Chapitre 2. Catégories simpliciales

1- Catégories enrichies.

$(\mathcal{V}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale symétrique

$F : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ $\quad F$ foncteur (lax) monoïdal

si $\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, $\quad F(A) \otimes F(B) \to F(A \otimes B)$

et $\eta : I_{\mathcal{U}} \to F(I_{\mathcal{V}})$.

<u>Déf</u> Une $\mathcal{V}$-catégorie (catégorie $\mathcal{V}$-enrichie) $\mathcal{C}$ est la donnée

. d'une classe d'objets

. $\forall x, y$ des objets d'un objet $\mathcal{C}(x,y)$ de $\mathcal{V}$

muni d'opérations :

$\to \mathcal{C}(y,z) \otimes \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{C}(x,z)$ flèche de $\mathcal{V}$

$\to I_{\mathcal{V}} \xrightarrow[id_x]{} \mathcal{C}(x,x)$

vérifiant les axiomes classiques des catégories.
(composition associative et unitaire).

<u>Prop</u>: $F : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ est un foncteur (lax) monoïdal et $\mathcal{C}$ est une $\mathcal{V}$-catégorie on peut construire une $\mathcal{U}$-catégorie $F_* \mathcal{C}$: - les objets sont ceux de $\mathcal{C}$

- $(F_* \mathcal{C})(x,y) = F(\mathcal{C}(x,y))$.

<u>Ex</u> Si $\mathcal{V}$ petite catégorie $\mathcal{V}(I,-) : \mathcal{V} \to \mathrm{Set}$
$X \mapsto \mathcal{V}(I, X)$

On définit pour $\mathcal{C}$ $\mathcal{V}$-enrichie la catégorie sous-jacente $\mathcal{V}(I,-)_* \mathcal{C} =: \mathcal{C}_0$

On a $\mathcal{C}_0(x,y) = \mathcal{V}(I, \mathcal{C}(x,y))$

Par la suite on notera $f : x \to y$ un élément de $\mathcal{C}_0(x,y)$ ie $I \xrightarrow{f} \mathcal{C}(x,y)$

→ flèche des $\mathcal{V}$

Remarque : c'est bien défini car $\mathcal{V}(I,-) : \mathcal{V} \to Set$ est (lax) monoidal

$$\begin{cases} \mathcal{V}(I,X) \times \mathcal{V}(I,Y) \longrightarrow \mathcal{V}(\underset{\substack{\wr\wr \\ I}}{I \otimes I}, X \otimes Y) - \mathcal{V}(I, X \otimes Y) \\ * \longrightarrow \mathcal{V}(I,I) \\ * \longmapsto id_I . \end{cases}$$

Ex une catégorie $\mathcal{V}$ monoidale fermée est une catégorie pour laquelle $X \otimes -$ admet un adjoint à droite noté $\underline{hom}_{\mathcal{V}}(X,-)$

$$\mathcal{V}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathcal{V}(Y, \underline{hom}_{\mathcal{V}}(X,Z)) .$$

elle est donc enrichie en elle-même : $\underline{\mathcal{V}}$

→ Objets ceux de $\mathcal{V}$

→ $\underline{hom}_{\mathcal{V}}(X,Y)$.

$I_{\mathcal{V}} \xrightarrow[id_X]{} \underline{hom}_{\mathcal{V}}(X,X)$ adjoint de $\underset{\substack{\wr\wr \\ X}}{I_{\mathcal{V}} \otimes X} \xrightarrow[id_X]{} X$

On a $ev_X : \underline{hom}_{\mathcal{V}}(X,Y) \otimes X \to Y$

(adjoint de $\underline{hom}_{\mathcal{V}}(X,Y) \xrightarrow[id]{} \underline{hom}_{\mathcal{V}}(X,Y)$).

$$\underline{hom}_{\mathcal{V}}(Y,Z) \otimes \underline{hom}_{\mathcal{V}}(X,Y) \longrightarrow \underline{hom}_{\mathcal{V}}(X,Z)$$

$$\underline{hom}_{\mathcal{V}}(Y,Z) \otimes \underline{hom}_{\mathcal{V}}(X,Y) \otimes X \xrightarrow{ev_X} \underline{hom}_{\mathcal{V}}(Y,Z) \otimes Y \xrightarrow{ev_Y} Z$$

- $\underline{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{V}$.

$$\underline{\mathcal{V}}_0(x,y) = \mathcal{V}(I_{\mathcal{V}}, \underline{hom}_{\mathcal{V}}(x,y))$$
$$= \mathcal{V}(I_{\mathcal{V}} \otimes x, y) = \mathcal{V}(x,y) .$$

Ex : • $Ch(R)$ est symétrique monoidale fermée.
• $\hat{\Delta}$ est cartésienne fermée (structure monoidale est le produit cartésien.)
$$(\underline{\mathrm{hom}}_{\hat{\Delta}}(X,Y))_n = (Y^X)_n = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(X \times \Delta^n, Y).$$

• Top aussi (espace top compactly generated Hausdorff)

Déf une catégorie simpliciale $\mathcal{C}$ est une catégorie enrichie sur $\hat{\Delta}$.

• → une classe d'objet (ou exemple petite catégorie simpliciale)

→ $\forall x, y$ objets un ensemble simplicial $\mathcal{C}(x,y)$.

$\forall n \quad \mathcal{C}(y,z)_n \times \mathcal{C}(x,y)_n \to \mathcal{C}(x,z)_n$.

un élément $* \longrightarrow \mathcal{C}(x,x)$

$\Leftrightarrow \quad id_x \in \mathcal{C}(x,x)_0$.

Rem : $\mathcal{C}_0(x,y) = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(*, \mathcal{C}(x,y)) = \mathcal{C}(x,y)_0$.

On a le foncteur $\pi_0 : \hat{\Delta} \to Set$ (adjoint à gauche du foncteur constant) commute aux produits ⇒ toute catégorie simpliciale a une catégorie associée $\pi_0\mathcal{C}$. Rappel $\pi_0 S = \mathrm{Coeq}(S_1 \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} S_0)$

Lemme $\mathcal{C}$ est une catégorie simpliciale
(⇒) $\mathcal{C}$ est un objet simplicial des Cat dont l'ensemble simplicial des objets est discret.

Ex Les 2-catégories sont les catégories enrichies dans Cat (catégorie des catégories)

Déf Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux $\mathcal{V}$-catégories
un $\mathcal{V}$-foncteur $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée

- $x \mapsto F(x) \in ob(\mathcal{D})$, $x \in ob(\mathcal{C})$

- $\forall x, y$ objets de $\mathcal{C}$ $\quad \mathcal{C}(x,y) \xrightarrow{F_{xy}} \mathcal{D}(Fx, Fy)$ flèche des $\mathcal{V}$

qui satisfont les axiomes classiques de foncteurs

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "id_x"] \arrow[dr, "id_{Fx}"'] & \mathcal{C}(x,x) \arrow[d, "F_{xx}"] \\ & \mathcal{D}(Fx, Fx) \end{tikzcd}$$

+ diagramme de compositions

Lemme tout $\mathcal{V}$-foncteur $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$
donne lieu à un foncteur $F_0: \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$.

$$g \in \mathcal{C}_0(x,y) \qquad \begin{tikzcd} I_\mathcal{V} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "F_0(g)"'] & \mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "F_{xy}"] & \mathcal{D}(Fx, Fy) \end{tikzcd}$$

$F_0(g) \in \mathcal{D}_0(Fx, Fy)$.

Ex : un $\vec{\Delta}$-foncteur : $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$
est $x \mapsto Fx$ et $f_{x,y}$
$F_{xy}: \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{D}(x,y)$ une application simpliciale.

- $F_0: \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0 \qquad (F_{xy})_0 : \mathcal{C}(x,y)_0 \to \mathcal{D}(x,y)_0$

Foncteurs représentables

Soit $\mathcal{D}$ une $\mathcal{V}$-catégorie et $g \in \mathcal{D}_0(y,z)$
$g: I_\mathcal{V} \to \mathcal{D}(y,z)$ et $x \in ob(\mathcal{D})$.

$$
\begin{tikzcd}
g_* : \mathcal{D}(x,y) \simeq I \underset{\mathcal{V}}{\otimes} \mathcal{D}(x,y) \arrow[r, "g \otimes \mathcal{D}(x,y)"] \arrow[dr, bend right, "\text{flèche de } \mathcal{V}"'] & \mathcal{D}(y,z) \otimes \mathcal{D}(x,y) \arrow[d] \\
& \mathcal{D}(x,z)
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{V}(I,-) \to \mathrm{Set}$

$$\mathcal{D}(x,-) : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$y \longmapsto \mathcal{D}(x,y)$$
$$g \longmapsto g_*$$

$$\mathcal{D}_0(x,-) : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathrm{Set}$$
$$= \mathcal{V}(I,-) \circ \mathcal{D}(x,-)$$

$\mathcal{V}$ est monoïdale fermée

$$\underline{\mathcal{D}}(x,-) : \mathcal{D} \xrightarrow{F} \underline{\mathcal{V}} \quad \text{est un } \mathcal{V}\text{-foncteur}$$
$$y \mapsto \mathcal{D}(x,y)$$

$\forall\, y,z \in ob(\mathcal{D})$

$$\mathcal{D}(y,z) \longrightarrow \underline{\mathcal{V}}(Fy, Fz) \quad \text{flèche de } \mathcal{V}$$
$$\iff \mathcal{D}(y,z) \otimes Fy \longrightarrow Fz .$$
$$\mathcal{D}(x,y) = Fy, \quad \mathcal{D}(x,y) \longrightarrow \mathcal{D}(x,z)$$

composition.

On a :

$$\left(\underline{\mathcal{D}}(x,-)\right)_0 : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{V}$$
$$\left(\underline{\mathcal{D}}(x,-)\right)_0 = \mathcal{D}(x,-)$$

Déf Soit $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux $\mathcal{V}$-foncteurs. Une $\mathcal{V}$-transformation naturelle de F à G est la donnée pour tout x objet de $\mathcal{C}$

$* \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{D}(Fx, Gx)$ $\qquad \varphi_x \in \mathcal{D}_0(Fx, Gx)$

flèche de $\mathcal{V}$

Vérifiant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "F_{xy}"] \arrow[d, "G_{xy}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[d, "(\varphi_y)_*"] \\
\mathcal{C}(Gx,Gy) \arrow[r, "(\varphi_x)^*"'] & \mathcal{D}(Fx,Gy)
\end{tikzcd}$$

Déf Soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{V}$-catégorie $x,y \in Ob(\mathcal{C})$.
On dit que x et y sont isomorphes si ils sont isomorphes dans $\mathcal{C}_0$.

Thm Les propositions suivantes sont équivalentes

1) x et y sont isomorphes
2) $\mathcal{D}(x,-)$ et $\mathcal{D}(y,-) : \mathcal{D}_0 \to Set$ sont naturellement isomorphes
3) $\mathcal{D}(x,-)$ et $\mathcal{D}(y,-) : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{V}$ sont naturellement isomorphes
4) $\mathcal{V}$ est monoïdale fermé
$\underline{\mathcal{D}}(x,-)$ et $\underline{\mathcal{D}}(y,-) : \mathcal{D} \to \underline{\mathcal{V}}$ sont naturellement $\mathcal{V}$-isomorphes.

Dem exo.

Déf : $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un $\mathcal{V}$-foncteur est une $\mathcal{V}$-équivalence de $\mathcal{V}$-catégories si

1) $\forall\, x,y \in Ob\,\mathcal{C}$ $\quad \mathcal{C}(x,y) \xrightarrow{F_{x,y}} \mathcal{D}(x,y)$ flèche de $\mathcal{V}$
est un isomorphisme dans $\mathcal{V}$.
2) $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ est essentiellement surjectif.
$\forall\, d \in \mathcal{D}$ $\exists\, c \in \mathcal{C}$ et un isomorphisme dans $\mathcal{D}_0$: $Fd \to c$.

Rem Sous la condition 1) on peut remplacer 2)' par $F_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{D}_0$ est une équivalence de catégories.

Réf E. Riehl (Homotopical cat theory) Chap 3.

2. Catégories $\mathcal{V}$-enrichies avec $\mathcal{V}$ catégorie modèle.

Ici on donne des conditions pour "faire de l'homotopie" sur les catégories $\mathcal{V}$-enrichies.

$\gamma : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Ho}\,\mathcal{V}$ localisation par rapport aux équivalences faibles se décrit bien lorsque $\mathcal{V}$ est une catégorie modèle.

Déf On dit que $\mathcal{V}$ est une catégorie modèle monoïdale si :

→ $\mathcal{V}$ cat modèle

→ $(\mathcal{V}, \otimes, \mathbb{1})$ est monoïdale (symétrique fermée)

1) $f : X \to Y$ $\quad g : X' \to Y'$

$f \boxtimes g :$ $X \otimes Y' \underset{X \otimes X'}{\sqcup} X' \otimes Y \to X' \otimes Y'$

Si f et g sont des cof alors $f \boxtimes g$ aussi et est acyclique si f ou g l'est.

2) $\mathbb{1}$ objet initial de $\mathcal{V}$ (unit axiom)

$\forall X$ cofibrant, $\forall$ $Q\mathbb{1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}$ $Q\mathbb{1}$ remplacement

Cofibrant de I $\qquad QI \otimes X \to I \otimes X \simeq X$
est une équivalence faible.

<u>Ex</u>. $(\hat{\Delta}$, structure modèle de Kan-Quillen. est bien une catégorie modèle monoïdale (appelée aussi catégorie modèle cartésienne)

<u>Prop</u> Si $\mathcal{V}$ est monoïdale modèle
$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \xrightarrow[\otimes]{} \mathcal{V}$$
est un bifoncteur de Quillen à gauche.
$\otimes^L$: $\mathrm{Ho}\,\mathcal{V} \times \mathrm{Ho}\,\mathcal{V} \to \mathrm{Ho}\,\mathcal{V}$ existe
et munit $\mathrm{Ho}\,\mathcal{V}$ d'une structure monoïdale
où $I = \gamma(I_{\mathcal{V}})$.
De plus γ est monoïdal fermé.

<u>Dém</u> : à compléter.

Ex Si $\mathcal{C}$ est une catégorie simpliciale on peut définir
$h\mathcal{C} = \gamma_*(\mathcal{C})$.

Rem $(h\mathcal{C})_0 = \pi_0\mathcal{C}$ –

3 – Structure modèle sur Cat_Δ

où Cat_Δ catégorie des catégories simpliciales –

Déf $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un $\hat{\Delta}$-foncteur –
On dit que F est une équivalence de Dwyer-Kan si

Lurie

$hF : h\mathcal{C} \to h\mathcal{D}$ est une $\mathcal{H}$-équivalence de catégories $\mathcal{H}$-enrichie
où $\mathcal{H} = ho(\hat{\Delta}_{Kan})$.

Rem – F est une équivalence de Dwyer-Kan $\Leftrightarrow$

Bergner

(W1) $\forall c, c' \in \mathcal{C}$ $\mathcal{C}(c,c') \xrightarrow{F_{cc'}} \mathcal{D}(Fc, Fc')$ est une équivalence d'homotopie faible –

(W2)' $\pi_0 F : \pi_0\mathcal{C} \to \pi_0\mathcal{D}$ est une équivalence de catégories

ou

(W1) et (W2) $\forall d \in \mathcal{D}$ $\exists c \in \mathcal{C}$ et un iso dans $\pi_0\mathcal{D}$ $Fc \to d$ –

Remarque $\iota : Cat \to Cat_\Delta$

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $\iota F : \iota\mathcal{C} \to \iota\mathcal{D}$.

$$L : \mathcal{C}at \to \mathcal{C}at_\Delta \underset{\pi_0}{\overset{(-)_0}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}at$$

$\pi_0 L \mathcal{C} = \mathcal{C}$

$(L\mathcal{C})_0 = \mathcal{C}$.

On a $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une équivalence de catégorie $\Leftrightarrow$ LF est une équivalence de Dwyer-Kan.

<u>Déf</u> $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un Δ-foncteur est une fibration de Dwyer-Kan si

(F1) $\forall x, y \in \mathcal{C}$ $\mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{D}(Fx, Fy)$ est une fibration de Kan

(F2) $\forall a, \in \mathcal{C}$, $b \in \mathcal{D}$ et $Fa_1 \xrightarrow{g} b$ iso des $\pi_0\mathcal{D}$ $\exists$ un iso f des $\pi_0\mathcal{C}$ tq $(\pi_0 F)(f) = g$.

$\pi_0 F$ est une isofibration.

<u>Thm</u> [Bergner] Il existe une structure modèle sur $\mathcal{C}at_\Delta$ où les équivalences faibles (resp fibrations) sont les équivalences de Dwyer-Kan (resp fib de Dwyer-Kan).

$\to$ Les cof sont les morphismes ayant la ppté de relèvement à gauche % Fib acyclique.

<u>Dém</u> (voir Bergner).

idée démontrer d'abord une structure modèle sur SC_O (catégories simpliciales ayant O pour classe d'objet).

→ Cette structure modèle est cofibrement engendrée et est propre - (à gauche et à droite).

→ les fibrants sont les catégories enrichies dans les complexes de Kan -
(ce sont des $(\infty,1)$-catégories au sens où catégories enrichies en $(\infty,0)$-catégories (quasi-groupoïdes = cx de Kan).

Retour sur les ensembles générateurs

$$\begin{aligned} \Delta &\to \mathrm{Cat}_\Delta \\ K &\mapsto uK \end{aligned}$$

: deux objets x et y

$$uK(x,y) = K$$
$$uK(x,x) = uK(y,y) = *$$
$$uK(y,x) = \emptyset$$

Cofibrations acycliques génératrices

(C1) $u(\partial\Delta^n) \to u(\Delta^n)$

(C2) $\emptyset \hookrightarrow d_{x,y}$

catégorie simpliciale avec un seul objet et $id_{x,y}$.

En effet

$$\begin{tikzcd} u(\partial\Delta^n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \\ u(\Delta^n) \arrow[r] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$\Leftrightarrow$ se donner x, y et

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}(x,y) \arrow[d] \\ \Delta^n \arrow[r] & \mathcal{D}(x,y) \end{tikzcd}$$

Donc $F \in \left(\mathcal{U}(\partial\Delta^n) \hookrightarrow \mathcal{U}(\Delta^n)\right)^{\boxtimes}$

$\iff \forall x, y \quad \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{D}(x,y)$ est une fibration de Kan.

C_2

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \\ \{*\} \arrow[r] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_0 \arrow[d, "F_0"] \\ * \arrow[r] & \mathcal{D}_0 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ F est surjective sur les objets ...??

$\Rightarrow$ à compléter ...

<u>Enfin</u> : Berger–Moerdijk (2013)
"On the hpy theory of enriched categories"
Donnent des conditions sur V
pour avoir une structure modèle sur Cat_V.
(V-catégories)
$\to$ les équivalences soient des équivalences
de Dwyer-Kan –