Cours du lundi 22/03/21

4 - Equivalences

$\tau_1 : \hat{\Delta} \underset{\perp}{\rightleftarrows} Cat : N$

X quasi-cat $\qquad \tau_1 X = hX$

on notera $[f]$ la classe de $f \in X_1$ dans hX.

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "g"] & \\ \cdot \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ_\sigma f"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\sigma"] & & \cdot \end{tikzcd} \qquad [g] \circ [f] = [g \circ_\sigma f]$$

On dit que f est un isomorphisme dans X si $[f] \in \tau_1 X$ est un iso.

Si X est une quasi-cat $\iff \exists g$

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "g"] & \\ \cdot \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\sigma"] & & \cdot \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "f"] & \\ \cdot \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\tau"] & & \cdot \end{tikzcd}$$

__Prop__ τ_1 préserve les produits finis.

__Dém__ $X \times -$ préserve les colimites dans $\hat{\Delta}$.

$$\begin{aligned} \tau_1(\Delta^n \times \Delta^m) &= \tau_1(N(P_n) \times N(P_m)) \\ &= \tau_1(N(P_n \times P_m)) \\ &= P_n \times P_m = \tau_1(\Delta^n) \times \tau_1(\Delta^m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_0 : \quad Cat &\longrightarrow Set \\ C &\longmapsto \text{classe d'iso de } C. \end{aligned}$$

préserve les produits finis

$\tau_0 : \quad \hat{\Delta} \xrightarrow{\tau_1} Cat \xrightarrow{\pi_0} Set.$

$\rightsquigarrow \quad S^{\tau_0}$ - objets ensembles simpliciaux

- $S^{\tau_0}(X, Y) = \tau_0(\underbrace{Y^X}_{\text{ens simplicial}})$.

$$(Y^X)_n = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(X \times \Delta^n, Y).$$

S^{τ_0} est une cat $\qquad Y^X \times Z^Y \longrightarrow Z^X$

$\Rightarrow \quad \tau_0(Y^X) \times \tau_0(Z^Y) \longrightarrow \tau_0(Z^X).$

Déf On dit que $f : X \to Y$ $\quad f \in (Y^X)_0$
est une équivalence catégorique si $\tau_0 f$ est un iso dans S^{τ_0}. $\quad [f] \in \tau_0(Y^X) = S^{\tau_0}(X, Y)$.

Interprétation lorsque X et Y sont des quasi catégories :
$\exists\, g \in (X^Y)_0$
tq $\tau_0(g\circ f) = id \quad \tau_0(f\circ g) = id$.

Étudions l'égalité $\tau_0(g\circ f) = id$
$g\circ f \in (X^X)_0$. $g\circ f$ est dans la même classe d'isomorphisme que l'identité dans $\tau_1(X^X) = h(X^X)$
$\exists\, [F], [G] \quad F, G \in (X^X)_1 = \mathrm{Hom}_{\hat\Delta}(X \times I, X)$
et $\sigma : X \times \Delta^2 \to X$

$$\begin{tikzcd} & id \arrow[dr, "G"] & \\ g\circ f \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\sigma"] & & g\circ f \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & g\circ f \arrow[dr, "F"] & \\ id \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\tau"] & & id \end{tikzcd}$$

On a $\tau_0(f\circ g) = id$

$$\begin{tikzcd} & id \arrow[dr, "L"] & \\ f\circ g \arrow[ur, "K"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\Omega"] & & f\circ g \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & f\circ g \arrow[dr, "K"] & \\ id \arrow[ur, "L"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\Omega"] & & id \end{tikzcd}$$

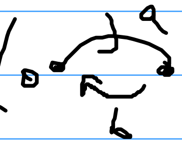
Dans la terminologie de Lurie
dire que f est une éq catégorique veut dire qu'il existe
g et des transf naturelle : $fg \underset{K}{\Rightarrow} id \quad id \underset{G}{\Rightarrow} gf$
qui sont des iso $\Longrightarrow$ $[K]$ est un iso de $\tau_1(Y^Y)$.

Ex Si $f : X \to Y$ est une fibration triviale entre deux quasi-cat alors f est une équivalence catégorique.

<u>Dém</u>

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[r, equal] & Y \end{tikzcd} \qquad \exists s \quad fs = id.$$

$$\begin{tikzcd} X \sqcup X \arrow[r, "(id, sf)"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ X \times E^1 \arrow[r, "f \circ p_1"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \beta"] & Y \end{tikzcd}$$

$E^1 = N\Big($  $\Big)$.

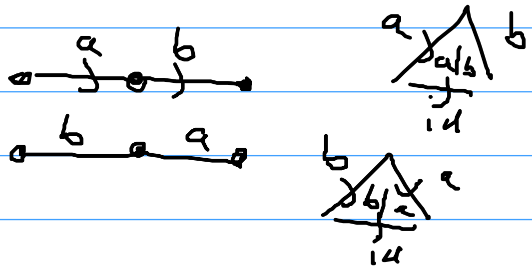
$b \circ a = id$ et $a \circ b = id$.

Description de E^1

0 - cellules $\quad 0 \quad 1$

1 - cellules $\quad a, b$

2 - cellules



⋮

n - cellule $\quad a|b|\dots$

$\qquad\qquad b|a|\dots$

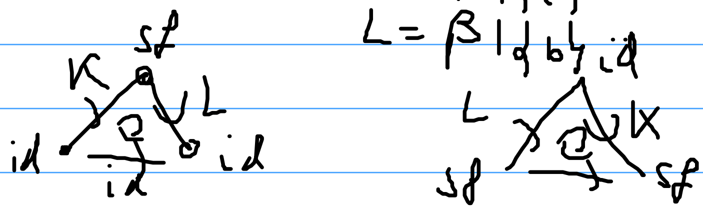
$E^1 = S^\infty$.

On peut noter $K : X \times I \to X$, $L : X \times I \to X$

$K = \beta|_{\{a\}}$

$L = \beta|_{\{b\}}$

On vérifie



☒

<u>Ex</u> Si $f : K \to L$ est une équivalence d'homotopie entre complexes de Kan alors c'est une équivalence catégorique.

<u>En effet</u> $\underbrace{\tau_1(K^K)}_{\text{complexe de Kan}} = h(K^K)$.

On alors les classes d'isomorphismes de $h(K^K)$ sont en correspondance avec $\underbrace{\pi_0(K^K)}_{\text{composantes connexes de } K^K} = (K^K)_0/\simeq$.

$\tau_0(K^K) = \pi_0(K^K)$.

Dire que f est une équivalence catégorique
$\iff \exists g$ tq $[gf] = [id]$ $\pi_0(K^K)$.

Donc si f équivalence d'homotopie $\exists g$ tq
$gf \simeq id$ et $fg \simeq id$ $\Rightarrow \begin{cases} [g \circ f] = [id] \text{ ds } \pi_0(K^K) \\ [f \circ g] = [id] \text{ ds } \pi_0(L^L) \end{cases}$ ☒

<u>Remarque</u> Si $f : C \to D$ est un foncteur entre 2 catégories alors
f équivalence de cat $\iff$ Nf est une équivalence catégorique.

<u>Prop</u> : Si $f : X \to Y$ est une équivalence cat entre quasi-catégories alors
$hf : hX \to hY$ est une équivalence de catégorie.
$\Rightarrow$ $\tau_0 f : \tau_0 X \to \tau_0 Y$ est un iso.

<u>Dém</u> : . $\exists g : Y \to X$ tq ...

$hf \circ hg : hY \to hY$.

On a $F : Y \times I \to Y$ $\quad F(0) = fg$
$F(1) = id$.

$hF : hY \times hI (= I) \to hY$
F induit une homotopie (= transformation naturelle) de $hf \circ hg$ à id.
Les foncteurs $hf \circ hg$ et id sont naturellement isomorphes.

• Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une éq de catégorie alors induit une bijection sur les classes d'iso. $\boxtimes$

Déf On dit que $f : X \to Y$ $X, Y \in \hat{\Delta}$ est une équivalence catégorique faible si $\forall\, Z$ quasi-cat
$\tau_0(f, Z) : \tau_0(Z^Y) \to \tau_0(Z^X)$ est une bijection.

Prop Toute équivalence catégorique est une équivalence catégorique faible. La réciproque est vraie si X et Y sont des quasi cat.

Dém : · $\exists\, g$ tq $\tau_0(f \circ g) = id$
alors $\tau_0(g, Z) \circ \tau_0(f, Z) = id$.

Réciproque :
$S^{\tau_0} \supset QCat^{\tau_0}$: objets quasicat
pleine
morphismes $QCat^{\tau_0}(X, Y) = \tau_0(Y^X)$

$f : X \to Y$ $[f]$ vu dans $\tau_0(X, Y)$.

$$QCat^{\tau_0} \hookrightarrow \widehat{QCat^{\tau_0}}$$
$$Z \mapsto (X \mapsto \tau_0(X, Z)).$$

Le plongement de Yoneda étant pleinement fidèle on en déduit la réciproque. $\boxtimes$

Thm : $f : X \to Y$ $X, Y \in \hat{\Delta}$ les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall\, Z$ quasi cat $f^* : Z^Y \to Z^X$ est une équivalence catégorique

$\Downarrow$

(2) $\forall\, Z$ quasicat $h(f, Z) : h(Z^Y) \to h(Z^X)$ est une équivalence de catégorie.

$\Downarrow$

(3) $\forall\, Z$ quasicat $\tau_0(f, Z) : \tau_0(Z^Y) \to \tau_0(Z^X)$ est une bijection.

Fait { Si de plus X et Y sont des quasi-cat alors c'est équivalent à f est une équivalence catégorique.

Prop Si $f: X \to Y$ est inner anodyne (mid anodyne) alors f est une équivalence catégorique faible.

Dém $\forall Z$ quasi-cat $Z^{\square f} = f^*: Z^Y \to Z^X$ est une fibration triviale. Donc une équivalence catégorique donc une équivalence catégorique faible.

Dém du théorème : $(3) \Rightarrow (1)$

Soit $f: X \to Y$ on peut factoriser

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

où X', Y' sont des quasi-cat et η et α sont mid-anodyne.

en effet

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\eta"'] & & * \\ & X' \arrow[ur, "\text{mid fib}"'] & \end{tikzcd}$$

possible car (mid-anodyne, mid-fib) est un système de factorisation faible.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha \circ f"] \arrow[d, "\text{mid-anodyne}"', "\eta"] & Y' \arrow[d, "\text{mid-fib}"] \\ X' \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "f'"] & * \end{tikzcd}$$

η et α vérifient (1) donc f vérifie (1) (resp (2), (3)) $\Leftrightarrow$ f' aussi.

f vérifiant (3) on a $\tilde{f}$ aussi entre deux quasi-cat donc $\tilde{f}$ est une équivalence catégorique entre quasi-catégories.

Il reste à mq $\forall Z$ quasi-cat $(\tilde{f})^*: Z^{Y'} \to Z^{X'}$ est une équivalence catégorique.

(il faut juste vérifier que les 4 triangles commutatifs prouvant que $\tilde{f}$ est une équivalence catégorique induisent 4 tels diagrammes prouvant que $\tilde{f}^*$ est une équivalence catégorique.

5 Interlude : complexes de Kan et quasi-groupoïd.

Déf On dit qu'une quasi-cat X est un quasi-groupoïd si hX est un groupoïd.

Ex Un complexe de Kan est un quasi-groupoïd. (on verra que c'est $\Leftrightarrow$ pour une quasi cat).

Soit S' une sous-cat de hX on définit la sous-quasi-cat de X engendrée par S'

pullback.
$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & S' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & hX \end{tikzcd}$$
$\leftarrow$ mid-fibration. $\Rightarrow S$ quasi-cat

Ex fondamental :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Core}(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{Iso}(hX) =: \mathrm{Core}(hX) \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "\pi"] & hX \end{tikzcd}$$

Core(X) est une sous-quasi catégorie de X.

ms en fait c'est un complexe de Kan.

En utilisant la prop précédente il suffit de mq tout élément de $\mathrm{Core}(X)_1$ est un iso (inversible dans $h(\mathrm{Core}(X))$).

<u>En effet</u> :

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g \in X_1"] & \\ x \arrow[ur, "f \in X_1"] \arrow[rr, "id_x"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\sigma"] & & x \end{tikzcd} \qquad \sigma \in X_2 .$$

Il faut mq $\sigma \in \mathrm{Core}(X)_2$.

Il faut mq $\pi(\sigma)$ vit dans $N(\mathrm{Iso}(hX))_2$.

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "{[g]}"] & \\ \cdot \arrow[ur, "{[f]}"] \arrow[rr, "{[id]}"'] & & \cdot \end{tikzcd}$$

Finalement on voit que $x \in \mathrm{Core}(X)_n$

$x : \Delta^n \to \mathrm{Core}(X)_n$

et $\forall\, i<j$ $\quad x|_{\Delta\{i,j\}}$ est inversible dans X.

$\Rightarrow$ $h(\mathrm{Core}(X))$ est isomorphe à $\mathrm{Core}(hX)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Core} : \mathrm{QCat} \underset{\top}{\rightleftarrows} \mathrm{Kan} :$ inclusion

Si on accepte que core(X) est un complexe de Kan alors

$\pi_0(X)$ = "classe d'iso de hX"
$= \pi_0 \, core(X)$.
= "composantes connexes de core(X)"

En particulier on a :

$f : X \to Y$ ($X, Y \in \Delta$) est une équivalence catégorique faible

$\Leftrightarrow$ $\forall Z$ quasi-cat $Core(f, Z) : Core(Z^Y) \to Core(Z^X)$ est une équivalence catégorique

$\Leftrightarrow$ $\forall Z$ quasi cat $Core(Z^Y) \to Core(Z^X)$ est une équivalence d'homotopie.

6- Isofibration (pseudo-fibrations).

<u>Déf</u> $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une isofibration

si $\forall$ $Fx \xrightarrow{p} y$ p iso de $\mathcal{D}$
$\exists$ $x \xrightarrow{q} x'$ tq $Fq = p$
et q iso.

<u>Déf</u> Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre quasi catégories [F est un morphisme simplicial].

On dit que f est une isofibration (ou pseudo-fibration chez Joyal)

1) F est une mid-fibration

2) $\forall$ $Fx \xrightarrow{g} y$ iso de $\mathcal{D}$

$\exists$ $f : x \to x'$ iso de $\mathcal{C}$ tq $Ff = g$.

<u>Rem</u>. 2) $\Longleftrightarrow$ $hF : h\mathcal{C} \to h\mathcal{D}$ est une isofibration.
dans le cas où F est une mid-fibration

• On peut remplacer cette déf par

2') $\forall$ $y \xrightarrow{g} Fx$ iso de $\mathcal{D}$,

$\exists$ $f : x' \to x$ tq $Ff = g$.

[Montrons que 2) $\Longleftrightarrow$ $hF : h\mathcal{C} \to h\mathcal{D}$ isofibration.

Si 2) vrai on se donne $[g] : Fx \to y$ un iso de $h\mathcal{D}$.

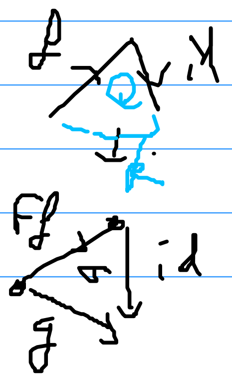
$g : Fx \to y \in \mathcal{D}_1$ est un iso ... ✓

Si hF est une isofibration.
On se donne $g : Fx \to y \in \mathcal{D}_1$ tq $[g]$ iso de $h\mathcal{D}$.

alors $\exists$ $f : x \to x'$ tq $(hF)[f] = [g]$.
et $[f]$ iso de $h\mathcal{C}$.
mais f iso de $\mathcal{C}$.

$\Rightarrow$ $F(f) \simeq g$.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^1_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \\ \Delta^1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$



donc il existe $k \in \mathcal{C}_1$ tq $k \simeq f$ et $Fk = g$. Comme

· $[f]$ iso de $h\mathcal{C}$ il en va de même pour $[k]$.

Cqfd (2) est vrai $\boxtimes$

Exemples. Les left- ou right fibrations sont des iso-fibrations.

En effet i) ce sont des mid-fibrations.

ii)

$$\begin{tikzcd} \Lambda^1_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \\ \Delta^1 \arrow[r] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$x \xrightarrow{f} x'$

$F \downarrow$

$Fx \xrightarrow{g} y$, $g = Ff$.

Il faut mq si $g = Ff$ est un iso alors f aussi (on dit que F est conservatif).

$$\begin{tikzcd} \Lambda^2_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ \Delta^2 \arrow[r] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

u, x_2, f, id

h, g, id

$[f][u] = id$.

On obtient $\exists\, w$ tq $[u][w] = id$.

Pd $\quad [w] = [f]$ est donc $\quad [f][u] = \mathrm{id}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [u][f] = \mathrm{id}$

f est donc inversible -

On a donc :

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{left} \arrow[dr] & \\
\text{trivial fib} \arrow[r] & \text{fib Kan} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{pseudo-fib i.e.} \ \text{-Imid} \\
 & & \text{right} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$