Cours du mercredi 7/04/21 -

Chapitre 2 - catégories simpliciales

4- Equivalence de Quillen -

$\mathfrak{C} : \hat{\Delta} \rightleftarrows Cat_\Delta : N^\Delta$

$\tilde{P}_n$ la catégorie simpliciale dont les objets sont $0, 1, \dots, n$

et $\forall\, 0 \leq i < j \leq n$ $\tilde{P}n(i,j) = N_*(P_{ij})$

$\forall i > j$ $\tilde{P}(i,j) = \emptyset$

P_{ij} : prod des ss-ens de $\{i, i+1, \dots, j\} = [i,j]$ contenant i et j

Catégorie simpliciale
$\forall n, i, j$ $\tilde{P}n(i,j)$ est une quasi catégorie -

$N^\Delta(\mathcal{C})_n = \mathrm{Hom}_{Cat_\Delta}(\tilde{P}n, \mathcal{C})$ -

$\mathfrak{C}$ son adjoint à gauche - $\mathfrak{C}(\Delta^n) = \tilde{P}n$ -

Thm : Cette adjonction induit une équivalence de Quillen entre $\hat{\Delta}_{Joyal}$ et $Cat_{\Delta, Bergner}$ -

Rappel : on a vu que $p : X \to Y$ avec X et Y des quasicatégories est une fibration $\Leftrightarrow$ c'est une isofibration $\Leftrightarrow$ p a la pté de relèvement à droite % aux $\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n$ $0 < k < n$ et % à $I \hookrightarrow E^1 = N(0 \rightleftarrows 1)$.

Etapes de la dém

i) L'adjonction est une adjonction de Quillen

ii) $\forall f : S \to T \in \tilde{\Delta}$ $\quad f \in W_{Cat} \iff \mathcal{C}(f) \in W_{DK}$
équivalences
cat faibles

Rappel : Si $\mathcal{C}$ est une catégorie simpliciale
$\pi_0 \mathcal{C}$ est la catégorie qui a pour objet les mêmes que $\mathcal{C}$ et pour morphisme $(\pi_0 \mathcal{C})(a,y) = \pi_0(\mathcal{C}(a,y))$
$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \in W_{DK}$
$\iff \forall\, x, y \quad F_{xy} : \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{D}(x,y)$ w.h.e
et $\pi_0 F$ équivalence de catégories.

iii) La counité de l'adjonction
$\mathcal{C}(N^\Delta(C)) \longrightarrow C$ est une équivalence de DK.

"Démonstrations" i).

$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ est une adjonction de Quillen
$\iff F$ préserve les cof et cof acycliques
(exo - Hirschhorn)
$\iff$ F préserve les cof entre obj cofibrants et les cof acycliques
$\iff G$ préserve les fib entre objets fib et les fibrations acycliques.

Prop 1) $\mathcal{C}$ préserve les cofibrations
2) $\forall \quad F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \in \mathrm{Cat}_\Delta$
tq $\forall x,y \quad F_{xy}$ est une fib de Kan
alors $N^\Delta(F)$ est une mid fibration.
Corollaire immédiat : si $\mathcal{C} \in \mathrm{Cat}_\Delta$ est fibrant
($\iff \forall x,y \quad \mathcal{C}(x,y)$ est un complexe de Kan) alors

$N^\Delta \mathcal{C}$ est une quasicatégorie.

« Dém » – Démontrer que $\mathfrak{C}$ préserve les cofibrations $\iff$ démontrer que $\forall n$ $\mathfrak{C}(\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n)$ est une cofibration donc a la propriété de relèvement à gauche % tous les $p: \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ fibrations triviales (des Cat_Δ).

Rappel on a vu que dans Cat_Δ $Fib_{DK}\cap W_{DK}$: est constitué des $p: \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ tq $\forall x,y$ p_{xy} est une fib triviale (de Kan) et surjective sur les objets.

$n=0$.
$$\begin{tikzcd} \emptyset = \mathfrak{C}(\emptyset) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "p"] \\ * = \tilde{P}_0 = \mathfrak{C}(\Delta^0) \arrow[r] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$
admet un relèvement $\iff$ p surj sur les objets.

$n=1$
$$\begin{tikzcd} *\sqcup * = \mathfrak{C}(\partial\Delta^1 = *\sqcup *) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{P}_1 \quad \mathfrak{C}(\Delta^1) \arrow[r] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$a \qquad b$

$pa \xrightarrow{f} pb$

$f \in \mathcal{D}_0(pa,pb)$

$\tilde{P}_1$ cat simpliciale $c([1])$

où $c: Cat \longrightarrow Cat_\Delta$.

Le diagramme admet un relèvement $\iff$
$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{C}(a,b) \arrow[d] \\ \Delta^0 \arrow[r] & \mathcal{D}(pa,pb) \end{tikzcd}$$
admet un relèvement.

$n=2$
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(\partial\Delta^2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "p"] \\ \mathfrak{C}(\Delta^2) \arrow[r] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} \partial\Delta^2 \arrow[r] \arrow[d] & N^\Delta(\mathcal{C}) \arrow[d, "N^\Delta(p)"] \\ \Delta^2 \arrow[r] & N^\Delta(\mathcal{D}) \end{tikzcd}$$

Un élément de $\left(N^\Delta(\mathcal{D})\right)_2$

$\iff$ à la donnée

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Uparrow K_{ac}"] & & c \end{tikzcd}$$

où $K_{ac} \in \mathcal{D}(a,c)_1$
tq $d_0 K_{ac} = g\circ f$ et $d_1 K_{ac} = h$.

Comme précédemment on peut voir que un diagramme équivaut à la donnée de trois points $a, b, c \in \mathcal{C}$, 3 morphismes f, g, h comme ci-dessus et K_{ac} :

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d] \\ \Delta^1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathcal{D}(pa,pc) \end{tikzcd} \qquad \overset{h}{\bullet} \quad \overset{g\circ f}{\bullet} \qquad p(h) \xrightarrow[K_{pa,pc}]{} p(g\circ f)$$

Un tel relèvement existe
car $\mathcal{C}(a,c) \to \mathcal{D}(pa,pc)$ est une fibration triviale.

On peut se convaincre

Se poser la question d'un relèvement

$$(H) : \begin{tikzcd} \mathfrak{C}(\partial\Delta^n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "p"] \\ \mathfrak{C}(\Delta^n) \arrow[r] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

équivaut à se poser la question d'un relèvement

$$\begin{tikzcd} \partial(I^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}(a_0, a_n) \arrow[d] \\ I^{n-1} \arrow[r] & \mathcal{D}(pa_0, pa_n) \end{tikzcd}$$

en effet (H) $\Leftarrow$

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d] & N^\Delta \mathcal{C} \arrow[d, "N^\Delta(p)"] \\ \Delta^n \arrow[r] & N^\Delta \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Comme $sk_{n-1}(\partial\Delta^n) = sk_{n-1}(\Delta^n)$
il suffit de considérer l'image de la cellule non dégénérée de Δ^n - (un chemin de taille n de 0 à n -
$(N^\Delta \mathcal{D})_n = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}_\Delta}(\tilde{P}_n, \mathcal{D})$

Ce qui nous importe est $\varphi : \tilde{P}_n(0,n) \to \mathcal{D}(pa_0, pa_n)$
$$\tilde{P}_n(0,n) = N_*(P_{0n}) \simeq I^{n-1}.$$

Pour conclure comme $\forall a,b$ $\mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(pa,pb)$ est une fib acyclique on a le relèvement puisque $\partial I^{n-1} \to I^{n-1}$ est un mono -

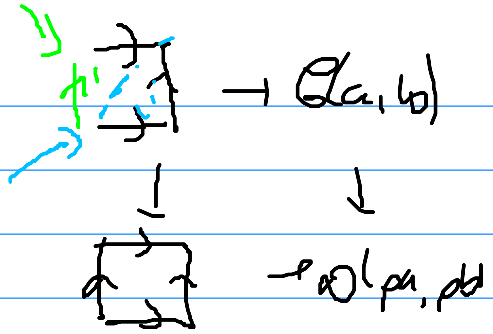
De manière similaire (faire le cas $n=3$) on peut mq se poser la question d'un relèvement % $\mathcal{C}(\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n)$ revient à se poser la question de relèvement de type :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{C}(a,b) \arrow[d] \\ I^{n-1} \arrow[r] & \mathcal{D}(pa,pb) \end{tikzcd}$$

anodyne.

cornet externe $\Lambda^2_2 \to \Delta^2$

<u>Ex</u>. $\Lambda^3_1 \hookrightarrow \Delta^3$ (~)



$$\Lambda^2_1 \downarrow \Delta^2$$

Si $\forall$ a,b $\mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(pa,pb)$ est une fibration de Kan, un tel relèvement existe. ☒

Reste à démontrer que $p : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \in Fib_{DK}$ entre objets fibrants alors :

$N^\Delta \mathcal{C} \xrightarrow{N^\Delta p} N^\Delta \mathcal{D}$ est une isofibration

comme on vient de mq $N^\Delta \mathcal{C}$ est une quasi-cat et que $N^\Delta p$ est une mid-fibration il suffit de mq

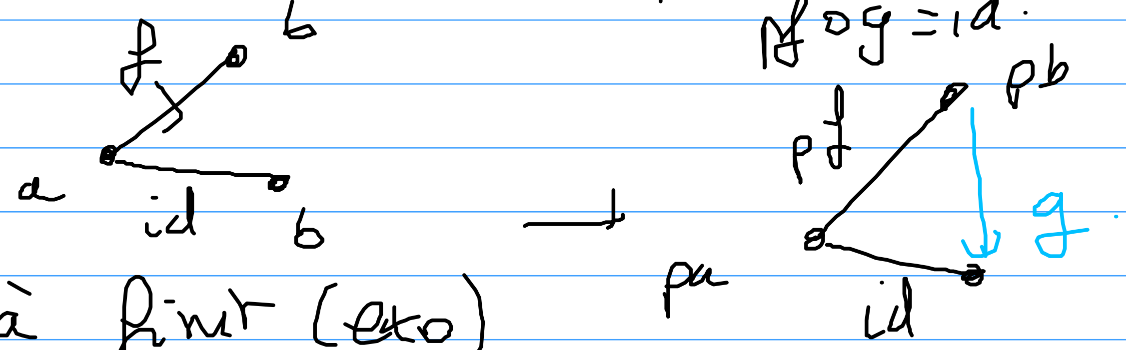
$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & N^\Delta(\mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^1 & \longrightarrow & N^\Delta(\mathcal{D}) \end{array}$$

admet un relèvement.

et pf est inversible.

$\exists g \in \mathcal{D}(b,a)_1$ tq $g \circ pf = id$

$pf \circ g = id$.



à finir (exo)

Et $\mathfrak{C} : \widehat{\Delta} \rightleftarrows \mathrm{Cat}_\Delta : N^\Delta$ est une adjonction de Quillen.

- La plus grosse difficulté dans la preuve de l'équivalence est que la counité de l'adjonction : $\forall\, C$ fibrant des Cat_Δ.

$$\mathfrak{C}\left(N^\Delta(C)\right) \longrightarrow C$$

cofibrant

cofibrant

est une équivalence de DK.

- [Dugger – Spivak – Chapitre – de Lurie 1.1.5.13 chapitre 2].

Chapitre 3 - Des catégories modèles aux $(\infty,1)$-catégories.

1) Pb de théorie des ensembles.

- Notion d'ensemble dans un univers de Grothendieck.
- Il faut rajouter aux axiomes ZFC de la théorie classique un axiome supplémentaire qui permet de dire que tout ensemble appartient à un univers de Grothendieck.

→ si $\mathcal{U}$ est un univers on va parler de petite catégorie dans cet univers.
→ cela permet de faire toutes les constructions que l'on veut quitte à changer d'univers $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ et passer à l'univers $\mathcal{V}$.

Les constructions faites : notion de catégorie, notion de quasicatégorie, d'ensemble simpliciaux et de catégories simpliciales sont valables dans n'importe quel univers. (voir Lurie).

2) Catégories modèles simpliciales

Déf $\mathcal{C}$ est une cat modèle simpliciale si
- cat modèle
- $\in \mathrm{Cat}_\Delta$.

" powered-copowered sur $\hat{\Delta}$ ".

$\exists \quad \hat{\Delta} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
$\quad K, X \mapsto K \otimes X$.

et $\quad \hat{\Delta}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.
$\quad K, X \mapsto X^K$

Tel que (MC6) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K \otimes X, Y) \in \hat{\Delta}$
$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y^K) \in \hat{\Delta}$.

(MC7) $\forall\, i : A \hookrightarrow B$ cofibration des $\mathcal{C}$
et $p : X \to Y$ fib.

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(B, X) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A, X) \times_{\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A,Y)} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(B, Y)$$

est une fib de Kan
triviale si i ou p WE.

Dans ce cas là on a une bonne notion de morphismes homotopiques.

$$\mathrm{Map}^h_{\mathcal{C}}(X, Y) := \underbrace{\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X^c, Y^f)}_{\in \hat{\Delta}}$$

si $\mathcal{C}$ est une cat modèle simpliciale alors

$\forall X, Y$ $\mathrm{Map}^h_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un complexe de Kan.

$\mathrm{ho}_\infty \mathcal{C}$ la catégorie simpliciale fibrante ($(\infty,1)$-catégorie) dont les objets sont les mêmes que $\mathcal{C}$ et les morphismes sont $\mathrm{Map}^h_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\gamma"'] & \underset{(\infty,1)\text{-cat}}{\mathrm{ho}_\infty(\mathcal{C})} \arrow[r, "\pi_0"] & \mathrm{ho}\mathcal{C}.
\end{tikzcd}$$

Une catégorie simpliciale modèle donne lieu à une $(\infty,1)$-catégorie $\mathrm{ho}_\infty(\mathcal{C})$ tq sa catégorie homotopique $\pi_0 \mathrm{ho}_\infty(\mathcal{C})$ est la catégorie homotopique $\mathrm{ho}\mathcal{C} = \mathcal{C}[W^{-1}]$

De plus elle vérifie une propriété universelle (qui relève au niveau ∞-catégorique la propriété universelle de $\mathrm{ho}\mathcal{C}$).

Mais on n'a pas toujours des catégories modèles simpliciales pour

À main

3 — Localisation simpliciale —

On se donne $\mathcal{C}$ une catégorie et W une classe de morphismes à inverser.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\infty\text{-Functor}"'] & & \mathcal{C}[W^{-1}] \\ & \mathrm{Ho}_\infty \mathcal{C} \arrow[ur, "\pi_0"'] & \end{tikzcd}$$

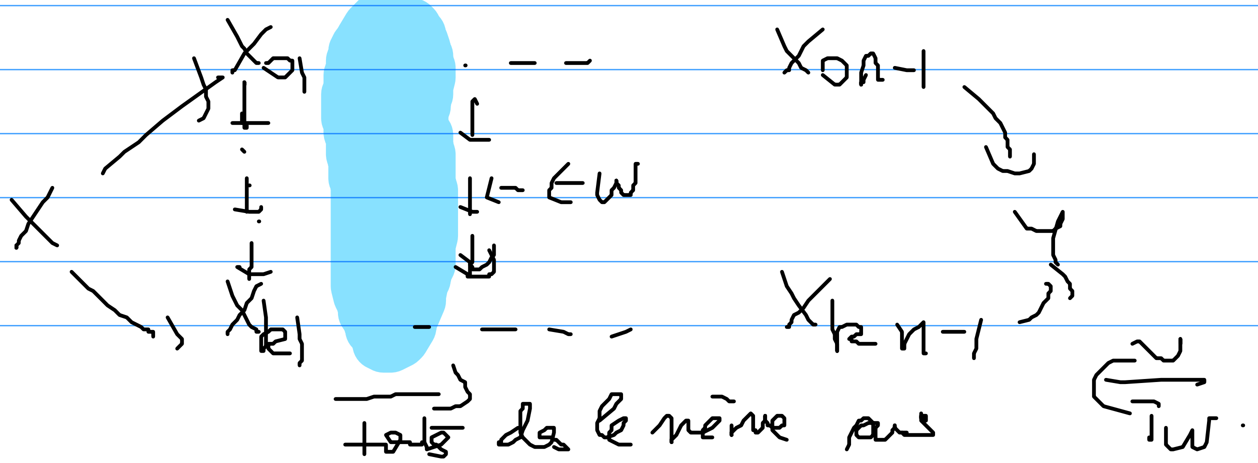
On va choisir le modèle $(\infty,1)$-donné par les catégories simpliciales —

Deux approches différentes —

Hammock localization de Dwyer-Kan $\mathcal{C}, W$.

$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$L_W^H(\mathcal{C})(X,Y)_k$:



→ fournit une catégorie simpliciale –

Dwyer-Kan on démontré que si on part d'une catégorie modèle on peut se restreindre aux hammocks de longueur 3.

$$X \xleftarrow[\in W]{} C_{\bullet 1} \longrightarrow C_{\bullet 2} \xleftarrow[\in W]{} Y.$$

<u>Prop</u>. $\forall X, Y$ $L^H_W(\mathcal{C})(X,Y)$ est un complexe de Kan. donc $(\infty,1)$-catégorie

<u>Thm</u> $\pi_0(L^H_W(\mathcal{C})) \simeq H_0(\mathcal{C}) = \mathcal{C}[W^{-1}]$

⇝ autre construction utilisant la résolution simpliciale de catégorie.

$$\mathrm{Cat} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \text{Graphes orientés}$$

monade – $\eta : 1 \to UF$.
$\varepsilon : FU \to 1$.

$$(F\mathcal{C})_n = (FU)^{n+1}\mathcal{C} \xrightarrow[\text{appliquer } \varepsilon]{} (FU)^n\mathcal{C}.$$

fournit une catégorie simpliciale

$$(L_W \mathcal{C})_n = (F\mathcal{C})_n[(FW)_n^{-1}]$$

catégorie simpliciale - Fibrante -

<u>Thm</u> Les $(\infty,1)$ catégories

$L_W\mathcal{C}$, $L_W^H\mathcal{C}$ sont DK-équivalents

et à $\mathcal{C}$ est modèle simpliciale

elles sont DK équivalente à $Ho_\infty\mathcal{C}$.

Dans ce contexte

$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ une

adjonction de Quillen

donne lieu à une adjonction

$\mathbb{L}F : Ho(\mathcal{C}) \rightleftarrows Ho(\mathcal{D}) : RG$

qui se relève en

$LF : Ho_\infty(\mathcal{C}) \rightleftarrows Ho(\mathcal{D})_\infty : RG$

adjonction d'$(\infty,1)$-catégories -

Une équivalence de Quillen induit une équivalence de DK entre les $(\infty,1)$ catégories.

4 - Réciproque ?

Dugger a démontré que toute

- catégorie modèle combinatoire $\mathcal{C}$ (cof engendrée + accessible) a une présentation.

$\exists$ A une petite catégorie, S

$\mathcal{C}$ est Quillen équivalente à

$$\mathrm{Fun}(A^{op}, \hat{\Delta})_{proj}[S^{-1}].$$

<u>Cor</u> Toute cat modèle combinatoire est Quillen équivalente à une catégorie modèle simpliciale.

Lurie a étendu cela aux $(\infty,1)$ catégories

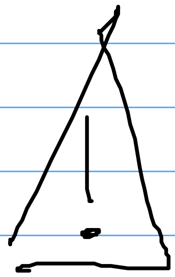
Toute $(\infty,1)$ catégorie accessible est DK équivalente à une $\mathrm{Loc}(\mathcal{C})$ pour une certaine catégorie modèle $\mathcal{C}$.

" cat modèle " $\longrightarrow$ " $(\infty,1)$-cat "

"Cat is $(\infty,1)$-cat." models

Q_s $(\infty,1)$-cat —

$\hat{\Delta}_J$ $\qquad$ Cat_{Δ}, Bergner.



$\hat{\Delta}_{Kan} \rightleftarrows Top$.