Cours du mercredi 24 mars 2021

· Rectificatif : $f^{\square i}$ $i : A \to B$, $f : X \to Y$

$f^{\square i} : X^B \to Y^B \times_{Y^A} X^A$, (fx, i^*)

f est une fibration triviale et i mono alors $f^{\square i}$ est une fib triviale.

$f \xrightarrow{\text{truc}}$ et i anodyne truc alors $f^{\square i}$ est une fibration triviale

• Yoneda $QCat^{\tau_0}(X, Y) = \tau_0(Y^X)$ → encore catégorie localement petite. $\underset{\sim}{\text{ens simplicial}}$

$\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})$ est pleinement fidèle

$X \mapsto \mathcal{C}(X, -)$

$\forall\ \tau : \mathcal{C}(X, -) \to \mathcal{C}(Y, -)$, $\exists!\ f : Y \to X$ tq $\tau = f^*$.

Rappel   4- Equivalence catégorique (faible)

5- quasi-groupoïde vs cx de Kan

$\mathrm{Core}(X)$: plus grand sous-cx de Kan inclus dans X.

6- Isofibrations entre quasicatégories

Def $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre quasicat est une isofib si

1) F est une fib interne

2) $hF : h\mathcal{C} \to h\mathcal{D}$ est une isofib.

```tikzcd
\text{trivial fib} \arrow[r] & \text{fib Kan} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{left fib} \arrow[r] & \text{isofib} \arrow[r] & \text{inner fib.} \\
 & & \text{right fib} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
```

Thm (admis) [Joyal lifting lemma]

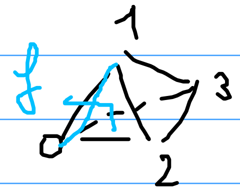
$p : X \to Y$ fib interne, $f : x \to y \in X_1$ tq pf est un iso dans Y.

Sont équivalentes :

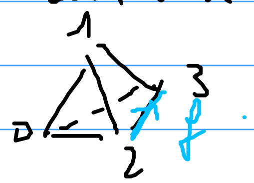
(1) f iso dans X

(2)
$$\begin{tikzcd} \Delta^{\{0,1\}} \arrow[r] & \Lambda^n_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$
f ; pf iso

admet un relèvement



(3) La même chose en prenant Λ^n_n et sa restriction à $\Delta^{\{n-1,n\}} \longrightarrow X$ valant f.



Corollaire X quasicat.

X est de Kan $\Leftrightarrow$ hX est un groupoïde.

Dém $i \Rightarrow ii$ ✓.

$ii \Rightarrow i$

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_0 \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & * \end{tikzcd}$$

$\tilde f|_{\Delta^{\{0,1\}}}$ est inversible.

relèvement par (1) $\Rightarrow$ (2) du thm précédent.

de même pour $\Lambda^n_n \hookrightarrow \Delta^n$

En particulier
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Core}(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{Iso}(hX) \arrow[d] \\ X \arrow[r] & hX \end{tikzcd}$$

$h(\mathrm{Core}(X)) = \mathrm{Iso}(hX)$ ← gpoïde.

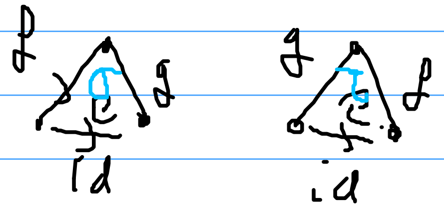
Cor X un quasi cat $f \in X_1$.

f iso $\iff$
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ E^1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & * \end{tikzcd}$$

$$E^1 = N\left(0 \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} 1 \right).$$

Dém ii $\Rightarrow$ i évident.

i $\Rightarrow$ ii : f iso

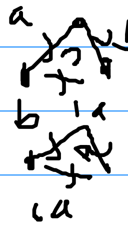


$E^1 \to X$ $\quad (E^1)_n \to X_n$.

$(E^1)_1 \to X_1$. $\qquad (E^1)_2 \to X_2$

$a \mapsto f$,

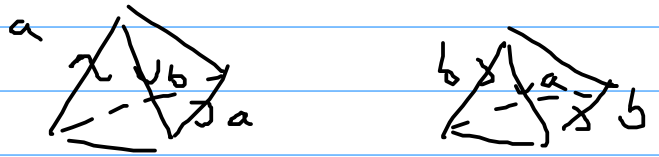
$b \mapsto g$.



$\mapsto \sigma$

$\mapsto \tau$

$(E^1)_3$:



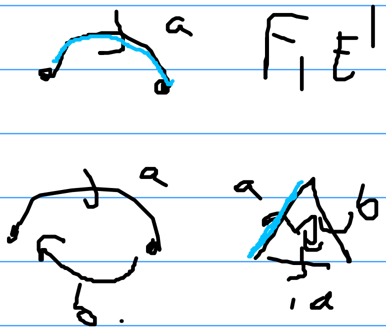
$\rightsquigarrow$??

Pour démontrer ceci on filtre E^1

$$F_n E^1 = sk_{n-1} E^1 \cup \underbrace{a|b\ldots}_{\text{la } n\text{-cellule qui commence}}$$

pour a des $(E^1)_n - f$.

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\{0,1\}} \arrow[r] & \Lambda^n_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_{n-1}E^1 \arrow[r] \arrow[d] & X \\ & \Delta^n \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "\exists g"] & F_n E^1 \arrow[ur, "h_n"'] & \end{tikzcd}$$



Comme c'est un pushout, s'il existe g alors $\exists\, h_n$

et en utilisant le thm de Joyal on a un relèvement $F_n E^1 \to X$
en passant à la colimite on obtient un relèvement $E^1 \to X$ $\boxtimes$

Corollaire $p : X \to Y$ une fib interne entre quasi catégories.

Sont équivalentes :

(1) p est une isofib

(2) $p \in \{0 \hookrightarrow E^1\}^{\boxslash}$

(3) $\mathrm{Core}(p) : \mathrm{Core}(X) \to \mathrm{Core}(Y)$ est une fibration de Kan entre cx de Kan.

Rem on en déduit que p isofib entre quasicat
$\iff p \in \left(\{0 \hookrightarrow E^1\} \cup \{\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n\}_{0<k<n}\right)^{\boxslash}$

Dém

(2) $\Rightarrow$ (1) Si $p(x) \xrightarrow{g} y$ iso dans Y

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] & x \arrow[d, mapsto] \\ E^1 \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed] & Y & p(x) \end{tikzcd}$$

Donc $\exists$ relèvement, $\hat{g}$ existe par le corollaire précédent. donc $\exists f$ iso dans X tq $pf = g$.

(1) $\Rightarrow$ (2) par récurrence on

$$\begin{tikzcd} F_{n-1}E^1 \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ F_n E^1 \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "\alpha_n"] & Y \end{tikzcd}$$

Cas

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ F_1 E^1 = (\bullet \to \bullet) \arrow[r, "g_1"'] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

$px \xrightarrow{g} y$.

La récurrence se fait exactement de la même manière que précédemment

(1) $\Rightarrow$ (3) MQ $Core(X) \to Core(Y)$ est une fibration de Kan.

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d] & Core(X) \arrow[r] \arrow[d, "Core(p)"] & X \arrow[d, "p"] \\
\Delta^n \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & Core(Y) \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
\qquad 0 < k < n.
$$

Lemme 1 $A \xrightarrow{F} X$ factorise par $core(X)$ $\iff$ $\forall f \in A_1$, $F(f)$ est iso dans X.

il suffit de montrer que $\forall\ i<j$ la restriction à $\Delta^{\{i,j\}}$ est un iso dans X ; appelons la f_{ij}

{ tout à compléter..
< reprendre la démarche lorsque l'on a démontré que left fib et isofib

Avec le lemme 2 on a $pf_{ij} \in Core(Y)$
Donc pf_{ij} est un iso et donc f_{ij} aussi
$\Rightarrow$ $\Delta^n \to X$ est à valeurs dans $Core(X)$.

Pour les cornets Λ^n_0, Λ^n_n
on fait la même chose à l'aide du thm de relèvement de Joyal.

(3) $\Rightarrow$ (1) (facile) ☒

Corollaire Si p est une fibration gauche ou droite alors p est une isofibration.

<u>Prop</u> • $p : X \to Y$ est une isofibration et i mono alors $p^{\square i}$ isofibration

• si $p : X \to Y$ est une fib interne et i mono tq i_0 est une bijection alors $p^{\square i}$ est une isofibration.

• $\forall X$ quasicatégorie $\forall j$ mono $j : K \to L$ tq j_0 bijection $j^* : X^L \to X^K$ est une isofibration conservative.

<u>Dém</u> dans le même esprit que la dém de p fib interne $\Rightarrow p^{\square i}$ iso.

<u>Exo</u> mq $\{$monos j tq j_0 est une bijection$\}$

$$= \overline{\{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}}_{n>0}$$

Corollaire

(1) $F, G : X \to Y$ $\quad \eta : F \Rightarrow G$ $\quad (\eta : X \times I \to Y)$ $\quad \eta \in (Y^X)_1$

η est une équivalence naturelle (iso de $(Y^X)_1$) $\Leftrightarrow \forall x \in X$ $\eta_x : Fx \to Gx$ est un iso de Y.

(2) $\forall x, y \in X$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}_X(x,y) = X(x,y) \arrow[r] \arrow[d] & X^I \arrow[d] \\ * \arrow[r, "\{(x,y)\}"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

est un complexe de Kan.

Dém Basé sur le fait que

1) $sk_0 X \overset{j}{\hookrightarrow} X$ vérifie j_0 bijection

donc $Y^X \to Y^{sk_0 X}$ est une isofib conservative.

2) $j : \{0,1\} \to I$ j_0 bij,

$X^I \to X^{\{0,1\}}$ est une isofib conservative

Lemme 1 les fibres d'une isofib conservative sont des complexes de Kan.

Lemme 2

$$\begin{tikzcd} A \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "\text{isofib}"] \\ A \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \Rightarrow$$

$$\underbrace{Core(A \times_Y X)}_{\substack{\text{sous cx de Kan} \\ \text{max contenu} \\ \text{dans } A \times_Y X}} \simeq \overbrace{\underbrace{Core(A) \times_{Core\, Y} Core(X)}_{\text{complexe de Kan.}}}^{U}$$

(pullback le long d'1 fib de Kan donne $U \to Core(A)$ fib de Kan

$\subset A \times_Y X$

$\subset$ $Core(A \times_Y X)$

Lemme 2 $\Rightarrow$ Lemme 1

$$\begin{tikzcd} A = Core\, X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "\text{iso fib conservative } p"] \\ Core\, Y \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$A = \mathrm{Core}\, Y \times_Y X$ est une quasi-cat

- c'est un complexe de Kan car tout morphisme est iso -
donc $\mathrm{Core}\, A = A = \mathrm{Core}(X)$
donc les fibres de $X \xrightarrow{p} Y$ sont les même que les fibres de $\mathrm{Core}(p)$ est une fibration de Kan donc ce sont des complexes de Kan -

Corollaire $p : X \to Y$ foncteur entre quasi cat

1) p fib triviale $\Leftrightarrow$ p isofib + equivalence cat (faible)

2) p isofib $\Leftrightarrow$ p a la propriété de relèvement à droite % mono $\cap$ W cat
$\rightsquigarrow$ equivalence cat faible.

Dém peut-être plus tard -
(voir Rune Haugseng cours en ligne).

7 - La structure modèle de Joyal

Thm $\hat{\Delta}$ est muni d'une structure modèle où :

→ les cofibrations sont les mono $\mathcal{C}$

→ les équivalences faibles sont les équivalences catégoriques faibles W_{cat}

→ les fibrations $Fib = (\mathcal{C} \cap W_{cat})^{\boxslash}$.

Dém i) W_{cat} a la propriété 2-out-of-3 ✓

ii) $Fib \cap W_{cat} =$ "fibrations triviales"

• Soit $f \in Fib \cap W_{cat}$. $f = qi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

i : mono
q : fib triviale

car (mono, fib triv) système factorisation faible

$i \in W_{cat} \cap \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal, "id"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "q"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y \end{tikzcd}$$

Donc f retract d'1 fib triviale est une fib triviale.

• Une fib triviale est une équivalence catégorique . et $\in (\mathcal{C})^{\boxslash}$ donc aussi dans $(\mathcal{C}\cap W_{cat})^{\boxtimes}$ donc c'est dans Fib.

On vient donc de mq $(\mathcal{C}, Fib \cap W_{cat})$ est un système de factorisation faible.

iii) On veut démontrer que $(\mathcal{C}\cap W_{cat}, Fib)$ est un système de factorisation faible.

[Notons Isofib la classe des isofibrations entre quasi catégories $v : X \to Y$ quasi cat

voir prop non démontrée

(On a vu $v \in Isofib \iff v \in (\mathcal{C}\cap W_{cat})^{\boxtimes}$

$\Rightarrow \mathcal{C}\cap W_{cat} \subseteq {}^{\boxtimes}(Isofib)$

mq ${}^{\boxtimes}(Isofib) \subset \mathcal{C}\cap W_{cat}$.

Soit $u : A \to B \in {}^{\boxtimes}(Isofib)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "Isofib"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\alpha"] & * \end{tikzcd}$$

i : inver anodyne
X quasi cat.

$\exists \alpha,\ \alpha u = i$

$\Rightarrow u$ mono.

mq $u \in W_{cat}$.

Étape 1 $\forall f$ isofib entre quasicat

MQ $f^{\square u}$ est une fibration triviale $\forall$

il suffit de mq $\forall v$ mono $v \pitchfork f^{\square u}$ ✓

$\Leftrightarrow$ $v \square u \pitchfork f$ ✓

$\Leftarrow$ $u \pitchfork \underbrace{f^{\square v}}_{\text{isofib}}$ ✓

$\in {}^{\boxslash}(\mathrm{Isofib})$

en particulier pour $f : Z \to *$ où Z quasicat $u^* : Z^B \to Z^A$ est une fib triviale donc une équivalence catégorique : c'est la déf de u est une équivalence catégorique faible.

Ccl $\mathcal{C} \cap W_{cat} = {}^{\boxslash}(\mathrm{Isofib})$

Donc est saturé.

- Il existe S ensemble tq $\bar{S} = \mathcal{C} \cap W_{cat}$.

Remarque On sait que

$$T = \{0 \subset E^1\} \cup \{\Lambda^n_k \subset \Delta^n\}_{0<k<n}$$

$T \subset \mathcal{C} \cap W_{cat}$, donc $\bar{T} \subset \mathcal{C} \cap W_{cat}$

$\Rightarrow \mathrm{Fib} \subset (\overline{I})^{\boxslash}$.

Question ? Trouver $p : X \to Y$
tq $p \in (\overline{I})^{\boxslash}$ mais $p \notin \mathrm{Fib}$?

L'existence de S utilise des remplacements fonctoriels fibrants et des "mapping space"
[Voir Joyal].

Ccl $(\overline{S}, S^{\boxslash}) = (W_{cat} \cap \mathrm{mono}, \mathrm{Fib})$ est un système de factorisation faible $\boxslash$

$$\mathrm{Cat} \underset{N}{\overset{\tau_1}{\rightleftarrows}} (\hat{\Delta}, e, W_{cat}, \mathrm{Fib}) \qquad \perp$$

Joyal-Tierney

$(\mathrm{Cat}, \mathrm{mono}, W_{cat}, \mathrm{Isofib})$

c'est une adjonction de Quillen.

- Dans la structure de Joyal et fibrant sont les quasi cat et les fibrations entre quasi cat sont les isofibrations.
Donc N préserve $\rightarrow$ fib
$\rightarrow$ fib aux lignes.

- Rem si f cat équivalente alors f weq.

$\Rightarrow$ $id : (\hat{\Delta})_{\text{Joyal}} \to (\hat{\Delta})_{\text{Kan-Quillen}}$

"est une localisation"

induit $Ho(\hat{\Delta}_{\text{Joyal}}) \to Ho(\hat{\Delta})_{\text{Quillen}}$
une localisation

% Weg —