Higher quasi-categories vs higher Rezk spaces

Cours spécialisé : Catégories supérieures - Muriel LIVERNET

Stiéphen, Gabriel et Coline

Plan

2. Les n-quasi-catégories

2.3 Les générateurs pour le localisateur des n-quasi-catégories

2.3 Les générateurs pour le localisateur des n-quasi-catégories

Définition

Le localisateur des n-quasi-catégories, noté W_{QCat_n}, est le Θ_n-localisateur engendré par

$$\mathcal{I}_n = \{i_T : I_T \to T; T \in Ob(\Theta_n)\} \quad et$$

$$\mathcal{J}_n = \{N_n(j_k) : N_n(J_k) \to N_n(D_{k-1}); 1 < k \leq n\}.$$

2.3 Les générateurs pour le localisateur des n-quasi-catégories

Définition

Le localisateur des n-quasi-catégories, noté W_{QCat_n}, est le Θ_n-localisateur engendré par

$$\mathcal{I}_n = \{i_T : I_T \to T; T \in Ob(\Theta_n)\} \quad \textit{et}$$

$$\mathcal{J}_n = \{N_n(j_k) : N_n(J_k) \to N_n(D_{k-1}); 1 < k \leq n\}.$$

On note $j := j_1$ et $J := J_1$.

- $N_n(j) : N_n(J) \to N_n(D_0)$ est une fibration trivial et donc appartient à tous les Θ_n-localisateurs.

2.3 Les générateurs pour le localisateur des n-quasi-catégories

Définition

Le localisateur des n-quasi-catégories, noté W_{QCat_n}, est le Θ_n-localisateur engendré par

$$\mathcal{I}_n = \{i_T : I_T \to T; T \in Ob(\Theta_n)\} \quad et$$

$$\mathcal{J}_n = \{N_n(j_k) : N_n(J_k) \to N_n(D_{k-1}); 1 < k \leq n\}.$$

On note $j := j_1$ et $J := J_1$.

- $N_n(j) : N_n(J) \to N_n(D_0)$ est une fibration trivial et donc appartient à tous les Θ_n-localisateurs.
- Aucun des morphismes de $\mathcal{J}_n$ n'appartient au Θ_n-localisateur engendré par $\mathcal{I}_n$.

Théorème (1. D. Ara, Corollary 6.21)

Soit k un entier tel que $1 < k \leq n$. Alors le morphisme

$$N_n(j_k) : N_n(J_k) \to N_n(D_{k-1})$$

n'est pas dans le Θ_n-localisateur engendré par $\mathcal{I}_n$.

On fixe un entier $n \geq 1$ et soit $i : \mathcal{C}at \to n\text{-}\mathcal{C}at$ le foncteur d'inclusion.

On fixe un entier $n \geq 1$ et soit $i : \mathcal{C}at \to n\text{-}\mathcal{C}at$ le foncteur d'inclusion.

Proposition

Le foncteur i admet un adjoint à gauche $t : n\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$ appelé foncteur de troncation et un adjoint à droite $t_r : n\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$ appelé foncteur de troncation à droite.

On fixe un entier $n \geq 1$ et soit $i : \mathcal{C}at \to n\text{-}\mathcal{C}at$ le foncteur d'inclusion.

Proposition

Le foncteur i admet un adjoint à gauche $t : n\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$ appelé foncteur de troncation et un adjoint à droite $t_r : n\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$ appelé foncteur de troncation à droite.

Soit C une n-catégorie stricte. Alors

$t(C)$	Objets :	Ob(C)
	Flèches :	1-flèches de C modulo les 2-flèches

On fixe un entier $n \geq 1$ et soit $i : \mathcal{C}at \to n\text{-}\mathcal{C}at$ le foncteur d'inclusion.

Proposition

Le foncteur i admet un adjoint à gauche $t : n\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$ appelé foncteur de troncation et un adjoint à droite $t_r : n\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$ appelé foncteur de troncation à droite.

Soit C une n-catégorie stricte. Alors

$t(C)$	Objets :	Ob(C)
	Flèches :	1-flèches de C modulo les 2-flèches
$t_r(C)$	Objets :	Ob(C)
	Flèches :	1-flèches

L'adjonction $t : n\text{-}\mathcal{C}at \rightleftarrows \mathcal{C}at : i$ se restreint en une adjonction $t : \Theta_n \rightleftarrows \Delta : i$ qui donne $t^* : \widehat{\Delta} \rightleftarrows \widehat{\Theta_n} : i^*$.

L'adjonction $t : n\text{-}\mathcal{C}at \rightleftarrows \mathcal{C}at : i$ se restreint en une adjonction $t : \Theta_n \rightleftarrows \Delta : i$ qui donne $t^* : \widehat{\Delta} \rightleftarrows \widehat{\Theta_n} : i^*$.

Proposition

Le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \widehat{\Delta} \arrow[r, "t^*"] & \widehat{\Theta_n} \\ \mathcal{C}at \arrow[u, "N_1"] \arrow[r, "i"'] & n\text{-}\mathcal{C}at \arrow[u, "N_n"'] \end{tikzcd}$$

L'adjonction $t : n\text{-}\mathcal{C}at \rightleftarrows \mathcal{C}at : i$ se restreint en une adjonction $t : \Theta_n \rightleftarrows \Delta : i$ qui donne $t^* : \widehat{\Delta} \rightleftarrows \widehat{\Theta_n} : i^*$.

Proposition

Le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \widehat{\Delta} \arrow[r, "t^*"] & \widehat{\Theta_n} \\ \mathcal{C}at \arrow[u, "N_1"] \arrow[r, "i"'] & n\text{-}\mathcal{C}at \arrow[u, "N_n"'] \end{tikzcd}$$

On peut considérer le foncteur

$$\Theta_n \to n\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{t_r} \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$$

et son unique extension $t_{r!}$ à $\widehat{\Theta_n}$ qui préservant les colimites.

Soit $t_r^* : \widehat{\Delta} \to \widehat{\Theta_n}$ définit par $t_r^*(X)_T = \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(t_r(T), X)$. On a une adjonction

$$t_{r!} : \widehat{\Theta_n} \rightleftarrows \widehat{\Delta} : t_r^*.$$

Soit $t_r^* : \widehat{\Delta} \to \widehat{\Theta_n}$ définit par $t_r^*(X)_T = \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(t_r(T), X)$. On a une adjonction

$$t_{r!} : \widehat{\Theta_n} \rightleftarrows \widehat{\Delta} : t_r^*.$$

Les foncteurs $t_{r!}$ et i^* préservent tous les deux les colimites et coincident sur les objets de $\Theta_n \implies t_{r!} \cong i^*$.
Leurs adjoints à droite sont donc isomorphes : $i_* \cong t_r^*$.

Soit $t_r^* : \widehat{\Delta} \to \widehat{\Theta_n}$ définit par $t_r^*(X)_T = \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(t_r(T), X)$. On a une adjonction

$$t_{r!} : \widehat{\Theta_n} \rightleftarrows \widehat{\Delta} : t_r^*.$$

Les foncteurs $t_{r!}$ et i^* préservent tous les deux les colimites et coincident sur les objets de $\Theta_n \implies t_{r!} \cong i^*$.
Leurs adjoints à droite sont donc isomorphes : $i_* \cong t_r^*$.

Proposition

Si X est un ensemble simplicial et T un objet de Θ_n, on a

$$i_*(X)_T \cong t_r^*(X)_T = \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(t_r(T), X).$$

Proposition (1. D. Ara, Proposition 6.2)

Soit f un morphisme d'ensembles simpliciaux. Alors $i_*(f)$ est une fibration trivial de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si f est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux.

Proposition (1. D. Ara, Proposition 6.2)

Soit f un morphisme d'ensembles simpliciaux. Alors $i_*(f)$ est une fibration trivial de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si f est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux.

Démonstration.

- i^* préserve les monomorphismes (il a un adjoint à gauche)

Proposition (1. D. Ara, Proposition 6.2)

Soit f un morphisme d'ensembles simpliciaux. Alors $i_*(f)$ est une fibration trivial de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si f est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux.

Démonstration.

- i^* préserve les monomorphismes (il a un adjoint à gauche)
- Son adjoint à droite i_* préserve les fibrations triviales.

Proposition (1. D. Ara, Proposition 6.2)

Soit f un morphisme d'ensembles simpliciaux. Alors $i_*(f)$ est une fibration trivial de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si f est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux.

Démonstration.

- i^* préserve les monomorphismes (il a un adjoint à gauche)
- Son adjoint à droite i_* préserve les fibrations triviales.
- De même, i^* préserve les fibrations triviales (son adjoint à gauche t^* admet un adjoint à gauche).

Proposition (1. D. Ara, Proposition 6.2)

Soit f un morphisme d'ensembles simpliciaux. Alors $i_*(f)$ est une fibration trivial de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si f est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux.

Démonstration.

- i^* préserve les monomorphismes (il a un adjoint à gauche)
- Son adjoint à droite i_* préserve les fibrations triviales.
- De même, i^* préserve les fibrations triviales (son adjoint à gauche t^* admet un adjoint à gauche).
- Si $i_*(f)$ est une fibration triviale, $i^*i_*(f)$ est une fibration triviale.

Proposition (1. D. Ara, Proposition 6.2)

Soit f un morphisme d'ensembles simpliciaux. Alors $i_*(f)$ est une fibration trivial de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si f est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux.

Démonstration.

- i^* préserve les monomorphismes (il a un adjoint à gauche)
- Son adjoint à droite i_* préserve les fibrations triviales.
- De même, i^* préserve les fibrations triviales (son adjoint à gauche t^* admet un adjoint à gauche).
- Si $i_*(f)$ est une fibration triviale, $i^*i_*(f)$ est une fibration triviale.
- i est pleinement fidèle donc $i^*i_*(f) \cong f$ et f est une fibration triviale.

$\square$

Définition

On dira qu'une catégorie est un préordre s'il y a au plus une flèche entre deux paires d'objets.

Définition

On dira qu'une catégorie est un préordre s'il y a au plus une flèche entre deux paires d'objets.

Corollaire (1. D. Ara, Corollary 6.4)

Soit u un foncteur entre deux préordres. Alors $N_n(u)$ est une fibration trivial de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si $N_1(u)$ est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux.

Définition

On dira qu'une catégorie est un préordre s'il y a au plus une flèche entre deux paires d'objets.

Corollaire (1. D. Ara, Corollary 6.4)

Soit u un foncteur entre deux préordres. Alors $N_n(u)$ est une fibration trivial de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si $N_1(u)$ est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux.

Démonstration.

On a $t^* N_1(u) = N_n(u)$.

Définition

On dira qu'une catégorie est un préordre s'il y a au plus une flèche entre deux paires d'objets.

Corollaire (1. D. Ara, Corollary 6.4)

Soit u un foncteur entre deux préordres. Alors $N_n(u)$ est une fibration trivial de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si $N_1(u)$ est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux.

Démonstration.

On a $t^* N_1(u) = N_n(u)$. Si C est un préordre, on a

$$t^* N_1(C)_T = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(t(T), C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(t_r(T), C) \cong i_* N_1(C)_T$$

pour tout objet T de Θ_n.

Définition

On dira qu'une catégorie est un préordre s'il y a au plus une flèche entre deux paires d'objets.

Corollaire (1. D. Ara, Corollary 6.4)

Soit u un foncteur entre deux préordres. Alors $N_n(u)$ est une fibration trivial de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si $N_1(u)$ est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux.

Démonstration.

On a $t^*N_1(u) = N_n(u)$. Si C est un préordre, on a

$$t^*N_1(C)_T = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(t(T), C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(t_r(T), C) \cong i_*N_1(C)_T$$

pour tout objet T de Θ_n. Si u est un foncteur entre deux préordres, on a $N_n(u) \cong i_*N_1(u)$. □

Proposition (1. D. Ara, Proposition 6.5)

Soit u un foncteur. Alors $N_1(u)$ est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux si et seulement si u est une équivalence de catégories surjective sur les objets.

Proposition (1. D. Ara, Proposition 6.5)

Soit u un foncteur. Alors $N_1(u)$ est une fibration triviale d'ensembles simpliciaux si et seulement si u est une équivalence de catégories surjective sur les objets.

Corollaire (1. D. Ara, Proposition 6.6)

Soit u un foncteur entre deux préordres. Alors $N_n(u)$ est une fibration triviale de $\widehat{\Theta_n}$ si et seulement si u est une équivalence de catégories surjective sur les objets.

Corollaire (1. D. Ara, Proposition 6.7)

Le morphisme $N_n(j) : N_n(J) \to N_n(D_0)$ *est une fibration triviale de* $\widehat{\Theta_n}$.

Corollaire (1. D. Ara, Proposition 6.7)

Le morphisme $N_n(j) : N_n(J) \to N_n(D_0)$ est une fibration triviale de $\widehat{\Theta_n}$.

Démonstration.

Le foncteur $J \to D_0$ est une équivalence de catégories entre préordres surjective sur les objets. $\square$

Corollaire (1. D. Ara, Proposition 6.7)

Le morphisme $N_n(j) : N_n(J) \to N_n(D_0)$ est une fibration triviale de $\widehat{\Theta_n}$.

Démonstration.

Le foncteur $J \to D_0$ est une équivalence de catégories entre préordres surjective sur les objets. $\square$

Corollaire

L'objet $N_n(J)$ peut être muni d'une structure d'intervalle séparant et injectif.

Corollaire (1. D. Ara, Proposition 6.7)

Le morphisme $N_n(j) : N_n(J) \to N_n(D_0)$ est une fibration triviale de $\widehat{\Theta_n}$.

Démonstration.

Le foncteur $J \to D_0$ est une équivalence de catégories entre préordres surjective sur les objets. $\square$

Corollaire

L'objet $N_n(J)$ peut être muni d'une structure d'intervalle séparant et injectif.

Démonstration.

Considérons pour $\epsilon = 0, 1$, $\partial^\epsilon = N_n(\partial^\epsilon) : N_n(D_0) \to N_n(J)$. Le préfaisceau $N_n(D_0)$ est l'objet terminal de $\widehat{\Theta_n}$ donc $N_n(J)$ est un intervalle séparant qui est injectif par ce qui précède. $\square$

2.4 Nerfs des n-catégories strictes et n-quasi-catégories

2.4 Nerfs des n-catégories strictes et n-quasi-catégories

Si C est une catégorie, on sait que $N_1(C)$ est une quasi-catégorie.

2.4 Nerfs des n-catégories strictes et n-quasi-catégories

Si C est une catégorie, on sait que $N_1(C)$ est une quasi-catégorie.

Soit $n \geq 1$. On fixe $1 < k \leq n$.

Définition

On dit qu'une n-catégorie stricte C est rigide en dimension k si toutes les k-flèches inversibles de C correspondent à l'identité d'une $(k-1)$-flèche.

2.4 Nerfs des n-catégories strictes et n-quasi-catégories

Si C est une catégorie, on sait que $N_1(C)$ est une quasi-catégorie.

Soit $n \geq 1$. On fixe $1 < k \leq n$.

Définition

On dit qu'une n-catégorie stricte C est rigide en dimension k si toutes les k-flèches inversibles de C correspondent à l'identité d'une $(k-1)$-flèche.

Proposition (1. D. Ara, Proposition 7.10)

Soit C une n-catégorie stricte. Alors $N_n(C)$ est une n-quasi-catégorie si et seulement si C est rigide en dimension k pour $1 < k \leq n$.

Exemples

1. Pour tout k tel que $1 < k \leq n$, le préfaisceau $N_n(J_k)$ n'est pas une n-quasi-catégorie puisque J_k a des k-flèches inversibles non-triviales.

Exemples

1. Pour tout k tel que $1 < k \leq n$, le préfaisceau $N_n(J_k)$ n'est pas une n-quasi-catégorie puisque J_k a des k-flèches inversibles non-triviales.

2. Si C est une catégorie, alors $N_n(C)$ est une n-quasi-catégorie puisque les catégories ont seulement des k-flèches triviales pour $k > 1$.

3. Comparaison entre les Θ_n-espaces de Rezk et les n-quasi-catégories

3. Comparaison entre les Θ_n-espaces de Rezk et les n-quasi-catégories

Définition

Le locatisateur des Θ_n-espaces de Rezk, noté W_{Rezk_n}, est le $\Theta_n \times \Delta$-localisateur engendré par

$$W_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n) \cup \{p^*(N_n(j) : N_n(J) \to N_n(D_0))\} \cup p^*(\mathcal{J}_n),$$

où W_{vert} est la classe des équivalences verticales dans le cas $A = \Theta_n$.

3. Comparaison entre les Θ_n-espaces de Rezk et les n-quasi-catégories

Définition

Le locatisateur des Θ_n-espaces de Rezk, noté W_{Rezk_n}, est le $\Theta_n \times \Delta$-localisateur engendré par

$$W_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n) \cup \{p^*(N_n(j) : N_n(J) \to N_n(D_0))\} \cup p^*(\mathcal{J}_n),$$

où W_{vert} est la classe des équivalences verticales dans le cas $A = \Theta_n$.

Remarque. Par la propriété 2 parmis 3, W_{Rezk_n} est également engendré par

$$W_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n) \cup \{p^*(N_n(\partial^\epsilon) : N_n(D_0) \to N_n(J)); \epsilon = 0, 1\} \cup p^*(\mathcal{J}'_n).$$

Comme le localisateur W_{vert} est accessible, il en est de même pour W_{Rezk_n} et on peut considérer la structure de W_{Rezk_n} catégorie de modèle sur $\widehat{\Theta_n \times \Delta}$. On l'appellera la catégorie de modèle des Θ_n-espaces de Rezk.

Comme le localisateur W_{vert} est accessible, il en est de même pour W_{Rezk_n} et on peut considérer la structure de W_{Rezk_n} catégorie de modèle sur $\widehat{\Theta_n \times \Delta}$. On l'appellera la catégorie de modèle des Θ_n-espaces de Rezk.

Théorème (Rezk)

La catégorie de modèle des Θ_n-espaces de Rezk est simpliciale, propre à gauche et cartésienne.

Comme le localisateur W_{vert} est accessible, il en est de même pour W_{Rezk_n} et on peut considérer la structure de W_{Rezk_n} catégorie de modèle sur $\widehat{\Theta_n \times \Delta}$. On l'appellera la catégorie de modèle des Θ_n-espaces de Rezk.

Théorème (Rezk)

La catégorie de modèle des Θ_n-espaces de Rezk est simpliciale, propre à gauche et cartésienne.

Théorème (1. D. Ara, Theorem 8.3)

Le $(\Theta_n \times \Delta)$-localisateur W_{Rezk_n} est la complétion simpliciale du Θ_n-localisateur W_{QCat_n} des n-quasi-catégories.

Démonstration.

- La catégorie Θ_n est une catégorie de Reedy squelettique et régulière.

Démonstration.

- La catégorie Θ_n est une catégorie de Reedy squelettique et régulière.
- On a vu que le $(A \times \Delta)$-localisateur W_{fRezk} est la complétion simpliciale de W.

Démonstration.

- La catégorie Θ_n est une catégorie de Reedy squelettique et régulière.
- On a vu que le $(A \times \Delta)$-localisateur W_{fRezk} est la complétion simpliciale de W.
- Avec $S = \mathcal{I}_n \cup \mathcal{J}_n$ et l'intervalle séparant et injectif $N_n(J)$, le $(\Theta_n \times \Delta)$-localisateur W_{fRezk} est donc la complétion simpliciale de W_{QCat_n}.

Démonstration.

- La catégorie Θ_n est une catégorie de Reedy squelettique et régulière.
- On a vu que le $(A \times \Delta)$-localisateur W_{fRezk} est la complétion simpliciale de W.
- Avec $S = \mathcal{I}_n \cup \mathcal{J}_n$ et l'intervalle séparant et injectif $N_n(J)$, le $(\Theta_n \times \Delta)$-localisateur W_{fRezk} est donc la complétion simpliciale de W_{QCat_n}.
- W_{fRezk} est engendré par $\mathrm{W}_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n \cup \mathcal{J}_n) \cup \{p^*(\partial^\epsilon_X : X \to X \times N_n(J)); X \in \mathrm{Ob}(\widehat{\Theta_n}), \epsilon = 0, 1\}$.

Démonstration.

- La catégorie Θ_n est une catégorie de Reedy squelettique et régulière.
- On a vu que le $(A \times \Delta)$-localisateur W_{fRezk} est la complétion simpliciale de W.
- Avec $S = \mathcal{I}_n \cup \mathcal{J}_n$ et l'intervalle séparant et injectif $N_n(J)$, le $(\Theta_n \times \Delta)$-localisateur W_{fRezk} est donc la complétion simpliciale de W_{QCat_n}.
- W_{fRezk} est engendré par $\mathrm{W}_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n \cup \mathcal{J}_n) \cup \{p^*(\partial^\epsilon_X : X \to X \times N_n(J)); X \in \mathrm{Ob}(\widehat{\Theta_n}), \epsilon = 0, 1\}$.
- W_{Rezk_n} est engendré par $\mathrm{W}_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n) \cup \{p^*(N_n(\partial^\epsilon) : N_n(D_0) \to N_n(J)); \epsilon = 0, 1\} \cup p^*(\mathcal{J}'_n)$.

$\square$

Démonstration.

- W_{fRezk} est engendré par $\mathrm{W}_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n \cup \mathcal{J}_n) \cup \{p^*(\partial^\epsilon_X : X \to X \times N_n(J)); X \in \mathrm{Ob}(\widehat{\Theta_n}), \epsilon = 0, 1\}$.
- W_{Rezk_n} est engendré par $\mathrm{W}_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n) \cup \{p^*(N_n(\partial^\epsilon) : N_n(D_0) \to N_n(J)); \epsilon = 0, 1\} \cup p^*(\mathcal{J}'_n)$.

Démonstration.

- W_{fRezk} est engendré par $\mathrm{W}_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n \cup \mathcal{J}_n) \cup \{p^*(\partial^\epsilon_X : X \to X \times N_n(J)); X \in \mathrm{Ob}(\widehat{\Theta_n}), \epsilon = 0, 1\}$.
- W_{Rezk_n} est engendré par $\mathrm{W}_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n) \cup \{p^*(N_n(\partial^\epsilon) : N_n(D_0) \to N_n(J)); \epsilon = 0, 1\} \cup p^*(\mathcal{J}'_n)$.
- Comme $\partial^\epsilon = \partial^\epsilon_{D_0}$, $\mathrm{W}_{Rezk_n} \subseteq \mathrm{W}_{fRezk}$.

Démonstration.

- W_{fRezk} est engendré par $\mathsf{W}_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n \cup \mathcal{J}_n) \cup \{p^*(\partial^\epsilon_X : X \to X \times N_n(J)); X \in \mathrm{Ob}(\widehat{\Theta_n}), \epsilon = 0, 1\}$.
- W_{Rezk_n} est engendré par $\mathsf{W}_{vert} \cup p^*(\mathcal{I}_n) \cup \{p^*(N_n(\partial^\epsilon) : N_n(D_0) \to N_n(J)); \epsilon = 0, 1\} \cup p^*(\mathcal{J}'_n)$.
- Comme $\partial^\epsilon = \partial^\epsilon_{D_0}$, $\mathsf{W}_{Rezk_n} \subseteq \mathsf{W}_{fRezk}$.
- Réciproquement, on doit montrer que $\partial^\epsilon_X = X \times \partial^\epsilon \in \mathsf{W}_{Rezk_n}$. La catégorie de W_{Rezk_n}-modèle est cartésienne et W_{Rezk_n} est donc fermé par produit binaire.

$\square$

Théorème (1. D. Ara, Theorem 8.4)

On munit $\widehat{\Theta_n}$ (resp. $\widehat{\Theta_n \times \Delta}$) avec la structure de catégorie de modèle des n-quasi-catégories (resp. avec la structure de catégorie de modèle des Θ_n-espaces de Rezk).

1. *Alors l'adjonction*

$$p^* : \widehat{\Theta_n} \rightleftarrows \widehat{\Theta_n \times \Delta} : i_0^*$$

est une équivalence de Quillen.

Théorème (1. D. Ara, Theorem 8.4)

On munit $\widehat{\Theta_n}$ (resp. $\widehat{\Theta_n \times \Delta}$) avec la structure de catégorie de modèle des n-quasi-catégories (resp. avec la structure de catégorie de modèle des Θ_n-espaces de Rezk).

1. *Alors l'adjonction*

$$p^* : \widehat{\Theta_n} \rightleftarrows \widehat{\Theta_n \times \Delta} : i_0^*$$

   est une équivalence de Quillen.

2. *Soit $D : \Delta \to \widehat{\Theta_n}$ une W_{QCat_n}-résolution cosimpliciale. Alors l'adjonction*

$$Real_D : \widehat{\Theta_n \times \Delta} \rightleftarrows \widehat{\Theta_n} : Sing_D$$

   est une équivalence de Quillen.

Corollaire (1. D. Ara, Corollary 8.5)

La catégorie de modèle des n-quasi-catégories est cartésienne fermée.

Corollaire (1. D. Ara, Corollary 8.5)

La catégorie de modèle des n-quasi-catégories est cartésienne fermée.

Démonstration.

La complétion simpliciale de W_{QCat_n} est cartésienne et donc ce localisateur est cartésien. On en déduit que la catégorie de modèle associée est cartésienne fermée. $\square$

On note $\mathcal{G}$pd la catégorie des groupoïdes et $\Pi_1 : \mathcal{C}at \to \mathcal{G}pd$ le foncteur groupoïde fondamentale (i.e. l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathcal{G}pd \hookrightarrow \mathcal{C}at$).

On note $\mathcal{G}$pd la catégorie des groupoïdes et $\Pi_1 : \mathcal{C}$at $\to \mathcal{G}$pd le foncteur groupoïde fondamentale (i.e. l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathcal{G}$pd $\hookrightarrow \mathcal{C}$at).

Définition

Soit $\widetilde{\Delta_\bullet} : \Delta \to \mathcal{C}at$ *le foncteur défini par l'inclusion suivante,*

$$\Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at \xrightarrow{\Pi_1} \mathcal{G}pd \hookrightarrow \mathcal{C}at$$

En d'autres termes, $\widetilde{\Delta_\bullet}$ *envoie* $[k]$ *sur le groupoïde simplement connexe d'objets* $\{0, \ldots, k\}$.

Proposition (1. D. Ara, Proposition 8.7)

Le foncteur $N_n\widetilde{\Delta_\bullet} : \Delta \to \widehat{\Theta_n}$ *est une* W_{QCat_n}*-résolution simpliciale de* $\widehat{\Theta_n}$*.*

Proposition (1. D. Ara, Proposition 8.7)

Le foncteur $N_n\widetilde{\Delta_\bullet} : \Delta \to \widehat{\Theta_n}$ *est une* W_{QCat_n}*-résolution simpliciale de* $\widehat{\Theta_n}$.

Démonstration.

Il est clair que $N_n\widetilde{\Delta_0} \sqcup N_n\widetilde{\Delta_0} \to N_n\widetilde{\Delta_1}$ est un monomorphisme.
Soit $k \geq 0$, on doit montrer que pour tout préfaisceau X de Θ_n, la projection

$$X \times N_n\widetilde{\Delta_k} \to X$$

est une W_{QCat_n}-équivalence.

Proposition (1. D. Ara, Proposition 8.7)

Le foncteur $N_n\widetilde{\Delta_\bullet} : \Delta \to \widehat{\Theta_n}$ est une W_{QCat_n}-résolution simpliciale de $\widehat{\Theta_n}$.

Démonstration.

Il est clair que $N_n\widetilde{\Delta_0} \sqcup N_n\widetilde{\Delta_0} \to N_n\widetilde{\Delta_1}$ est un monomorphisme.
Soit $k \geq 0$, on doit montrer que pour tout préfaisceau X de Θ_n, la projection

$$X \times N_n\widetilde{\Delta_k} \to X$$

est une W_{QCat_n}-équivalence.
Il suffit de montrer que l'unique morphisme $N_n\widetilde{\Delta_k} \to D_0$ est une fibration triviale. Cela découle du fait que $\widetilde{\Delta_k} \to \Delta_0$ est une équivalence de catégories surjective sur des objets entre pré-ordres. $\square$

Corollaire (1. D. Ara, Corollary 8.8)

La W_{QCat_n}-résolution simpliciale $N_n\widetilde{\Delta_\bullet}$ induit une équivalence de Quillen

$$Real_{N_n\widetilde{\Delta_\bullet}} : \widehat{\Theta_n \times \Delta} \rightleftarrows \widehat{\Theta_n} : Sing_{N_n\widetilde{\Delta_\bullet}},$$

où $\widehat{\Theta_n}$ (resp. $\widehat{\Theta_n \times \Delta}$) est muni de la structure de catégorie de modèle des n-quasi-catégories (resp. de la structure de catégorie de modèle des Θ_n-espaces de Rezk).

Corollaire (1. D. Ara, Corollary 8.8)

La W_{QCat_n}-résolution simpliciale $N_n\widetilde{\Delta_\bullet}$ induit une équivalence de Quillen

$$Real_{N_n\widetilde{\Delta_\bullet}} : \widehat{\Theta_n \times \Delta} \rightleftarrows \widehat{\Theta_n} : Sing_{N_n\widetilde{\Delta_\bullet}},$$

où $\widehat{\Theta_n}$ (resp. $\widehat{\Theta_n \times \Delta}$) est muni de la structure de catégorie de modèle des n-quasi-catégories (resp. de la structure de catégorie de modèle des Θ_n-espaces de Rezk).

Démonstration.

Le foncteur $N_n\widetilde{\Delta_\bullet}$ est une W_{QCat_n}-résolution simpliciale. On obtient le résultat en prenant $D = N_n\widetilde{\Delta_\bullet}$ dans le théorème ci-dessus. □

Bibliographie

1. Dimitri Ara, Higher quasi-categories vs higher Rezk spaces. *Journal of K-theory*, , 2014, vol. 14, no 3, p. 701-749
2. C. Berger, A cellular nerve for higher categories, *Adv. Math. 169* (2002), no. 1, 118-175
3. J. E. Bergner and C. Rezk, Reedy categories and the -construction, *Math. Z. 274* (2013), no. 1-2, 499-514
4. D.-C. Cisinski, Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie, *Astérisque, no. 308, Soc. Math. France,* 2006.
5. A. Joyal, The theory of quasi-categories and its applications, *Preprint*, 2008.
6. A. Joyal et M. Tierney, Quasi-categories vs Segal spaces, *Categories in algebra, geometry and mathematical physics, Contemp. Math.,* vol. 431, Amer. Math. Soc., 2007, pp. 277-326.
7. C. Rezk, A Cartesian presentation of weak n-categories, *Geom. Topol. 14* (2010), no. 1, 521-571.