

# Espaces formels de Rezk

A-catégorie de Reedy squelettique,  $J$  intervalle injectif séparant

But:  $A$ -loc accessible  $W \rightsquigarrow (A \times \Delta)$ -loc accessible  $W_{\text{Rezk}}$  (localisation des  $A$ -espaces formels de Rezk)

tg si  $A$  régulière alors  $W_{\Delta} = W_{\text{Rezk}}$   
ie on retrouve la completion simpliciale.

Définition On se donne  $W = W(S)$  un  $A$ -loc accessible

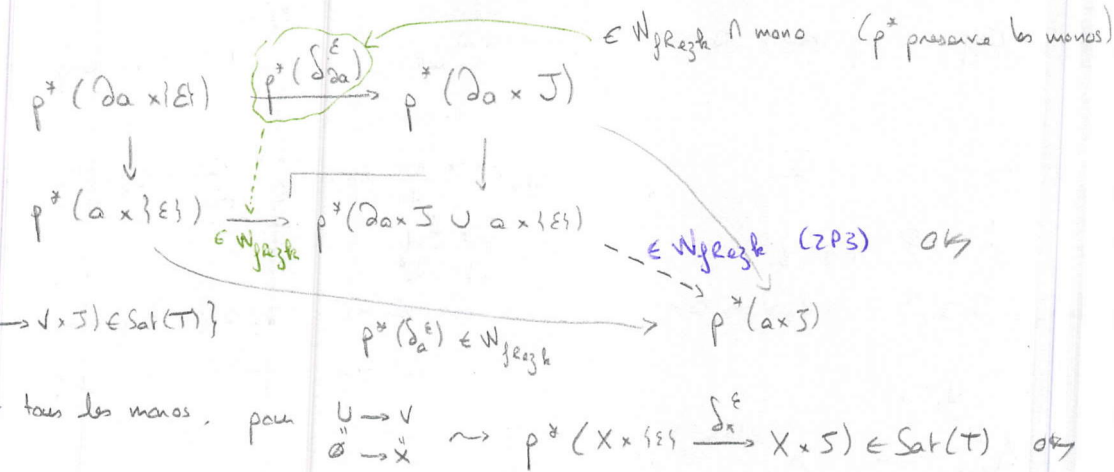
$$W_{\text{Rezk}} := W \left[ W_{\text{vat}} \cup p^*(S) \cup \underbrace{\left\{ p^*(X \times J \rightarrow X), X \in \hat{A} \right\}}_{\text{peut être remplacé par}} \right] \rightsquigarrow \text{structure modèle sur } \widehat{A \times \Delta}$$

obj fib:  $A$ -espaces formels de Rezk

- $W_{\text{Rezk}}$  accessible
- \*  $W_{\text{vat}}$  accessible ok
  - \*  $p^*(S)$  accessible ok

\* on montre qu'on peut remplacer  $\{p^*(\partial_x^E)\}$  par  $T := \left\{ p^*(\partial_a \times J \cup_{\partial_a \times \{E\}} a \times \{E\} \rightarrow a \times J), a \in A, E = 0, 1 \right\}$  ok

- \*  $T \in W_{\text{Rezk}}$ :
- \*  $p^*$  adj à gauche, préserve les colims  $\rightsquigarrow$
- \*  $p^*(\partial_x^E) \in \text{Sat}(T)$
- \*  $\{U \rightarrow V \in \hat{A} / p^*(U \times J \cup_{U \times \{E\}} V \times \{E\}) \rightarrow V \times J \in \text{Sat}(T)\}$
- \* est saturé
- \* contient  $\partial_a \rightarrow a \rightsquigarrow$  contient tous les monos, pour  $\begin{matrix} U \rightarrow V \\ \partial \rightarrow \tilde{x} \end{matrix} \rightsquigarrow p^*(X \times \{E\} \xrightarrow{\partial_x^E} X \times J) \in \text{Sat}(T)$  ok



Théorème: Si  $A$  (Reedy squelettique) est régulière.  $W_{\text{Rezk}} = W_{\Delta}$

Corollaire: On a les équivalences de Quillen

$$p^*: \hat{A} \xrightleftharpoons{\perp} \widehat{A \times \Delta} : i_0^*$$

$$\text{Real}_{\Delta}: \widehat{A \times \Delta} \xrightleftharpoons{\perp} \hat{A} : \text{Sing}_{\Delta} \quad (\text{pour } \Delta \xrightarrow{\Delta} \hat{A} \text{ une résolution cosimpliciale})$$

pour la structure des  $A$ -espaces formels de Rezk sur  $\widehat{A \times \Delta}$

# Preuve du théorème:

•  $W_{\text{vert}} \subseteq W_{\text{Regk}}$ , pour  $X \in \widehat{A \times \Delta}$ .  $X$  Regk formel  $\implies X$  verticalement fib.

on admet:  $X$  Regk formel  $\iff$    
 ①  $X$  verticalement fib.   
 ②  $\forall u \in (S, J)$ -an  $u \times X$  fib triviale   
 $\iff$  ②  $\forall u \in \text{mono}_{\Delta}$ ,  $X/u$   $(S, J)$  fib naïve.

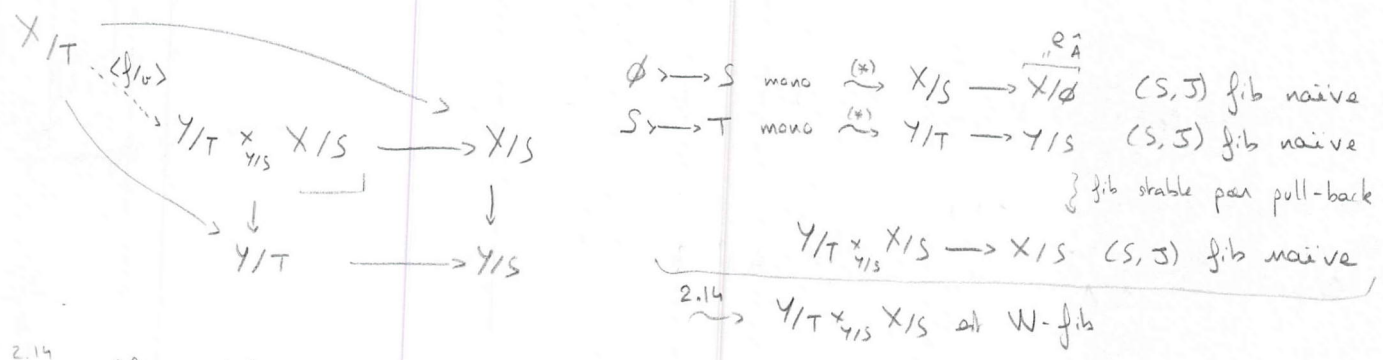
• On rappelle,  $A$  régulière  $\rightsquigarrow W_{\Delta} = W[W_{\text{vert}} \cup W_{\text{hor}}$ ]

$W_{\text{vert}} \subseteq W_{\Delta}$  ok   
 $S \subseteq W \rightsquigarrow p^*(S) \subseteq p^*(W) \subseteq W_{\text{hor}} \subseteq W_{\Delta}$  ok   
 $\{X \times J \rightarrow X, X \in \widehat{A}\} \subseteq W \rightsquigarrow \{p^*(X \times J \rightarrow X), X \in \widehat{A}\} \subseteq p^*(W) \subseteq W_{\Delta}$  ok   
 (car  $J$  injectif ie  $J \rightsquigarrow *$ )   
 $\rightsquigarrow W_{\text{Regk}} \subseteq W_{\Delta}$

$W_{\text{vert}} \subseteq W_{\text{Regk}}$  ok   
 $W_{\text{hor}} \subseteq W_{\text{Regk}} ?$    
 $\rightsquigarrow W_{\Delta} \subseteq W_{\text{Regk}}$    
 $\rightsquigarrow W_{\text{Regk}} = W_{\Delta}$    
 il reste à montrer ça!

$F = \text{id}: \widehat{A \times \Delta}_{\text{hor}} \xrightarrow{\cong} \widehat{A \times \Delta}_{\text{Regk}}: \text{id} = G$  si adj de Quillen  $\rightsquigarrow F$  preserve les cof  $\xrightarrow{\text{cof}} \xrightarrow{\text{cof}}$ ,  $\#$  obj de  $F$  cof   
 $\rightsquigarrow W_{\text{hor}} \subseteq W_{\text{Regk}}$    
 $F$  preserve les cof (= mono)   
 $G$  preserve les fib entre objets fib.  $\leftarrow$  à montrer

on rappelle,  $f$  fib hor ssi  $\forall u \geq 0 \langle f/u_n \rangle$   $W$ -fib ssi  $\forall u$  mono,  $\langle f/u \rangle$   $W$ -fib   
 Il suffit donc de montrer:  $X \xrightarrow{f} Y$  fib verticale entre espace de Regk formels  $\rightsquigarrow \langle f/u \rangle$   $W$ -fib   
 $S \xrightarrow{u} T$  mono de  $\widehat{\Delta}$



$\xrightarrow{2.14} \langle f/u \rangle$   $W$  fib ssi  $\langle f/u \rangle$   $(S, J)$  fib naïve   
 ssi  $u \in \# \langle f/u \rangle \forall u \in (S, J)$ -an ssi  $u \in \# \langle u/f \rangle \forall u \in (S, J)$ -an   
 ssi  $\forall u \in (S, J)$ -an,  $\langle u/f \rangle$  fib triviale

Soit  $U \xrightarrow{u} V \in (S, J)$ -an, mq  $\langle u/f \rangle$  fib triviale   
 •  $f$  fib verticale  $\xrightarrow{2.14} \langle u/f \rangle$  fib de Kan   
 •  $U \xrightarrow{u} V$  an  $\rightsquigarrow$   $V \times U \rightarrow U \times U$  fib triviale  $\rightsquigarrow V \times_{U \times U} U \times U \rightarrow U \times U$  fib triviale   
 $\rightsquigarrow \langle u/f \rangle$  equiv faible ok

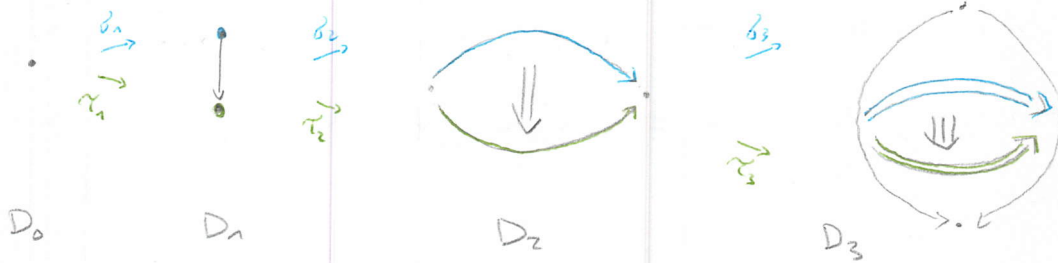
# Construction des n-quasi-cat.

## Catégorie des n-graphes

$G_n$ :  $D_0 \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} D_1 \xrightarrow[\tau_2]{\sigma_2} \dots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} D_n$  + relations  $\left| \begin{array}{l} \sigma_{i+1} \sigma_i = \tau_{i+1} \sigma_i \\ \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \end{array} \right.$

$\hookrightarrow \widehat{G}_n$  cat des n-graphes:  $X_0 \xrightleftharpoons[t_n]{\sigma_n} X_1 \xrightleftharpoons[t_2]{\sigma_2} \dots \xrightleftharpoons[t_n]{\sigma_n} X_n$   $\left| \begin{array}{l} \sigma_{i-1} \sigma_i = \sigma_{i-1} \tau_i \\ \tau_{i-1} \sigma_i = \tau_{i-1} \tau_i \end{array} \right.$   $\leftarrow \begin{array}{l} \sigma_i \text{ et } \tau_i \\ \text{sont parallèles} \end{array}$

Yoneda  $\leadsto$  on voit  $G_n$  comme sous-cat pleine de  $\widehat{G}_n$



Entre  $D_i$  et  $D_j$  ( $j > i$ ) il y a exactement deux flèches:  $\left| \begin{array}{l} \sigma_i^j : D_i \xrightarrow{\sigma_{i+1}} D_{i+1} \xrightarrow{\dots} D_j \\ \tau_i^j : D_i \xrightarrow{\tau_{i+1}} D_{i+1} \xrightarrow{\dots} D_j \end{array} \right.$

$\widehat{G}_n \xrightleftharpoons[u_n]{L_n} n\text{Cat}$  (striches)

$G_n \xrightarrow{\gamma} \widehat{G}_n \xrightarrow{L_n} n\text{Cat}$

$\leadsto$  on voit  $G_n$  comme sous-cat pleine de  $n\text{Cat}$

objet co-n-globulaire:

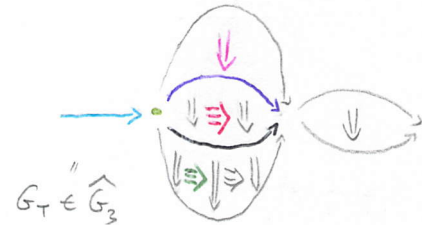
$G_n \rightarrow \widehat{C}^{\text{cat}} \text{ glob}$

(pas de composition non triviale dans  $L_n(Y \in \mathcal{D}_n)$ )

ex:  $G_n \xrightarrow{\gamma} \widehat{G}_n \xrightarrow{L_n \circ \gamma} n\text{Cat}$

## Assemblage des n-cellules

un exemple informel:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$



$T = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & & & j_{m-1} \end{pmatrix}$   $i_k > j_k \leq i_{k+1}$

table de dimension  $\max(i_k)$   
de taille  $m$ .

$T$  de dim  $\leq n \longmapsto G_T \in \widehat{G}_n \longmapsto L_n(G_T) \in n\text{Cat}$  est injective.

$\leadsto$  on définit  $\mathbb{Q}_n$  comme la sous-cat pleine de  $n\text{Cat}$  ayant pour objets les  $L_n(G_T)$ ,  $T$  table de dim  $\leq n$

Rq on identifie  $T = L_n(G_T) \in \mathbb{Q}_n$

# Somme globulaire

•  $G_n \xrightarrow{F} C$  un objet co-n-globulaire

→ somme globulaire de T dans C :  $S_T(C) = \text{colim} \left( \begin{array}{c} F(D_{i_n}) \\ \swarrow F(\sigma) \\ F(D_{j_n}) \end{array} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{c} F(D_{i_m}) \\ \swarrow F(\sigma) \\ F(D_{j_m}) \end{array} \right)$

• exemples :

$G_n \xrightarrow{\text{id}} G_n$ ,  $S_T(G_n)$  n'existe pas si taille de T > 1

$G_n \xrightarrow{Y} \hat{G}_n$ ,  $S_T(\hat{G}_n) = G_T$  (peut être pris comme définition de  $G_T$ )

$G_n \xrightarrow{L_n \circ Y} n\text{Cat}$ ,  $S_T(n\text{Cat}) = L_n(G_T) = T$  (car  $L_n$  préserve les colimites)

• plus d'exemples :  $G_n \rightarrow n\text{Cat}$  induit  $G_n \rightarrow \mathbb{H}_n$  puis  $G_n \rightarrow \hat{\mathbb{H}}_n$

$G_n \rightarrow \mathbb{H}_n$ ,  $S_T(\mathbb{H}_n) = T \in \mathbb{H}_n$  (car  $\mathbb{H}_n$  sous-cat pleine de  $n\text{Cat}$ )

$G_n \rightarrow \hat{\mathbb{H}}_n$ ,  $S_T(\hat{\mathbb{H}}_n) \stackrel{\text{def}}{=} I_T \leftarrow \underline{T\text{-spine}}$

$\left| \begin{array}{l} I_T \in \hat{\mathbb{H}}_n, U \in \mathbb{H}_n \mapsto \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{H}_n}(U, T) \text{ tq } \text{Im} f \text{ contenue dans une seule cellule de } T\} \\ T \in \hat{\mathbb{H}}_n, U \in \mathbb{H}_n \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{H}_n}(U, T) \end{array} \right.$

morphisme canonique :  $I_T \xrightarrow{i_T} T$  (appelé aussi T-spine)

## Spécialisation à $n=1$ .

•  $T \in \mathbb{H}_1$ ,  $T = \begin{pmatrix} & \xrightarrow{m} \\ 1 & \dots & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  déterminé par sa taille

$L_1(G_T) = \rightarrow \dots \rightarrow = [m] \in \text{Cat}$ ,  $\begin{array}{c} \mathbb{H}_1 \\ \cong \\ \Delta \end{array} \rightarrow \text{Cat} = \begin{pmatrix} S_T(\mathbb{H}_1) = T \in \mathbb{H}_1 \\ S_T(\Delta) = [m] \in \Delta \end{pmatrix}$

•  $S_T(\hat{\Delta}) = I_m \in \hat{\Delta}$  on retrouve le n-spine usuel

$\begin{pmatrix} I_T \xrightarrow{i_T} T \in \hat{\mathbb{H}}_1 \\ I_m \rightarrow \Delta[m] \in \hat{\Delta} \end{pmatrix}$

## Nerf

•  $\mathbb{H}_n \xrightarrow{i} n\text{Cat}$  cocomplet



$\xi_n$  extension de  $\text{Kan}$  à gauche (unique extension de  $i$  à  $\hat{\mathbb{H}}_n$  qui est cocomplete)  
 $N_n(\mathcal{E}) = \text{Hom}_{n\text{Cat}}(i(-), \mathcal{E})$  n-nerf

Rq : pour  $n=1$ , on retrouve  $\xi_1 = N$  nerf usuel

• résultats admis :

- \*  $\xi_n$  préserve les produits finis ] purement formels
- \*  $N_n$  est pleinement fidèle
- \*  $\mathbb{H}_n$  est Reedy squelettique régulière

Ref : Clemens Berger : A cellular nerve for higher categories  
 Berger, Rezk : Reedy categories and the  $\mathbb{H}$ -construction

# Structure modèle des n-quasi-catégories

$$J_1: \bullet \rightleftarrows \bullet$$

$$J_2: \bullet \begin{array}{c} \uparrow \\ \parallel \\ \downarrow \end{array} \bullet$$

$$J_3: \bullet \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \parallel \\ \downarrow \end{array} \right) \bullet$$

$J_n$ : une n-flèche inversible

$$d_1^0 \left( \begin{array}{c} \downarrow j_1 \end{array} \right) d_1^1$$

$$d_2^0 \left( \begin{array}{c} \downarrow j_2 \end{array} \right) d_2^1$$

$$d_3^0 \left( \begin{array}{c} \downarrow j_3 \end{array} \right) d_3^1$$

$$D_0: \bullet$$

$$D_n: \bullet \longrightarrow \bullet$$

$$D_2: \bullet \begin{array}{c} \downarrow \\ \parallel \\ \downarrow \end{array} \bullet$$

$j_k$  identifie les deux  $(k-1)$  flèches  $\Rightarrow$  de  $J_k$   
 envoie la  $k$ -flèche inversible sur l'identité

$d_k^0, d_k^1$  sont les uniques sections de  $j_k$

Notation:  $J_n \xrightarrow{j^E} D_0$  sera noté  $J \xrightarrow{j} * \in \text{Cat}$

## (ii) - localisateurs

$$I_n := \{ I_T \xrightarrow{i_T} T, T \in \mathcal{O}_n \}$$

$$f_n := \{ N_n(J_k) \xrightarrow{N_n(j_k)} N_n(D_{k-1}), 2 \leq k \leq n \}$$

$\leadsto W_{\text{Cat}_n}$  un  $\mathcal{O}_n$ -localisateur  
 obj fib: n-quasi-cat

on ne prend pas en compte  $j=j$   
 car  $N_n(j)$  est une fib triviale donc  $\in$  à tout localisateur

Rq On peut remplacer  $f_n$   
 par  $f_n' := \{ N_n(D_{k-1}) \xrightarrow{N_n(j_k^E)} N_n(J_k), 2 \leq k \leq n, E=0,1 \}$

$W_{\text{Cat}_n} = W_{\text{foyal}}$   $\Rightarrow$  pour  $n=1$  on retrouve la structure de foyal,  $\hat{\Delta}_{\text{foyal}} = (\hat{\mathcal{O}}_1)_{\text{Cat}_1}$

preuve:

$I_1 = \{ \text{spines} \}, f_1 = \emptyset \leadsto W_{\text{Cat}_1} = W[\text{spines}]$

un résultat général de cat modèles: (E.1.10 foyal, The theory of quasi-categories and its applications)  
 [une structure modèle est entièrement déterminée par ses cofibrations and its applications] / [ses objets fibrants.]

ici:  $\mathcal{C}_{\text{Cat}_1} = \mathcal{C}_{\text{foyal}} = \text{mono}$ , il reste à montrer que quasi-cat = 1-quasi-cat

①  $\{ \text{spines} \} \subseteq W_{\text{foyal}} \leadsto W_{\text{Cat}_1} = W[\text{spines}] \subseteq W_{\text{foyal}} \leadsto \text{quasi-cat} \subseteq 1\text{-quasi-cat}$

②  $\{ \text{cornets intrus} \} \subseteq W[\text{spines}] = W_{\text{Cat}_1} \leadsto \{ \text{cornets intrus} \} \subseteq (\mathcal{C}_{\text{ac}})_{\text{Cat}_1} \leadsto 1\text{-quasi-cat} \subseteq \text{quasi-cat}$

□

• preuve des résultats techniques ① et ② :

On vérifie les pushouts suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 I_{n-1} & \longrightarrow & I_n \\
 \downarrow \textcircled{A} & & \downarrow \\
 \Delta[n-1] = \partial_n \Delta[n] & \longrightarrow & I_n \cup \partial_n \Delta[n]
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 I_{n-1} \cup \partial_{n-1} \Delta[n-1] & \longrightarrow & I_n \cup \partial_n \Delta[n] \\
 \downarrow \textcircled{B} & & \downarrow \\
 \partial_0 \Delta[n] & \longrightarrow & \partial_0 \Delta[n] \cup \partial_n \Delta[n] \\
 \Delta[n-1] & \xrightarrow{d_0} & \Lambda_n^{1, \dots, n-1}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_{n-1}^{\overline{S}} & \xrightarrow{d_3^*(s)} & \Lambda_n^{S \cup \{s\}} \\
 \downarrow \textcircled{C} & & \downarrow \\
 \Delta[n-1] & \xrightarrow{d_3} & \Lambda_n^S
 \end{array}$$

avec  $S \neq S \cup \{s\} \subseteq \{1, \dots, n-1\}$

①: récurrence avec ③ :  $\forall k, \Lambda_n^{1, \dots, k} \in \Delta[n]$  mid-an  
 $\rightsquigarrow \Lambda_n^{1, \dots, n-1}$  mid-an

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Lambda_n^{1, \dots, n-1} & \longrightarrow & \Lambda_n^{1, \dots, n-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Lambda_n^{1, 2} \longrightarrow \Lambda_n^1 \longrightarrow \Delta[n] \\
 \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & \uparrow \\
 \Lambda_{n-1}^{1, \dots, n-2} & \longrightarrow & \Delta[n-1] & & & & \Lambda_{n-1}^1 & \longrightarrow \Delta[n-1]
 \end{array}$$

récurrence avec ② :  $I_n \cup \partial_n \Delta[n] \in \Delta[n]$  mid-an

récurrence avec ① :  $I_n \in \Delta[n]$  mid-an  $\in W$  focal  $\Rightarrow$

②: ①  $\rightsquigarrow I_n \in I_n \cup \partial_n \Delta[n] \in W[\text{spines}]$

$\rightsquigarrow I_n \in \Lambda_n^{1, \dots, n-1} \in W[\text{spines}]$

$$\begin{array}{ccc}
 I_{n-1} \longrightarrow I_{n-1} \cup \partial_{n-1} \Delta[n-1] \longrightarrow I_n \cup \partial_n \Delta[n] \\
 \downarrow \textcircled{2P3} \quad \downarrow \textcircled{B} \quad \downarrow \\
 \Delta[n-1] \longrightarrow \Lambda_n^{1, \dots, n-1} \rightsquigarrow I_n \cup \partial_n \Delta[n] \in \Lambda_n^{1, \dots, n-1} \in W[\text{spines}]
 \end{array}$$

récurrence: si  $\forall S, \Lambda_{n-1}^S \in \Delta[n] \in W[\text{spines}]$

$$\begin{array}{ccccccc}
 I_n & \longrightarrow & \Lambda_n^{1, \dots, n-1} & \xrightarrow{\in W[\text{spines}]} & \Lambda_n^? & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \Lambda_n^S \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda_n^{\emptyset} \longrightarrow \Delta[n] \\
 \in W[\text{spines}] & & \in W[\text{spines}] & & \uparrow & & \uparrow & \in W[\text{spines}] \\
 & & & & \text{HR} + \textcircled{C} & & \textcircled{2P3} & \\
 & & & & & & & \in W[\text{spines}]
 \end{array}$$

$\rightsquigarrow \Lambda_n^S \in \Delta[n] \in W[\text{spines}]$   
 achève la récurrence  $\Rightarrow$

en particulier:  $\Lambda_n^{\emptyset} \in \Delta[n] \in W[\text{spines}]$ .

# Aperçu informel des $\mathbb{H}_n$ -espaces de Rezk

[ Rezk: A cartesian presentation of weak n-categories ]

•  $\widehat{A} \times \Delta \cong \widehat{\Delta}^{A^{op}} = \mathcal{P}Sh(A)$  préfaisceaux simpliciaux sur A

•  $\widehat{\mathbb{H}_0} \times \Delta \cong \widehat{\Delta}$  cx de Kan modèle d'( $\infty, 0$ )-cat

•  $\widehat{\mathbb{H}_1} \times \Delta \cong \mathcal{S}p$  CSS modèle d'( $\infty, 1$ )-cat

•  
•  
•

•  $\widehat{\mathbb{H}_n} \times \Delta \cong Sp^{\mathbb{H}_n^{op}} \xrightarrow{\text{dét}} \mathbb{H}_n Sp_{\infty}$  muni d'une structure modèle  
 obj fibrant:  $\mathbb{H}_n$ -espace de Rezk modèle d'( $\infty, n$ ) cat

•  $X \in \mathbb{H}_n Sp_{\infty}, \mathbb{H}_n^{op} \xrightarrow{X} Sp$

X est fibrant  $\Leftrightarrow$ ssi

• X fib pour la structure injective

• condition de Segal

(ex.  $n=2, X(\begin{smallmatrix} \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow \end{smallmatrix}) \rightarrow ) \xrightarrow{\sim} X(\begin{smallmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{smallmatrix}) \times_{X(\rightarrow)} X(\begin{smallmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{smallmatrix}) \times_{X(\cdot)} X(\rightarrow)$ )

• une condition de complétude

• Méthode systématique:

$M$  modèle (+ cond.)  $\rightsquigarrow M - \mathbb{H}_n Sp$  modèle  
 tq.  $\mathbb{H}_n Sp_{\infty} \rightsquigarrow \mathbb{H}_{n+1} Sp_{\infty}$

conjecture: Quillen equiv:  $M - \mathbb{H}_n Sp \xrightarrow{\sim} \underline{M-Cat}_{DK-equiv}$  (M modèle cartésien)

$\rightsquigarrow$  bonne notion d'( $\infty, n$ ) catégorie qui généralise les CSS

papier de Rezk  
 +  
 Appendice de Anra

La structure de modèle des  $\mathbb{H}_n$ -espace de Rezk provient du  $(\mathbb{H}_n \times \Delta)$ -localisateur:

$W_{Rezk_n} = [ W_{\text{vat}} \cup p^*(I_n) \cup \{ p^*(N_n(J) \xrightarrow{N_n(j)} N_n(D_0)) \} \cup p^*(f_n) ]$