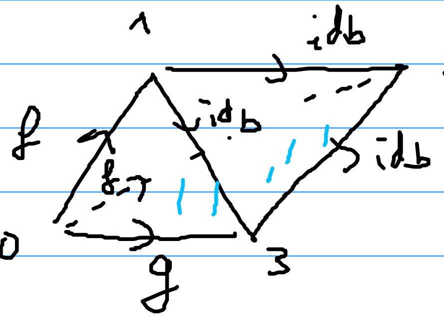
$$f \Rightarrow_\ell g \iff g \Rightarrow_\ell f \iff f \Rightarrow_r g \iff f \Rightarrow_\ell g$$

De plus $\Rightarrow_\ell$, $\Rightarrow_r$ sont des relations d'équivalence.

Dém :

Si $f \Rightarrow_\ell g$.

$\exists \tau'$
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "id_b"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$



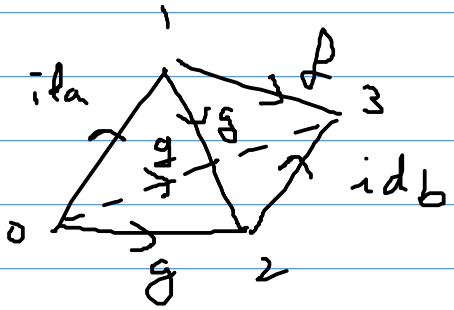
$\partial_2 \tau$ est commutatif.
$\partial_0 \tau$ est commutatif.
$\partial_3 \tau$ est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^3_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \Delta^3 \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists \tau"] & * \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \partial_1 \tau : \Delta^2 \to X$

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "id_b"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"'] & & \bullet \end{tikzcd} \Rightarrow g \Rightarrow_\ell f.$$

Si $g \Rightarrow_\ell f$

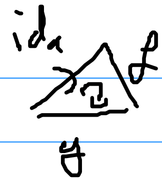


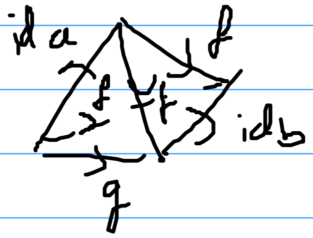
$\partial_0 \sigma$ ✓
$\partial_3 \sigma$ ✓
$\partial_1 \sigma$ ✓

X quasi-cat σ existe

et $\partial_2 \sigma : \Delta^2 \to X$

$f \Rightarrow_r g$.



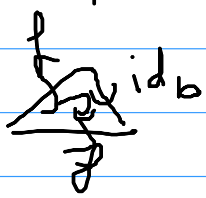


donc si $g \Rightarrow_r f$

alors $g \Rightarrow_\ell f$.

Ici on a bien que toutes ces relations sont les mêmes et qu'elles sont symétriques.

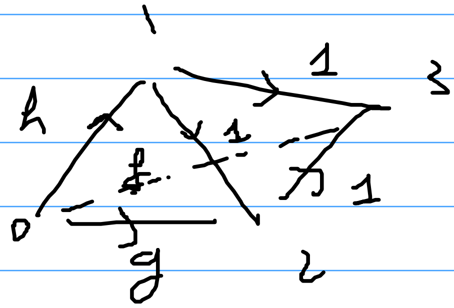
$f \Rightarrow_\ell f$ ça



est commutatif

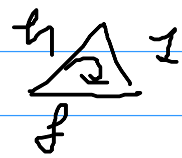
$S f : \Delta^2 \to X$

Transitivité mq si $f \simeq g$ et $g \simeq h$ alors $f \simeq h$.



$\exists\, \tau : \Delta^3 \to X$ car on a construit $\tau' : \Lambda^3_2 \to X$

donc $\partial_2 \tau$ donne

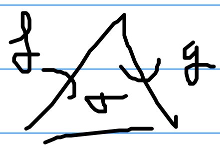


donc $h \simeq f$.

$\boxtimes$

On dira que f est équivalent à g si $f \simeq g$ ($f \Rightarrow_\ell g$ par exemple).

<u>Rappel</u> si

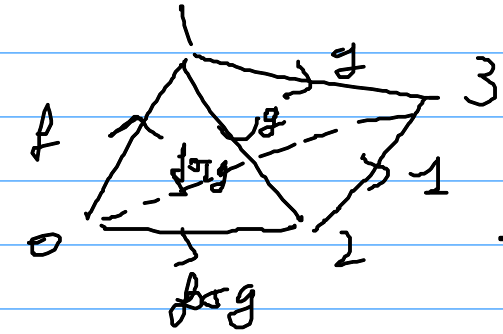


on note $d_1 \sigma = g \circ_\sigma f$.

Prop On a pour tout σ, τ comme ci-dessus
$$g \circ_\sigma f \simeq g \circ_\tau f.$$

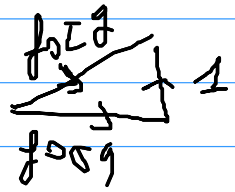
Pd $[g \circ_\sigma f] = [g \circ_\tau f]$ dans $X_1(a,c)/_\simeq$
On notera ceci $[g \circ f]$.

Dém



$\partial_3 u =$ "$g \circ_\sigma f$"
$\partial_2 u =$ "$g \circ_\tau f$"
$\partial_0 u = s_1 g$.
$\longrightarrow$ u existe

et $\partial_1 u$



$\boxtimes$.

Prop : Si $f \simeq g$ alors $[f \circ h] = [g \circ h]$
$[h \circ f] = [h \circ g]$.

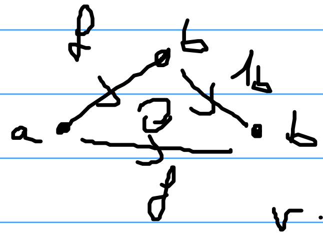
dém exo.

Pd : $\forall a,b,c$ $X_1(b,c)/_\simeq \times X_1(a,b)/_\simeq \to X_1(a,c)/_\simeq$
$$[f], [g] \mapsto [g \circ f].$$

Hyp X est une quasi-cat.

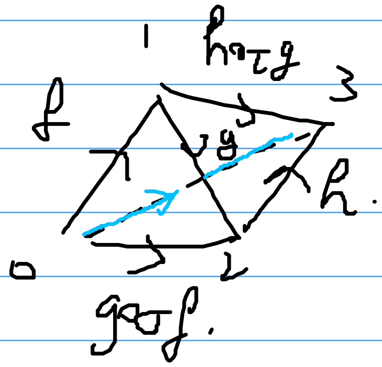
Prop On note hX la catégorie
dont les objets sont X_0
les morphismes sur $X_1(a,b)/_\simeq$
$\to$ c'est bien une catégorie
et hX est isomorphe à $\tau_1 X$.

Dém • $\forall\, a,b \in X_0$
$\forall\, f \in X_1(a,b)$
$[f \circ 1_a] = [f]$
$[1_b \circ f] = [f]$



v.

• $\forall\, f,g,h \qquad [h \circ (g \circ f)] = [(h\circ g) \circ f]$.



:

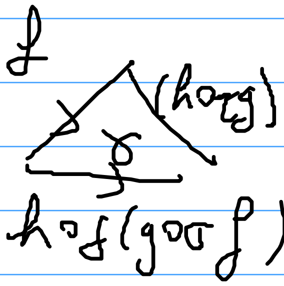
$$\begin{tikzcd} I^3 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed] & X \\ \Delta^3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$h\circ_f (g\circ_\sigma f)$'

étendu

$$\begin{tikzcd} I^3 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & X \\ \Lambda^3_2 \arrow[ur, dashed] \arrow[d] & \\ \Delta^3 \arrow[uur, "\tilde\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

$\partial_2 \tilde\sigma$



$\Rightarrow (h\circ_\tau g)\circ_\delta f$
$= h\circ_f (g\circ_\sigma f)$

$\Rightarrow [(h\circ g)\circ f] = [h\circ (g\circ f)]$ —

Rappel notation

$d_1\sigma =: f \circ_\sigma g$

On verra plus tard que l'on peut une quasi-catégorie à la propriété de relèvement à droite p/r $I^n \hookrightarrow \Delta^n$.

• L'isomorphisme $\tau_1 X \simeq hX$

Il suffit de démontrer que :

$$h : \underbrace{QCat}_{\substack{\text{sous catégorie pleine} \\ \text{de } \hat{\Delta} \text{ dont les objets} \\ \text{sont les quasi cat}}} \underset{\perp}{\rightleftarrows} Cat : N$$

Il est clair que $hNC = C$.

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "id"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$ ← 1 seul diagramme commutatif.

il suffit donc de démontrer que $\forall X$ quasicatégorie - $\forall$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & NC \\ NhX \arrow[ur, dashed, "\exists! v"'] & \end{tikzcd}$$

$v([f]) = u(f)$.

$$a \xrightarrow{f} b \qquad \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "id_b"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"'] & & \bullet \end{tikzcd} \text{ de } X$$

bien défini car $f \simeq g \Rightarrow uf = ug$.

$$\xrightarrow{u} \quad \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "uid_b"] & \\ \bullet \arrow[ur, "uf"] \arrow[rr, "ug"'] & & \bullet \end{tikzcd} \quad ug = uf.$$

$$\mathrm{Hom}_{QCat}(X, NC) \xleftarrow[\text{bijection}]{} \mathrm{Hom}_{Cat}(hX, C)$$

Et h est adjoint à gauche au nerf.

$\Rightarrow$ $\forall$ X quasi-catégorie il y a une éq de catégorie : hX et $\tau_1 X$

Par ailleurs cette éq est l'identité sur les objets. Donc un iso de catégorie. $\boxtimes$

Interlude : $\hat{\Delta}$ est une catégorie cartésienne fermée :

$\forall A, B \in \hat{\Delta}$ on note $(B^A)_n := \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(A \times \Delta^n, B)$

Parfois noté $\mathrm{Map}(A, B)$

Quasi-catégories $\mathrm{Fun}(A, B)$

Rem Si A et B sont des catégories $A = NC$, $B = ND$.

$(B^A)_0 = \mathrm{Fun}(C, D)$

$(B^A)_1 =$ transf naturelle entre deux foncteurs

On a : $(ND)^{NC} = N(\mathrm{Fun}(C, D))$.

Soit $I = \{0 < 1\}$. (noté aussi Δ^1 si vu dans $\hat{\Delta}$).

$\{0, 1\} \to I$.

induit

$$\begin{tikzcd} X(a,b) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X^I \arrow[d] \\ * \arrow[r, "\{a,b\}"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

$X(a, b)$ est un ensemble simplicial.

points de $X(a,b) = \left\{ f : \Delta^1 \to X \text{ tq } \begin{array}{l} d_0 f = b \\ d_1 f = a \end{array} \right\}$

$= X_1(a,b)$ [voir notation précédente]

On dit que deux points a, b de l'ens simplicial X sont homotopés, connectés s'il existe $a \xrightarrow{f} b$ on note $a \to b$.

Traduction de cela dans $X(a,b)$.

$f, g \in X(a,b)$ que veut dire $f \to g$.

$\exists\, H \in (X(a,b))_1$ tq $d_1 H = f$, $d_0 H = g$.

$$\begin{tikzcd} X(a,b)_1 \arrow[r] \arrow[d] & (X^I)_1 = \mathrm{Hom}_{\Delta}(\Delta^1 \times \Delta^1, X) \arrow[d] \arrow[d, "\partial_0 \sqcup \partial_1"'] \\ f * g \arrow[r, "(a,b)"'] & X_1 \times X_1 \end{tikzcd}$$

$= \mathrm{Hom}_{\Delta}(\Delta^1 \times \Delta^0, X)$

$= \mathrm{Hom}_{\Delta}(\Delta^1, X)\ \{0\} \cup \{1\}$

$\times\ \mathrm{Hom}_{\Delta}(\Delta^1, X)$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] & b \\ a \arrow[u, "1_a"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "h"] & b \arrow[u, "1_b"'] \end{tikzcd}$$

Prop $f \to g \iff f \simeq g$

Cela dit que $(hX)(a,b) = X(a,b)/\to$

$= \pi_0 X(a,b)$

Déf Soit X une quasi-catégorie. On dit que $f \in X_1$ est un isomorphisme (équivalence) si $hf = [f]$ est un iso dans hX.

en pratique : f iso s'il existe $g : b \to a$ tq $a \xrightarrow{f} b$. $gf \sim 1_a$ et $fg \sim 1_b$.

Remarque $\alpha \in (hX)(a,b)$
$\Leftrightarrow$ $\exists\, f : a \to b$, $f \in X_1$
tq $[f] = \alpha$.

Déf $a, b \in X_0$, X quasicat on dit que a et b sont isomorphes s'ils sont isomorphes dans hX.

Rem (plus tard)

$\rightarrow$ $\forall K$ ensemble simplicial, $\forall X$ quasicat

X^K est une quasicatégorie.
permet de dire que la catégorie QCat est cartésienne close.

$\rightarrow$ On verra aussi que si X est une quasicat

$$X^{\Delta^2} \to X^{\Lambda^2_1}$$

$\supset$ application simpliciale entre deux quasicat est une **fibration triviale** —

soient $f, g \in X_1$ $\qquad$ $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Comp}(f,g) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X^{\Delta^2} \arrow[d] \\
\ast \arrow[r, "\{f,g\}"'] & X^{\Lambda^2_1}
\end{tikzcd}$$

simplicial. fib triviale.

$\mathrm{Comp}(f,g)_n$:

$\sigma : \Delta^2 \times \Delta^n \to X$

$\sigma|_{\Lambda^2_1 \times \Delta^n} = $ "$f\ g$".

$\mathrm{Comp}(f,g)_0$: ens de triangle commutatifs de la forme

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dr, "g"] & \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & \bullet
\end{tikzcd}$$

l'ens de toutes les composition possible de g et f —

Cd $\mathrm{Comp}(f,g)$ est un complexe de Kan contractile —

Si $A, B \in \hat{\Delta}$ $\qquad (B^A)_n = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(A \times \Delta^n, B)$

$$\begin{tikzcd}
(B^A)_n = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(A \times \Delta^n, B) \arrow[d, "(id \times \varphi)^*"] & f \arrow[d, mapsto] \\
(B^A)_m = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(A \times \Delta^m, B) & f \circ (id \times \varphi).
\end{tikzcd}$$

$\varphi : [m] \to [n]$

$\varphi : \Delta^m \to \Delta^n$

Si A, B, C sont des ens simpl

$$\begin{tikzcd}
A \times_B C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & C \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

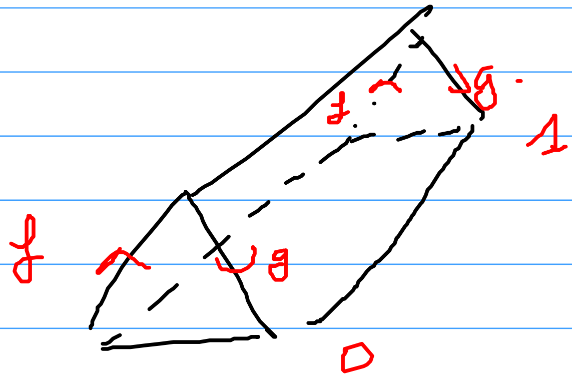
$d_i : (A \times_B C)_n \to (A \times_B C)_{n-1}$

$(a, c) \mapsto (d_i a, d_i c)$

$a \in A_n,\ c \in C_n$

$f(a) = g(c)$

un élément $\sigma \in \mathrm{Cyl}(f,g)_1$ $\quad \sigma : \Delta^2 \times \Delta^1 \to X$



$d_0 \downarrow\downarrow d_1$

$\mathrm{Cyl}(f,g)_0 \; : \; \Delta^2 \to X$

3 - Applications anodynes -

<u>Source</u> : • Structure modèle standard, $\hat{\Delta}$
Goerss-Jardine

• Joyal : "Vol 2 The Theory of Qcat + applications".
→ Rune Haugseng. (Lurie).
→ Cours d'Idrissi pour les structures modèles.
(Quillen, Hovey, Hirschhorn).

On se place dans $\hat{\Delta}$.
S une classe de monomorphismes est dite saturée si :
→ contient les iso
→ stable par retract, "somme", cobase change, et composition transfinie.

<u>Ex</u> $\forall$ T classe de morphismes $\boxslash(T)$ est saturée.

"Somme" : $\forall i \; S_i \xrightarrow{\varphi_i} T_i \quad \varphi_i \in S$

$$\coprod_i : \coprod S_i \xrightarrow[T_{somme}]{\coprod \varphi_i} \coprod T_i \Rightarrow \coprod \varphi_i \in S.$$

- Si S est un ensemble de morphismes on note $\overline{S}$ la plus petite classe de mor saturée contenant S.

<u>Thm</u> (argument des petits objets de Quillen).
$(\overline{S}, (S)^\square)$ est un système de factorisation faible de $\hat{\Delta}$

$\Rightarrow$ 1) $\forall f : X \to Y \quad \exists\, s \in \overline{S},\ t \in (S)^\square$ tq $f = ts$.

$\Rightarrow$ 2) $\overline{S} = {}^\square(S^\square)$

3) $(S)^\square = (\overline{S})^\square$.

Def $\mathcal{B}_{mono} = \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}_{n \geq 0}$ $\qquad \overline{\mathcal{B}_{mono}} = \text{mono}$ $\to$ fib triviale $\text{mono}^\square$

$\mathcal{B} = \{\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n\}_{\substack{n \geq 1 \\ 0 \leq k \leq n}}$ $\qquad \overline{\mathcal{B}} = \mathcal{A}$ $\to$ fib de Kan

$\mathcal{B}_{left} = \{\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n\}_{\substack{n \geq 1 \\ 0 \leq k < n}}$ $\qquad \overline{\mathcal{B}_{left}} = \mathcal{A}_{left}$ $\to$ fib gauche

$\mathcal{B}_{right} = \{\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n\}_{\substack{n \geq 1 \\ 0 < k \leq n}}$ $\qquad \overline{\mathcal{B}_{right}} = \mathcal{A}_{right}$ $\to$ fib droite

$\mathcal{B}_{in} = \{\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n\}_{\substack{n \geq 2 \\ 0 < k < n}}$ $\qquad \overline{\mathcal{B}_{in}} = \mathcal{A}_{in}$ $\to$ inner fib (mid fib)

(inner anodyne or $\underbrace{\text{mid anodyne}}_{\text{Joyal}}$).

$$\begin{tikzcd}
 & \text{inner fib} & \\
 & \text{pseudo-fib (Joyal)} \arrow[u] \arrow[r] & \text{plus tard} \\
\text{left fib} \arrow[ur] & & \text{right fib} \arrow[ul] \\
 & \text{Kan fib} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ex Fondamental : Si X est une quasi-catégorie et C une catégorie toute application simpliciale $X \longrightarrow NC$ est une fib interne.

Dém. $0<k<n$.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_k \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\Delta^n \arrow[r, "b"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & C
\end{tikzcd}$$

h existe tq $ha = i$ (X est une quasi-cat)

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_k \arrow[r, "fa"] \arrow[d, "i"'] & C \\
\Delta^n \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

$\exists !$ relèvement $\alpha = b$

tq $\alpha i = fa$ Mais $fhi = fa$

$\Rightarrow fh = b$. ⊠

Rappel (homotopie 2) "pushout-product"

$i : X \to Y$ $\quad j : A \to B$ $\quad f : U \to V$

$i \square j$. $\quad X\times B \underset{X\times A}{\cup} Y \times A \xrightarrow[i\times 1_B \cup 1_Y \times j]{} Y \times B$.

$f^{\square j}$: $\quad X^V \xrightarrow[(j^*, f^*)]{} Y^V \underset{Y^U}{\times} X^U \qquad (X^V)_n = \mathrm{Hom}(V\times\Delta^n, X)$.

Important du fait que $\mathrm{Hom}_\Delta^{\neg}(X\times Y, Z)$
$\simeq \mathrm{Hom}_\Delta^{\neg}(X, Z^Y)$

On a $i \,\square\, j \pitchfork f \iff i \pitchfork f^{\square j}$
$\iff j \pitchfork f^{\square i}$

But est de démontrer le théorème suivant.

Thm. i mid anodyne et j mono
$\Rightarrow i \,\square\, j$ mid anodyne
(anodyne, left anodyne, right anodyne)

Lemme si S, T sont des ensembles de mono alors $\overline{S} \,\square\, \overline{T} \subseteq \overline{S \,\square\, T}$

Dém Fixons $s \in S$.
$\forall t \in T$, $\forall f \in (S \,\square\, T)^{\boxslash}$
$s \,\square\, t \pitchfork f \Rightarrow s \pitchfork f^{\square t}$
$\Rightarrow s \in {}^{\boxslash}(f^{\square t})$
$\Rightarrow \overline{S} \subset {}^{\boxslash}(f^{\square t})$
$\forall s \in \overline{S}$ $s \,\square\, t \pitchfork f$.
$\Rightarrow t \pitchfork f^{\square s}$
$\Rightarrow t \pitchfork {}^{\boxslash}(f^{\square s})$
$\Rightarrow \overline{T} \subset {}^{\boxslash}(f^{\square s})$
$\forall s \in \overline{S}, \forall t \in \overline{T}$ $\overline{s \,\square\, t} \pitchfork f$.
$\Rightarrow \overline{S} \,\square\, \overline{T} \in \overline{S \,\square\, T}$. $\boxtimes$

Thm $\mathcal{A}_{mid} = \overline{\{ \underbrace{(\Lambda^2_1 \hookrightarrow \Delta^2) \,\square\, (\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n)}_{\mathcal{A}_1} \}_{n \geq 0}}$.
$\qquad\parallel$
$\overline{\{ \Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n \}_{0<k<n}}$

Dém en deux étapes

1) $\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n \in \overline{A_1}$

2) $\Lambda^2_1 \hookrightarrow \Delta^2 \,\square\, \partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ est mid anodyne.

Remarque si on a montré 2

alors on a $\forall\, j$ mono $(\Lambda^2_1 \hookrightarrow \Delta^2)\,\square\, \underbrace{j}_{\in\,\overline{\{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}}}$ est mid anodyne.

Montrons 1) en supposant que 2) est démontré.

On démontre que

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_k \arrow[r, "s"] \arrow[d, hook] & \Lambda^2_1 \times \Delta^n \cup \Delta^2 \times \Lambda^n_k \arrow[r, "r"] \arrow[d, hook, "{(\Lambda^2_1 \hookrightarrow \Delta^2)\,\square\,(\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n)}"', "\text{mid anodyne}"] & \Lambda^n_k \arrow[d, hook] \\
\Delta^n \arrow[r, hook, "s"'] & \Delta^2 \times \Delta^n \arrow[r, "r"'] & \Delta^n
\end{tikzcd}$$

$rs = \mathrm{id} \Longrightarrow \Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n$ est mid anodyne.

$$\Delta^n \xhookrightarrow{s} \begin{array}{ccccc} \boxed{00\ \cdots} & 0k & \cdots & & 0n \\ 10 & \cdots & \boxed{1k} & \cdots & 1n \\ 20 & \cdots & 2k & \boxed{\cdots\ 2n} & \end{array} \xrightarrow{r} \begin{array}{ccccc} \boxed{0\,1\,\cdots} & k & k & \cdots & k \\ k & \cdots & \boxed{k} & \cdots & k \\ k & \cdots & k & \boxed{k{+}1 \cdots n} & \end{array}$$

$\Lambda^n_k = \bigcup_{i \neq k} \partial_i \Delta^n$ il suffit de mq $s(\partial_i \Delta^n) \subset \Lambda^2_1 \times \Delta^n \cup \Delta^2 \times \Lambda^n_k$.

en fait $s(\partial_i\Delta^n) \subset \Delta^2 \times \partial_i \Delta^n$.

On vérifie que le diagramme ci-dessus est commutatif.

Reste à démontrer que

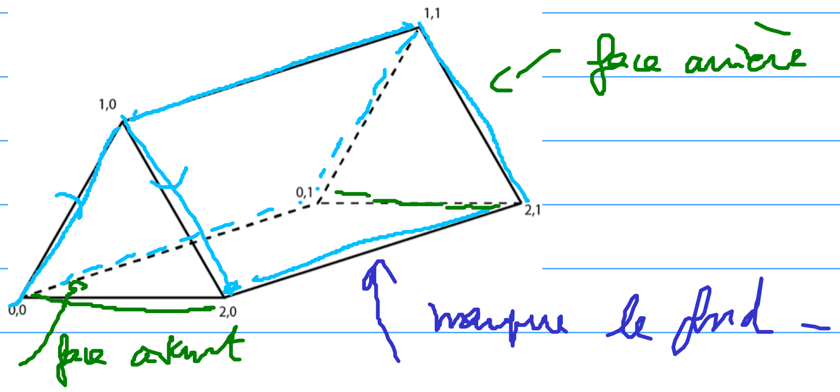
$$\Lambda^2_1 \times \Delta^n \cup \Delta^2 \times \partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^2 \times \Delta^n$$ est mid anodyne.

idée est de construire $\Delta^2 \times \Delta^n$ à partir de $\Lambda_1^2 \times \Delta^n \cup \Delta^2 \times \partial\Delta^n$ en attachant

$X(0) \to$ successivement des cellules Δ^p le long de $\Lambda_k^p \hookrightarrow \Delta^p$ $0 < k < p$.

$\to$ support $\quad$ p-cellule.

Ex $n = 1$



Dans le cas général on va attacher des cellules de dim $n+1$ pour commencer.

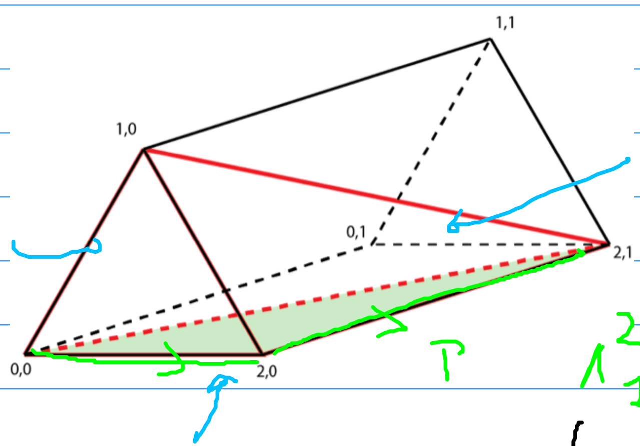
$X(j+1) = X(j) \cup \sigma_{0j} \cup \dots \cup \sigma_{jj}$ $\quad \sigma_{ij}: 0 \leq i \leq j \leq n-1$

(voir suite)

$n = 1$ $\quad X(0) \cup \sigma_{00}$.

$\to$ On s'arrête à $X(n) =: Y(0)$

On a tous les faces de dim $n+1$ qui nous intéressent



$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^2 & \hookrightarrow & X(0) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Delta^2 & \longrightarrow & X(0) \cup \sigma_{00} = X(1) \\ & & = Y(0) \end{array}$$

en bleu on a le support $\quad \Lambda_2^3$

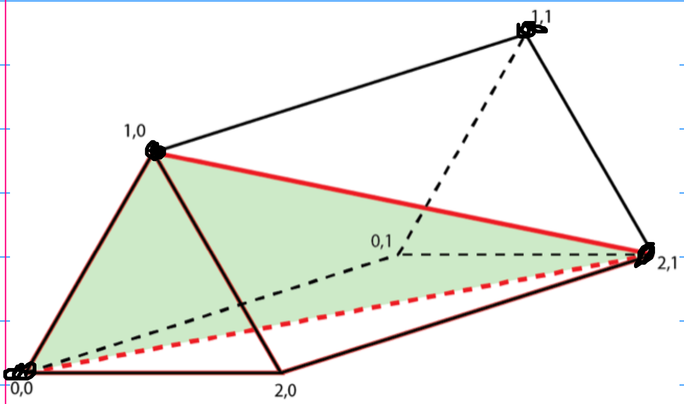
$$\begin{tikzcd} \Lambda^3_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y(0) \arrow[d] \\ \Delta^3 \arrow[r] & Y(0) \cup \tau_{00} \end{tikzcd}$$

Cas général
on va rajouter des cellules de dim $n+2$
τ_{ij} $0 \leq i \leq j \leq n$

$$Y(j+1) = Y(j) \cup \tau_{0j} \cdots \cup \tau_{jj}$$

$\longrightarrow$ On a $Y(n+1) = \Delta^2 \times \Delta^n$.

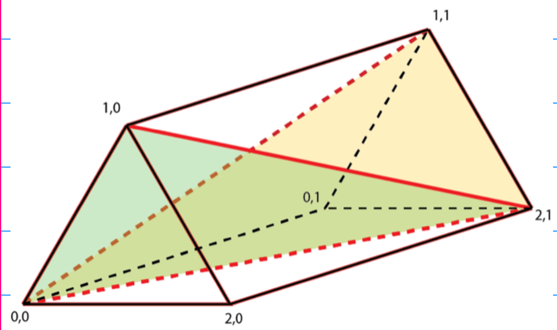
Le tétraèdre rouge $Y(1) = Y(0) \cup \tau_{00}$.

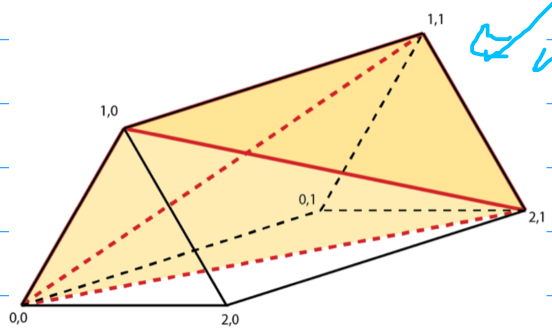


On va construire le tétraèdre
00 10 11 21
faces
10 11 21 $\longrightarrow$ bord droit de la tente
00 11 21 on ne l'a pas
00 10 21 $\longrightarrow$ on l'a vu
00 10 11 $\longrightarrow$ bord gauche de la tente.

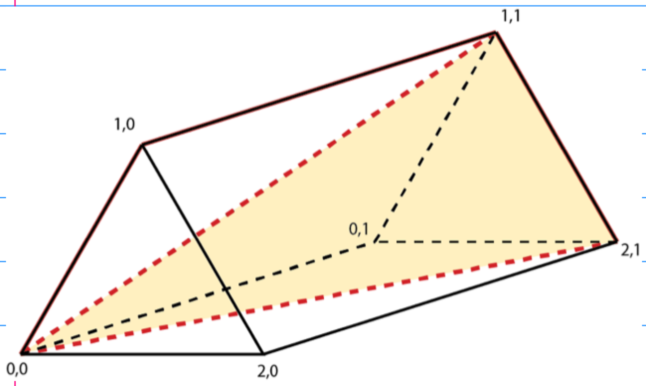
Support
Λ^3_1

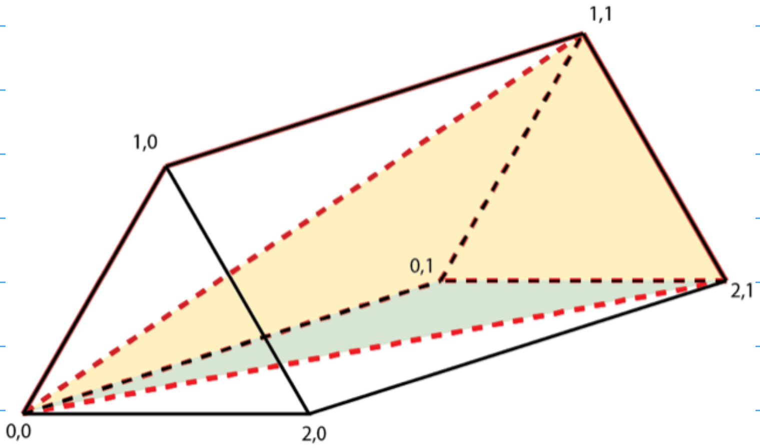
$\rightsquigarrow$ on peut rajouter un tétraèdre





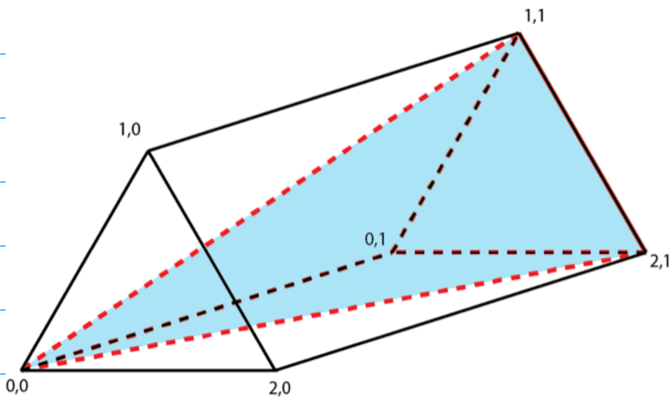
↳ vue ici



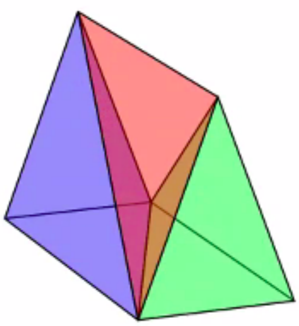


dernier tétraèdre

00 01 11 21.



dernier tétraèdre.



Corollaire (deja du thm énoncé) si

i est mid anodyne et j mono alors $i \square j$ est mid anodyne.

Dém $i \square j \in \overline{\{\Lambda_j^n \hookrightarrow \Delta^n\}} \square \overline{\{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}}$

$\subseteq \overline{\{\underbrace{\Lambda_j^n}_{} \hookrightarrow \Delta^n\} \square \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}}$

$\subseteq \overline{\{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \{\partial\Delta^m \hookrightarrow \Delta^m\} \square \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}}$

$\subseteq \overline{\{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \underbrace{\{\partial\Delta^m \hookrightarrow \Delta^m\} \square \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}}_{\text{mono}}}$

$\subseteq \overline{\{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \{\text{mono}\}} \subseteq A_{mid}$ ⊠

mid-anodyne

Corollaire. Si i est un mono

- f est une fibration interne (= mid fib = anodyne fib) alors $f^{\square i}$ est une mid fibration.
- Si de plus i est mid anodyne alors $f^{\square i}$ est une fibration triviale.

Rem on peut remplacer mid par rien ou left ou right.

Dém • i mono f fib interne j mid anodyne

il faut mq $j \pitchfork f^{\square i} \iff \underset{\text{mid anodyne}}{i \square j} \pitchfork f$ ✓.

• prouvons j mono on suppose i mid anodyne et f mid fibration il faut mq $j \pitchfork f^{\square i}$

$\Longleftrightarrow$ $\underbrace{i \square j}_{\text{mid anodyne}} \pitchfork f$ ← mid fib ✓ $\boxtimes$

Corollaire Si X est une quasi-cat et K est un ensemble simplicial alors X^K est une quasi-cat.

(Rem si X cx de Kan X^K complexe de Kan)

Dém $i : \emptyset \hookrightarrow K$ est un mono.

$f : X \to *$ est mid-fib.

Donc $f^{\square i}$ est une mid-fib.

Or $f^{\square i}$ $X^K \to *$. $\boxtimes$

Corollaire X est une quasi-cat

$\Longleftrightarrow$ $X^{\Delta^2} \to X^{\Lambda^2_1}$ est une fibration triviale

$\Longleftrightarrow$ $X^{\Delta^n} \to X^{I^n}$ est une fibration triviale

en particulier, l'espace des compositions $\mathrm{Com}(f,g)$ d'une quasi-cat X est contractile.

Dém Si l'on note $f : X \to *$

$i : \Lambda^2_1 \hookrightarrow \Delta^2$ $\quad j_n : I^n \hookrightarrow \Delta^n$

$X^{\Delta^2} \to X^{\Lambda^2_1}$ est précisément $f^{\square i}$

et $X^{\Delta^n} \to X^{I^n}$ $\quad f^{\square j_n}$.

mid anodyne.

Soit j un mono

$j \pitchfork f^{\square i} \iff i \square j \pitchfork f$

$f^{\square i}$ fib triviale $\iff$ f est une mid-fib

$f^{\square i}$ fib triviale $\Leftarrow$ X quasi-cat

Il faut démontrer que $t^n \hookrightarrow \Delta^n$ est mid-anodyne. — (J)

(*) On a mq $\quad A_{mid} = \{\Lambda^2_1 \hookrightarrow \Delta^2 \,\square\, \partial\Delta^m \hookrightarrow \Delta^m\}$ $= \{\Lambda^m_k \hookrightarrow \Delta^m\}_{0<k<m}$.

On vient de mq

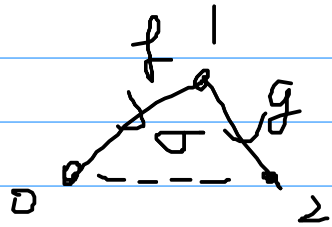
(1) $\iff$ (2) $\quad \Leftarrow$ (3)

le cas $n=2$ $\quad t^2 = \Lambda^2_1$.

il suffit de démontrer (1) $\Rightarrow$ (3).

ie on suppose que f est une mid-fib alors par le corollaire de (J), $f^{\square j^n}$ est une fib triviale

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cap}(f,g) \arrow[r] \arrow[d, "\text{fib triviale}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X^{\Delta^2} \arrow[d, "\Leftarrow \text{fib triviale}"] \\
* \arrow[r, "\{f,g\}"'] & X^{\Lambda^2_1}
\end{tikzcd}$$



$\mathrm{Cap}(f,g)_0 = \{\sigma \in X_2 \mid \text{tq } d_2\sigma = f \ d_0\sigma = g\}$

Donc $\mathrm{Cap}(f,g)$ est un complexe de Kan [illegible]

$\Rightarrow$ il est donc contractile* ☒

X quasi cat $\Rightarrow$ X^K quasi-cat vrai permet de dire que QCat est cartésienne fermée. $\boxtimes$

4- Equivalences.

But ultime : construire une structure modèle sur $\hat{\Delta}$ tq les quasi-cat sont les fibrants.

On a introduit les quasi-cat comme un affaiblissement de la notion de catégorie.

X_0 0-mor
X_1 1-mor
X_2 2-mor
$\vdots$

} en évoquant la notion de n-catégorie stricte.

Revenons à la notion de catégorie.
Les isomorphismes des Cat est trop stricte.
mais on veut le remplacer par la notion d'équivalence.

2-Cat : 0-mor Catégories
1-mor Foncteurs } des Cat
2-mor Transformation Nat

Cat(Cat) — A, B sont deux catégories
Fun(A, B) forment une catégorie.

Une équivalence de catégories $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée de $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et de deux iso naturels $\varphi : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ et $\psi : GF \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$

idée est de relever cette notion d'équivalence aux quasi-catégories.

(Si A, B sont des quasicat
les Foncteurs de A vers B sont les points de B^A.
les TN de F vers G sont les flèches φ de $(B^A)_1$ tq
$d_0 \varphi = G$ et $d_1 \varphi = F$.

$(B^A)_1 = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(A \times \Delta^1, B)$.

(ce sont les homotopies de F vers G).
$\rightsquigarrow$ une notion d'équivalence.
On appellera categorical (weak) equivalence.

Un autre pt de vue :
$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une éq de catégorie
$\Leftrightarrow$ { F est essentiellement surjective
{ F est pleinement fidèle.

On verra que ce théorème s'adapte (avec la bonne notion de pleint fidèle et d'essentiellement surj) aux quasicatégories