HIGHER QUASI-CATEGORIES VS HIGHER REZK SPACES

(Dimitri Ara)

⇝ Introduire une notion d'n-qcat, $n \geq 1$,
↳ Via Cisinski – Joyal

C-J ont conjecturé : Θ_n-localisateur engendré par un type d'app° de Segal supérieur
$\Longrightarrow$ Modèle pour (∞, n)-cat.

⇝ Ara donne quelques modifications pour que ça fonctionne
↳ Ajout de générateurs (principalement les mêmes que pour les Θ_n-espaces de Rezk.)

⇝ Possible de comparer n-qcat et Θ_n-esp. de Rezk.
↳ Introduire quelques outils :
– Théorie que Cisinski développe (dans [Cis])

- Théorie que Cisinski développe (dans [Cis])
  ↳ A-localisateur
  ↳ Complétion simplicial
- Travaux de Joyal-Tierney : Q-cat vs Segal Spaces
  ↳ Deux equivalence de Quillen entre q-cat et CSS

Plan :

1) A-localisateurs et complétion simpliciale

1.1) La théorie de Cisinski des A-localisateurs

1.2) La complétion simpliciale

1.3) Les catégories de modèles verticales et horizontales

1.4) Espaces formels de Rezk.

2) Les n-quasi-catégories

2.1) La notion d'Ara des n-quasi-catégories

2.2) Aperçu informel des Θ_n-espaces de Rezk

2.3) Les générateurs pour le localisateur des n-quasi-catégories.

2.3) Les générateurs pour le localisateur des n-quasi-catégories.

2.4) Nerf des n-catégories strictes et n-quasi-catégories.

3) Comparaison entre les Θ_n-espaces de Rezk et les n-quasi-catégories.

1) A-localisateur et complétion simpliciale

1.1) La théorie de Cisinski des A-localisateurs

Résultat principal :

"Le localisateur des Θ_n-espaces de Rezk est la complétion simplicial du localisateur des n-quasicatégories."

$\rightsquigarrow$ Introduisons le langage nécessaire

Modèle cellulaire : $M \subset \mathrm{Mono}_{\hat{A}}$ & $\overline{M} = \mathrm{Mono}_{\hat{A}}$

Fibration triviale : $f \in \mathrm{Mono}_{\hat{A}}^{\perp} \Leftrightarrow f \in M^{\perp}$

Exemple : $\{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}_{n\geq 0} \subset \hat{\Delta} \rightsquigarrow \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}_{n\geq 0}^{\perp}$ = Fibration de Kan acyclique.

Exemple: $\{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}_{n\geq 0} \subset \hat{\Delta} \rightsquigarrow \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n\}_{n\geq 0}^{\perp}$ = Fibration de Kan acyclique.

Définition: (A- Localisateur)

Soit A une catégorie et $W \subset \mathrm{Mor}(\hat{A})$. W est un A-localisateur si

Loc 1: 2 parmi 3

Loc 2: $\mathrm{Mono}_A^{\perp} \subset W$

Loc 3: $\mathrm{Mono}_A \cap W$ stable par push out et composition transfinie

Les éléments de W sont les W-équivalences.

On notera - $W(S)$ le localisateur engendré par une classe $S \subset \mathrm{Mor}(\hat{A})$.

$\bigcap_{S\subset W} W$

↳ Si S est un ensemble $\rightsquigarrow$ $W(S)$ est accessible.

- W est cartésien si W est stable par produit binaire.

Résultat important de Cisinski:

Résultat important de Cisinski :

Théorème (1.4.3 de [Cis])

$A \in \mathcal{C}at$ et $W \subset \mathrm{Mor}(\hat{A})$, on a l'équivalence

i) W est un A-localisateur accessible

ii) $(\hat{A}, W, \mathrm{Mono}_{\hat{A}}, (W \cap \mathrm{Mono}_{\hat{A}})^{\perp})$ catégorie de modèle cofibrement engendrée

On appelle cette structure la structure de W-catégorie modèle.

Ara montre un résultat analogue :

Proposition : (2.7, Ara)

Soit $W \subset \mathrm{Mor}(\hat{A})$ un A-localisateur accessible, alors on a l'équivalence

i) W est cartésien

ii) $W \cap \mathrm{Mono}_{\hat{A}}$ est stable par produit binaire

iii) La structure de W-catégorie de modèle est cartésien fermé.

Remarque : Si $F : \hat{A} \to \hat{A'}$ un foncteur qui respect les produit binaire et W, W' des A et A'-localisateur tel que $F^{-1}(W') = W$ alors

W' cartésien $\Rightarrow$ W cartésien.

$\rightsquigarrow$ Étendre la théorie des extensions anodyne aux catégories $\hat{A}$.

↳ Notion d'intervalle

Définition : (Intervalle)

Soit $A \in \mathcal{C}at$, un intervalle sur $\hat{A}$ est un tuplet $\mathbb{J} = (J, \partial^0, \partial^1)$ où :

- $J \in \hat{A}$
- $\partial^0, \partial^1 : e_{\hat{A}} \to J$.

On notera
- $\{\varepsilon\}$, pour $\varepsilon = 0, 1$, l'image de $\partial^\varepsilon : e_{\hat{A}} \to J$
- $\partial J = \{0\} \cup \{1\}$
- $\delta_J : \partial J \to J$
- $\partial^\varepsilon_X := \partial^\varepsilon \times id_X : X \to X \times J$, $\forall X \in \hat{A}$.

- $\partial^\varepsilon_X := \partial^\varepsilon \times id_X : X \longrightarrow X \times \mathbb{J}$, $\forall X \in \hat{A}$.

On dira que $\mathbb{J}$ est - séparant si $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset_{\hat{A}}$

- injectif si $\mathbb{J} \to e_{\hat{A}}$ est une fibration triviale

__Exemple:__ - $I = [0,1]$ dans Top
- Δ^1 dans Δ.
- $\{0 \to 1\}$ dans Cat.

$\emptyset_\Pi \longrightarrow e_\Pi \overset{\partial^0}{\underset{\partial^1}{\rightrightarrows}} \mathbb{J}$ ← égalisateur

__Remarque__: Possible de définir un intervalle dans toute catégorie admettant un objet final + initial pour séparant.

Axiomes pour les extensions I-anodyne : On fixe un intervalle séparant $\mathbb{I}$

__Définition:__ (Extension $\mathbb{I}$-anodyne)

$A_n \subset \mathrm{Mono}_{\hat{A}}$ classe d'extension $\mathbb{J}$-anodyne si

__AN1__: $A_n = \overline{S}$, S un ensemble

__AN2__: Pour tout $U \to V \in \mathrm{Mono}_{\hat{A}}$ et $\varepsilon = 0,1$, $U \times \mathbb{J} \cup V \times \{\varepsilon\} \to V \times \mathbb{I} \in A_n$

Définition : (Extension J-anodyne)

$An \subset Mono_{\hat{A}}$ classe d'extension J-anodyne si

AN1 : $An = \overline{S}$, S un ensemble

AN2 : Pour tout $U \to V \in Mono_{\hat{A}}$ et $\varepsilon = 0, 1$, $U \times J \cup V \times \{\varepsilon\} \to V \times J \in An$

AN3 : Pour tout $U \to V \in An$, $U \times J \cup V \times \partial J \to V \times J \in An$

$\rightsquigarrow$ Classe d'extension J-anodyne engendré ?

$\hookrightarrow$ Construction inductive :

Pour $T \subset Mono_{\hat{A}}$ on note $\Lambda_J(T) = \{ X \times J \cup V \times \partial J \to V \times J,\ U \to V \in T \}$.

- Pour un ensemble de mono S dans $\hat{A}$:

$$\Lambda_J^0(S) = S \quad \text{et} \quad \Lambda_J^{k+1}(S) = \Lambda_J(\Lambda_J^k(S))$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda_J^\infty(S) = \bigcup_{k \geq 0} \Lambda_J^k(S).$$

$$\Rightarrow \Lambda_J^\infty(S) = \bigcup_{k\geq 0} \Lambda_J^k(S).$$

$\rightsquigarrow$ Pour $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\hat{A}$

$$An_J(S) = \overline{\Lambda_J^\infty(S) \cup \{U\times J \cup V\times\{\varepsilon\} \longrightarrow V\times J,\ U\to V\in\mathcal{M} \text{ et } \varepsilon=0,1\}}$$

classe des (S,J)-extensions anodyne.

Terminologie :
- $f\in\hat{A}$ est une (S,J)-fibration naïve si $f\in An_J(S)^\perp$
- $X\in\hat{A}$ est dit (S,J)-fibrant si $X\to e_{\hat{A}}\in An_J(S)^\perp$.

On peut alors énoncer le théorème suivant

<u>Théorème</u> : $S\subset \mathrm{Mono}_{\hat{A}}$ et $f:X\longrightarrow Y\in\hat{A}$ tel que Y est W-fibrant pour $W_S=W(S)$. Alors f est une W-fibration si et seulement si f est une (S,J)-fibration naïve.

$\Rightarrow$ X est W-fibrant $\iff$ X est (S,J)-fibrant.

$\Rightarrow$ X est W-fibrant $\Leftrightarrow$ X est (S,J)-fibrant.

<u>Remarque</u> : X est (S,J)-fibrant est indépendant de J.

1.2) Complétion simpliciale

On veut s'intéresser aux objets de la forme $A^{op} \to \hat{\Delta}$

$\hookrightarrow$ $Hom(A^{op}, \hat{\Delta}) \simeq \widehat{A \times \Delta} \simeq Hom(\Delta^{op}, \hat{A})$.

On fixe un A-localisateur W. Les projections

$$A \xleftarrow{p} A \times \Delta \xrightarrow{q} \Delta$$

induisent $\hat{A} \xrightarrow{p^*} \widehat{A \times \Delta} \xleftarrow{q^*} \hat{\Delta}$

p^* et q^* admettent des adjoints à gauche et à droite

$\Rightarrow$ Préservent les limites et colimites

$\Rightarrow$ Préservent les monos.

$i_0^* : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \hat{A}$ tel que $p^* \dashv i_0^*$ est induit par

$i_0^* : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A}$ tel que $p^* \dashv i_0^*$ est induit par

$$\begin{aligned} i_0 : A &\longrightarrow A \times \Delta \\ a &\longmapsto (a,[0]). \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Deux choix canoniques d'équivalences sur $\widehat{A \times \Delta}$:

<u>Définition</u> : (Équivalence verticale et horizontale)

$f : X \longrightarrow Y \in \widehat{A \times \Delta}$.

- On dit que f est une équivalence horizontale si

$$f_{\cdot,n} : X_{\cdot,n} \longrightarrow Y_{\cdot,n} \in W \quad , \forall n \geq 0$$

W_{hor} = Classe des équivalences horizontales

- On dit que f est une équivalence verticale si

$$f_{a,\cdot} : X_{a,\cdot} \longrightarrow Y_{a,\cdot} \in W_\infty \quad , \forall a \in A$$

W_{vert} = Classe des équivalences verticales

<u>Remarque</u> : Si W est accessible $\Longrightarrow$ W_{hor} et W_{vert} sont des $(A \times \Delta)$-localisateurs accessible

existence d'une structure injective

Remarque : Si W est accessible $\Longrightarrow$ W_{hor} et W_{vert} sont des $(A\times\Delta)$-localisateurs accessible

existence d'une structure injective pour les catégories de modèle combinatoire

↝ Complétion simpliciale de W :

$$W_\Delta = W\left(W_{hor} \cup \{ X \times q^*(\Delta') \longrightarrow X,\ X \in \widehat{A\times\Delta} \}\right)$$

Proposition : (2.3.24 [Cis])

Si W est un A-localisateur accessible $\Longrightarrow$ W_Δ est un $\widehat{A\times\Delta}$-localisateur accessible.

↝ Première équivalence de Quillen importante :

Proposition : Si W est accessible alors l'adjonction

$$W\text{-cat mod} \quad p^* : \hat{A} \underset{\perp}{\rightleftarrows} \widehat{A\times\Delta} : i_0^* \quad W_\Delta\text{-cat mod}$$

est une équivalence de Quillen.

Remarque : p^* préserve les produits binaires + $p^{*-1}(W_\Delta) = W$

Remarque : p^* préserve les produit binaire + $p^{*-1}(W_\Delta) = W$

$\rightsquigarrow$ W_Δ cartésien $\Rightarrow$ W cartésien.

Pour la deuxième équivalence : Construire une adjonction via extension de Kan.

$D : \Delta \longrightarrow \hat{A}$ un objet cosimplicial dans $\hat{A}$

$\Rightarrow$ On note $D_n = D([n])$.

$\rightsquigarrow$ On peut former le foncteur

$$\begin{aligned} D : A \times \Delta &\longrightarrow \hat{A} \\ (a, [n]) &\longmapsto \underline{a} \times D_n. \end{aligned}$$

$\hat{A}$ cocomplète + $A \times \Delta$ petite $\Rightarrow$ Existence d'extension de Kan à gauche

$\rightarrow$ Induit l'adjonction

$$\mathrm{Real}_D : \widehat{A \times \Delta} \rightleftarrows \hat{A} : \mathrm{Sing}_D$$

$$\mathrm{Real}_{\mathcal{D}} : \widehat{A\times\Delta} \rightleftarrows \hat{A} : \mathrm{Sing}_{\mathcal{D}}$$

où $\mathrm{Sing}_{\mathcal{D}}(X)_{a,n} = \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\underline{a}\times \mathcal{D}_n, X)$.

Condition pour que cela soit une équivalence de Quillen :

<u>Définition</u> : (Résolution W-cosimpliciale)

$\mathcal{D} : \Delta \to \hat{A}$ est une résolution W-cosimpliciale si

i) $\mathcal{D}_0 \amalg \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathcal{D}_1 \in \mathrm{Mono}_{\hat{A}}$, induit par $\delta_1 : \partial\Delta^1 \to \Delta^1$

ii) $X \times \mathcal{D}_n \longrightarrow X \in W$, $\forall X \in \hat{A}$

<u>Exemple</u> : Si $i_A : A \to \mathcal{C}at$, $a \mapsto A/a$, alors $N_A\Delta : \Delta \longrightarrow \hat{A}$, $[n] \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(i_A(-), [n])$

est une résolution W-cosimpliciale.

Dans ce cas on a bien :

Théorème : Si W est accessible et $\mathcal{D}$ une résolution W-cosimpliciale

Théorème : Si W est accessible et $\mathcal{D}$ une résolution W-cosimpliciale alors l'adjonction

$$\mathrm{Real}_{\mathcal{D}} : \widehat{A \times \Delta} \rightleftarrows \widehat{A} : \mathrm{Sing}_{\mathcal{D}}$$

est une équivalence de Quillen.

1.3) Catégorie de modèle verticale et horizontale

Push out product et Pullback power → Catégorie de préfaisceaux quelconque.

$A, B \in \mathcal{C}at$, on note

$$- \square - : \widehat{A} \times \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A \times B}$$
$$(X, Y) \longmapsto (X \square Y)_{a,b} = X_a \times Y_b.$$

$X \in \widehat{A}, Y \in \widehat{B}$

↳ • $X \square - : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A \times B}$ ⇝ adjoint à droite :

$$X \backslash - : \widehat{A \times B} \longrightarrow \widehat{B}$$
$$Z \longmapsto (X \backslash Z)_b = \mathrm{Hom}_{\widehat{A \times B}}(X \square \underline{b}, Z)$$

• $- \square Y : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times B}$ ⇝ adjoint à droite

• $- \square Y : \hat{A} \longrightarrow \widehat{A \times B}$ $\leadsto$ adjoint à droite

$$-/Y : \widehat{A \times B} \longrightarrow \hat{A}$$

$$Z \longmapsto (Z/Y)_a = \mathrm{Hom}_{\widehat{A\times B}}(a \square Y, Z)$$

$\Rightarrow$ Permet de former les morphismes suivants :

Soient $u : U \to V \in \hat{A}$, $v : S \to T \in \hat{B}$ et $f : X \to Y \in \widehat{A \times B}$.

- $u \square' v : U \square T \coprod_{U \square S} V \square S \longrightarrow V \square T$
- $\langle u \backslash f \rangle : V \backslash X \longrightarrow V \backslash Y \times_{U \backslash Y} U \backslash X$
- $\langle f / v \rangle : X/T \longrightarrow Y/T \times_{Y/S} X/S$

Même construction que pour $\hat{\Delta}$.

Propriété de relèvement est toujours vérifiée :

<u>Proposition</u> : $u \in \hat{A}$, $v \in \hat{B}$ et $f \in \widehat{A \times B}$

$$(u \square' v) \perp f \iff u \perp \langle f/v \rangle \iff v \perp \langle u \backslash f \rangle.$$

$\rightsquigarrow$ Ce qui nous intéresse : $B = \Delta$

$\hookrightarrow$ Caractériser les fibrations triviales de $\widehat{A \times \Delta}$.

$\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\hat{A}$

$$\Longrightarrow \mathcal{M}_\Delta = \left\{ \delta \square \delta_n : U \square \Delta^n \coprod_{U \square \partial\Delta^n} V \square \partial\Delta^n \longrightarrow V \square \Delta^n,\ \delta : U \to V \in \mathcal{M},\ n \geq 0 \right\}.$$

est un modèle cellulaire de $\widehat{A \times \Delta}$ (Lemme 2.3.2 [Cis])

où $\delta_n : \partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$.

<u>Proposition</u>: $f \in \widehat{A \times \Delta}$ est une fibration triviale si f vérifie les conditions équivalentes :

1) $\forall \delta \in \mathcal{M}$, $\langle \delta \backslash f \rangle$ est une fibration triviale
2) $\forall u \in \mathrm{Mono}_{\hat{A}}$, $\langle u \backslash f \rangle$ est une fibration triviale

$\Big\}$ Dans $\hat{\Delta}$.

3) $\forall n \geq 0$, $\langle f / \delta_n \rangle$ est une fibration triviale
4) $\forall v \in \mathrm{Mono}_{\hat{\Delta}}$ $\langle f / v \rangle$ est une fibration triviale

$\Big\}$ Dans $\hat{A}$.

Formalisme des catégories de Reedy :

Formalisme des catégories de Reedy :

(A, A_-, A_+, d) est une catégorie de Reedy si $A_-, A_+ \subset A$ et $d : Ob(A) \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifient :

<u>RC1</u> : - Si $a \to a' \in A_+$, n'est pas l'identité alors $d(a) < d(a')$.
- Si $a \to a' \in A_-$, n'est pas l'identité alors $d(a) > d(a')$.

<u>RC2</u> : $\forall f \in A$ il existe une unique factorisation $f = f_+ \circ f_-$, avec $f_+ \in A_+$ et $f_- \in A_-$.

↳ A est Reedy squelettique si

<u>RC3</u> : Tout morphisme de A_- admet une section. $f = f'$ si ils ont les même sections.

↳ A est Reedy squelettique régulière si

<u>RC4</u> : $\forall f \in A_+$, $f \in Mono_{\hat{A}}$.

On notera, pour $a \in A$, ∂a le sous-préfaisceau

$$\partial a = \bigcup_{\substack{u : a' \to a \\ \in A_+}} \mathrm{Im}(u)$$

$\Rightarrow \delta_a : \partial a \hookrightarrow \underline{a}$

Remarque : $\{\delta_a, a \in A\}$ est un modèle cellulaire de $\hat{A}$.

$\rightsquigarrow$ Fait important :

Proposition (8.2.9 et 3.4.37 de [Cis])

Si A est Reedy squelettique régulière alors

W_Δ est engendré par W_{hor} et W_{vert}.

Ce qui permet de montrer le théorème suivant

Théorème : (Reedy, Kan) (2.6 [Joyal-Tierney])

- La classe W_{vert} est un $(A \times \Delta)$-localisateur accessible

<u>Théorème</u> : (Reedy, Kan) (2.6 [Joyal-Tierney])

- La classe W_{vert} est un $(A\times\Delta)$-localisateur accessible
- Les fibrations de la structure W_{vert}-catégorie modèle sont les $f \in \widehat{A\times\Delta}$ tel que $\langle \delta_a \backslash f \rangle$ est une fibration de Kan, $\forall a \in A$.
- La structure de W_{vert}-catégorie modèle est propre, simpliciale et cartésien fermée.

$\rightsquigarrow$ La structure de modèle associé à W_{vert} est la structure de modèle verticale et les fibrations sont les fibrations verticale.

↳ Caractérisation des fibrations verticales :

<u>Proposition</u> : $f \in \widehat{A\times\Delta}$ est une fibration verticale si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

1) $\forall a \in A$, $\langle \delta_a \backslash f \rangle$ est une fibration de Kan
2) $\forall u \in \mathrm{Mono}_{\hat{A}}$, $\langle u \backslash f \rangle$ est une fibration de Kan

$\Big\}$ Dans $\hat{\Delta}$.

1) $\forall a \in A$, $\langle \delta_a \backslash f \rangle$ est une fibration de Kan
2) $\forall u \in Mono_{\hat{A}}$, $\langle u \backslash f \rangle$ est une fibration de Kan

Dans $\hat{\Delta}$.

3) $\forall n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, $\langle f / h_n^k \rangle$ est une fibration triviale

Dans $\hat{A}$.

4) Pour toute extension anodyne simpliciale v, $\langle f / v \rangle$ est une fibration triviale

où $h_n^k : \Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$.

↳ On s'est servi de W_{vert} pour une structure de modèle sur $\widehat{A \times \Delta}$

$\Rightarrow$ On peut faire de même avec W_{hor}.

<u>Théorème</u> : - W_{hor} est un $\widehat{A \times \Delta}$-localisateur accessible.

- Les fibrations de la structure de W_{hor}-catégorie modèle sont les $f \in \widehat{A \times \Delta}$ tel que

$\langle f / \delta_n \rangle$ soit une W-fibration, $\forall n$.

$\rightsquigarrow$ La structure de modèle associé à W_{hor} est la structure de

Théorème : - W_{hor} est un $\widehat{A \times \Delta}$-localisateur accessible.

- Les fibrations de la structure de W_{hor}-catégorie modèle sont les $f \in \widehat{A \times \Delta}$ tel que

$$\langle f/\delta_n \rangle \text{ soit une } W\text{-fibration}, \forall n.$$

⇝ La structure de modèle associé à W_{hor} est la structure de modèle horizontale et les fibrations sont les fibrations horizontales.