Cours du mercredi 31/03/21
Chapitre 2 - Simplicial categories

2- Catégories monoidales modèles
$(\mathcal{V}, \otimes, \mathbb{1})$
pushout-product axiom
$\Rightarrow$ $\mathcal{V} \times \mathcal{M} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{M}$ est un bifoncteur de Quillen à gauche. Sous l'hypothèse que $X \otimes -$ admet un adjoint à droite.
$\Rightarrow$ $\forall$ f cof, g cof $\Rightarrow$ $f \otimes g$ est une cofibration
il faut avoir l'hypothèse $\emptyset \otimes X \simeq \emptyset$ où $\emptyset$ est l'objet initial dans $\mathcal{V}$. On a $\emptyset \otimes X \simeq \emptyset$ car $X \otimes -$ préserve les colimites.
Hovey définit les catégories monoidales modèles en supposant que la structure monoidale est fermée.
Ex dans le cas cartésien, $(\otimes = \times)$
si $\forall u, v$ $u \times v$ est une cof (lorsque u et v le sont) et une cof acyclique (lorsque u et v le sont) alors $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \xrightarrow{\times} \mathcal{V}$ est Quillen à gauche.
(objectif est d'avoir $\mathcal{V} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{ho}(\mathcal{V})$ est lax monoidale).
Prop $(\hat{\Delta}_{Joyal})$ est cartésienne.
$(\hat{\Delta}_{Kan})$ aussi.
- On rappelle que si u et v sont des monos $u \square v$ aussi est donc $u \times v$ aussi.
(si de plus u anodyne alors $u \square v$ aussi).
- On a : Si u et v sont des équivalences catégoriques faibles alors $u \times v$ aussi.

Dém : rappel $u : X \to Y$ $v : A \to B$

$u \in W_{cat} \iff \forall Z$ quasicatégorie $Z^u : Z^Y \to Z^X$ est une équivalence catégorique.

$u \times v : X \times A \xrightarrow{u \times id} Y \times A \xrightarrow{id \times v} Y \times B$.

il suffit de mq $u \times id \in W_{Cat}$ (par symétrie).

Soit Z une quasicatégorie.

$(u \times id)^* : \underbrace{Z^{Y \times A}} \to Z^{X \times A}$.

en simplicial $\forall n$ $(Z^{Y \times A})_n = \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(Y \times A \times \Delta^n, Z)$
$= \mathrm{Hom}_{\hat{\Delta}}(Y \times \Delta^n, Z^A) = (Z^A)^Y$.

[vrai dans le cas cartésien fermé
$\underline{\mathrm{hom}}(X \times Y, Z) \simeq \underline{\mathrm{hom}}(X, \underline{\mathrm{hom}}(Y, Z))$
iso dans V

flèche de V

$(u \times id)^*_Z = (u^*)_{Z^A} : (Z^A)^Y \to (Z^A)^X$

Or on a vu que si Z est une quasicatégorie alors Z^A aussi.

Donc $(u^*)_{Z^A}$ est une équivalence catégorique $\boxtimes$

Cl $(\hat{\Delta})_{Joyal} \xrightarrow{\gamma} ho_J(\hat{\Delta})$ on inverse les W_{cat}

est lax monoidal.

3 - Structure modèle de Bergner sur Cat_Δ.

- équivalences faibles sont les DK-équivalences
  $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \in W_{DK} \iff hF : h\mathcal{C} \to h\mathcal{D}$
  est une $\mathcal{H}$-équivalence (de catégories enrichies)
  $\mathcal{H} = ho(\hat{\Delta}_{Kan})$.

$\iff$ (W_1) $\forall x, y \in Ob(\mathcal{C})$ $\mathcal{C}(x,y) \xrightarrow{F_{x,y}} \mathcal{D}(x,y)$
est une équivalence d'homotopie faible.

(W2) $\quad \pi_0 \mathcal{C} \xrightarrow{\pi_0 F} \pi_0 \mathcal{D}$ est une équivalence de catégorie

$\iff$ (W1) et (W'2) $\quad \pi_0 F \xrightarrow{\pi_0 F} \pi_0 \mathcal{D}$ est essentiellement surjective.

- DK-fibration $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

(F1) $\quad \forall x, y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ $\quad F_{xy}$ est une fibration de Kan.

(F2) $\quad \pi_0 F$ est une isofibration.

<u>Prop</u> : $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une DK-Fibration triviale ($F \in W_{DK} \cap \mathrm{Fib}_{DK}$)

$\iff$ (WF1) $\forall x, y \in \mathcal{C}$ $\quad F_{xy}$ est une fibration triviale

(WF2) $\quad \pi_0 F$ est surjective sur les objets.

ce qui "justifie" que un ensemble de cofibrations génératrices est donné par

C1 : $\quad \mathfrak{U}(\partial \Delta_n) \to \mathfrak{U}(\Delta^n)$

C2 : $\quad \emptyset \hookrightarrow dx_y$

<u>Dém</u> : On a l'équivalence

$$(W1) \cap (W2) \cap (F_1) \cap (F_2) = (WF1) \cap (WF2)$$

- Si $\pi_0 F$ est une équivalence de catégories et une isofibration alors $\pi_0 F$ est surjective sur les objets.

$\underbrace{\pi_0 F}_{G} : \pi_0 \mathcal{C} \to \pi_0 \mathcal{D}$.

$Gc \xrightarrow[g]{\sim} d$ (car essentiellement surj)

$\exists f \in \pi_0 \mathcal{C}(c, c')$ tq $Gf = g$ (car isofibration) donc $d = Gc'$.

- On va mq $(WF_1) \cap (WF_2) \subseteq (W_1) \cap (W_2) \cap (F_1) \cap (F_2)$

On a clairement $(WF_1) \subseteq (W_1) \cap (F_1)$.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tq $\pi_0 F$ est surj sur les objets et $\forall x, y$ $F_{xy} : \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{D}(x,y)$ est une fib triviale (de Kan).

$\Rightarrow$ $G := \pi_0 F : \pi_0 \mathcal{C} \to \pi_0 \mathcal{D}$ est une équivalence de catégories

Il reste donc à mq $\pi_0 F$ est une isofibration.

On se donne $Gc \xrightarrow{g} d$ un iso dans $\pi_0 \mathcal{D}$

$\exists$ c' tq $d = Gc'$ (G surj sur les objets).

$G_{cc'} : \pi_0 \mathcal{C}(c,c') \to \pi_0 \mathcal{D}(Gc, Gc' = d)$ est une bijection. Donc $\exists !$ $f : c \to c'$ tq $Gf = g$. L'unicité permet de dire que si g est un iso il en est de même pour f.

Cqfd G est une isofibration. $\boxtimes$

Quelques propriétés de Cat_Δ muni de la structure modèle de Bergner.

Prop Cat_Δ est propre à droite.

Rem $\hat{\Delta}_{Kan}$, $\hat{\Delta}_{Joyal}$ sont propres à gauche car tous les objets sont cofibrants. $Top_{Quillen}$ est propre à droite car tous les objets sont fibrants. Ici on n'est dans aucun des deux contextes.

Dém

$$\begin{tikzcd} Z \times_Y X \arrow[r, "?\ k"] \arrow[d, "h"', "\text{fib}"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "\text{fib}", "f"'] \\ Z \arrow[r, "\text{DK-eq}, g"'] & Y \end{tikzcd}$$

x

z $\quad$ $f(x)$

$g(z) \xrightarrow{J} f(x)$

MQ ? est une équivalence de Dwyer-Kan.

• (W1) est vérifié car $\hat{\Delta}_{Kan}$ est propre à droite.
• Montrons W'_2 : $\pi_0 k$ est essentiellement surjective.
L'équivalence $g(z) \xrightarrow{\sim} f(x)$ dans $\pi_0 Y$
se relève en une équivalence $x' \xrightarrow{\sim} x$ $= k(z, x')$
dans $\pi_0 X$.
Comme $f(x') = g(z)$ l'objet (z, x')
vivant dans $Z \times_Y X$ est envoyé par k sur x'
Cl $\pi_0 k$ est essentiellement surjective ☒

<u>Thm</u> $\mathcal{C}at_\Delta$ est aussi propre à gauche (voir Lurie)

Comparaison des avantages / inconvénients de
$\mathcal{C}at_\Delta$ vs $\hat{\Delta}_{Joyal}$ - (modèles pour les $(\infty,1)$-cat)

• Dans $\mathcal{C}at_\Delta$ on a des compositions strictes
$\mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \longrightarrow \mathcal{C}(x,z)$ avec unités
strictes.
• Les cofibrations ne sont pas faciles à décrire
mais on peut le faire (via des "simplicial computad" after Verity décrit dans le
livre de Bergner.
• La structure modèle est propre mais elle
n'est pas cartésienne.
<u>Ex</u>. $[1]$ catégorie simpliciale discrète $0 \to 1$.
est cofibrante. Car c'est $\mathfrak{C}(\Delta^1)$.
et $\mathfrak{C}(\emptyset) \subset \mathfrak{C}(\Delta^1)$ est une cofibration génératrice.
Si elle était cartésienne on devrait avoir
$[1] \times [1]$ est cofibrant dans $\mathcal{C}at_\Delta$.

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{C} \arrow[d, "p", "\wr"'] \\ {[1]\times[1]} \arrow[r, "g"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Fib triviale de Dwyer-Kan.

Se donner g $\Leftrightarrow$

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & a_2 \arrow[d, "v"] \\ b_1 \arrow[r, "\beta"'] & b_2 \end{tikzcd}$$

$u \in \mathcal{D}(a_1, b_1)_0$.

p vérifie : p est surjective sur les objets

$\forall\, x, y \in \mathcal{C}$ $\quad \mathcal{C}(x,y) \longrightarrow \mathcal{D}(px, py)$ est une fibration triviale. En particulier elle est surjective sur les 0-cellules.

On peut relever a_1, a_2, b_1, b_2 en objets de $\mathcal{C}$
u, α, v, β en morphismes de $\mathcal{C}_0$.
$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ mais ce qu'on obtiendra c'est uniquement $\tilde{v} \circ \tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta} \circ \tilde{u}$
homotope.

1) Il n'y a aucune raison à l'existence de relèvements tq $\tilde{v} \circ \tilde{\alpha} = \tilde{\beta} \circ \tilde{u}$.
[exo construire un contre-ex].

En particulier on ne peut pas continuer la procédure pour définir les $(\infty, 2)$-catégories comme des catégories enrichies dans Cat_Δ.

($(\infty,1)$-cat $=$ obj fibrants de Cat_Δ
$=$ Catégories enrichies dans les cx de Kan.
(on utilise le fait que $\hat{\Delta}_{\mathrm{Kan}}$ est cartésienne).

$\simeq$

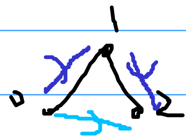
Dans $\hat{\Delta}_{\mathrm{Joyal}}$ (quasi cat $=$ objets fibrants)

- La composition n'est pas stricte

(l'espace de toutes les compositions possibles est un complexe de Kan contractile.

- Tous les objets sont cofibrants
- Est propre à gauche mais pas à droite.

$$\begin{array}{ccccc} & \partial\Delta^2 & \text{pas de wcof} & \Delta^{\{0,2\}} = \Delta^1 & \\ \text{fib} & \downarrow & \uparrow & \downarrow P & \text{fibration de Joyal} \\ & \Lambda^2_1 & \xrightarrow[\text{équivalence catégorique faible}]{} & \Delta^2 & \end{array}$$



$\Delta^1 = N(0 \to 1)$ $\Delta^2 = N(0 \to 1 \to 2)$

fibration interne.

c'est une isofibration.

$\forall Z$ quasi cat $\quad Z^{\Delta^2} \to Z^{\Lambda^2_1}$

fib triviale donc équivalence catégorique.

- Elle est cartésienne (montré en début de séance).

4 - Equivalence de Quillen

On va définir une adjonction

$$\mathfrak{C} : \hat{\Delta} \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathrm{Cat}_\Delta : N^\Delta$$

(nerf cohérent ou nerf simplicial)

Pour ce faire on va construire un objet cosimplicial des $\mathrm{Cat}\Delta$

$$\Delta \to \mathrm{Cat}_\Delta \ . \qquad [n] \mapsto \tilde{P}_n .$$

<u>Déf de $\tilde{P}_n$</u> : objets $0, 1, .., n$ (bijection avec $[n]$)

$\forall\ i \le j \qquad \tilde{P}_n(i,j) = N_\bullet(P_{ij})$.

est une quasi catégorie.

P_{ij} est le poset des sous ensembles de $\{i, i+1, \dots, j\}$ contenant i et j. $[\![i, j]\!]$

<u>Ex</u> $P_{23} = \{2,3\}$.

$P_{13} = \quad \{1,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$

$N_\circ(P_{13}) = N_\bullet([1]) = \Delta^1$.

P_{03} :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{0,1,3\} \arrow[dr] & \\ \{0,3\} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \{0,1,2,3\} \\ & \{0,2,3\} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$N_\circ(P_{03}) = N_\bullet([1]\times[1]) = \Delta^1 \times \Delta^1$.

On a $\quad \tilde{P}_n(i,j) \simeq (\Delta^1)^{\times(j-i-1)} \quad j > i$

$\simeq \Delta^0 \quad$ si $i = j$.

<u>Rem</u> $F : \tilde{P}_n \longrightarrow [n] \longleftarrow$ catégorie simpliciale discrète

F est l'identité sur les objets

$f_{ij} : \underbrace{\tilde{P}_n(i,j)}_{\text{contractile}} \to * \longleftarrow$ équivalence d'homotopie.

<u>On a</u> :

$\Delta \longrightarrow \mathrm{Cat}_\Delta \qquad$ est un foncteur

$[n] \longrightarrow \tilde{P}_n \qquad (\tilde{P}_n)$ est un objet cosimplicial des Cat_Δ.

$\varphi : [n] \to [m] \qquad \tilde{P}_n \xrightarrow{\varphi_*} \tilde{P}_m$.

$\qquad\qquad i \longmapsto \varphi(i)$

$\tilde{P}_n(i,j) = N_\bullet(P_{ij}) \longmapsto \tilde{P}_m(\varphi(i), \varphi(j))$

$= N_\bullet(P_{\varphi(i)\varphi(j)})$.

$$P_{ij} \longrightarrow P_{\varphi(i)\varphi(j)}$$
$$A \subseteq [\![i,j]\!] \mapsto \varphi(A) \subseteq [\![\varphi(i),\varphi(j)]\!].$$

<u>Ppté</u> : $\forall i,j$ $\tilde{P}_n(i,j)$ est une quasicatégorie,
$\forall \varphi:[n]\to[m]$ $\forall i,j$ $\tilde P_n(i,j) \to \tilde P_m(\varphi(i),\varphi(j))$
est une isofibration de quasicatégorie.

→ fibration interne

→ isofibration. (on a $\mathrm{Core}(\tilde P_m(\varphi(i),\varphi(j))) = \coprod_{\varphi(i)\le k\le\varphi(j)} \{k\}$.)

$\forall i,j,k$
$$\tilde P_n(j,k)\times\tilde P_n(i,j) \longrightarrow \tilde P_n(i,k)$$
$$(A, B) \longmapsto A\cup B.$$

⚠ $\{j,k\}, \{i,j\} \longmapsto \{i,j,k\}$.

$\{0,1\}$ $\{1,2\}$ $\longmapsto$ $\{0,1,2\}$

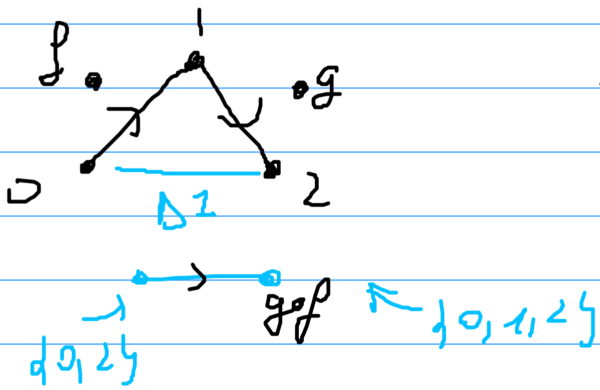
Ex

$\tilde P_0$: $\left\{\begin{array}{l}\text{un seul objet } 0.\\ \text{l'identité.}\end{array}\right.$ catégorie simpliciale terminale.

$\tilde P_1(0,1) = *$.

$\tilde P_1$: deux objets $0 \longrightarrow 1$ $\quad id^T \quad T\,id$ catégorie simpliciale discrète $C[1]$.

$\tilde P_2$:



$\tilde P_2(0,2) = N(P_{02}) = \Delta^1$.

<u>Déf</u> Soit $\mathcal{C} \in Cat_\Delta$ $N^\Delta(\mathcal C) = Hom_{Cat_\Delta}(\tilde P_n, \mathcal C)$

→ Donc lié à une adjonction

$$\mathfrak{C} : \hat{\Delta} \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathrm{Cat}_\Delta : N^\Delta$$

$$\Delta^n \longmapsto \tilde{P}_n$$

et $\forall S \in \hat{\Delta}$ $\quad S = \operatorname{colim}_{\Delta^n \to S} \Delta^m$

$\mathfrak{C}[S] = \operatorname{colim}_{\Delta^m \to S} \tilde{P}_n$ – (sauf que compliqué à calculer !!)

(voir l'exposé de Sylvain pour une autre description).

Petits calculs pour comprendre $N^\Delta(\mathcal{C})$
$= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}_\Delta}(\tilde{P}_n, \mathcal{C})$

$(N^\Delta(\mathcal{C}))_0 = \mathrm{ob}(\mathcal{C})$.

$(N^\Delta(\mathcal{C}))_1$: $\quad a \xrightarrow{f} b \qquad a,b \in \mathcal{C}$.
$f \in \mathcal{C}_0(a,b)$

$= (N(\mathcal{C}_0))_1$ –

$(N^\Delta(\mathcal{C}))_2$:

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & c \end{tikzcd}$$

$(g,f) \in \mathcal{C}_0(b,c) \times \mathcal{C}_0(a,c)$

$H \in \mathcal{C}_1(a,c)$

tq $d_0 H = g \circ f$

$h \xrightarrow{H} g\circ f$

Se donner un élément de $N(\mathcal{C}_0)_2$: $\quad \cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot \quad$ $\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "g"] & \\ \cdot \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & \cdot \end{tikzcd}$.

On vient de voir que
$$N^\Delta(\mathcal{C}) \neq N(\mathcal{C}_0).$$

En revanche

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Delta} \arrow[r, shift left, "\tau"] \arrow[rr, bend left, "\tau_1"] & \mathrm{Cat}_\Delta \arrow[l, shift left, hook', "N^\Delta"] \arrow[l, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift left, "\pi_0"] & \mathrm{Cat} \arrow[l, shift left, hook', "\iota"] \arrow[ll, bend left, "N"]
\end{tikzcd}$$

si C est une catégorie alors $N^\Delta(\iota C) = N(C)$.

<u>car</u> : $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}_\Delta}(\tilde{P}_n, \iota C) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\pi_0 \tilde{P}_n, C)$
$= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}([n], C)$
$= (NC)_n$.