ANOTHER MODEL FOR THE HOMOTOPY THEORY OF HOMOTOPY THEORIES

Article de Barwick–Kan (2011)

Sections 3 et 4

20 avril 2021

Définition

Une *catégorie relative* X est la donnée d'une catégorie, notée $\text{und}(X)$ et d'une sous-catégorie de $\text{und}(X)$ contenant tous les objets de $\text{und}(X)$, notée $\text{we}(X)$.

Définition

Si X et Y sont deux catégories relatives, un *foncteur relatif entre X et Y* est un foncteur $F : \text{und}(X) \to \text{und}(Y)$ tel que pour tout morphisme f de $\text{we}(X)$, $F(f) \in \text{we}(Y)$.

On notera **RelCat** la catégorie dont les objets sont les catégories relatives et les morphismes, les foncteurs relatifs.

Inclusions relatives

Définition

Soient X et Y deux catégories relatives. Une *inclusion relative* est un foncteur relatif $X \to Y$ tel que

- $\mathrm{und}(X) \subset \mathrm{und}(Y)$;
- $\mathrm{we}(X) = \mathrm{we}(Y) \cap X$.

Une notation utile

Pour tout entier naturel k, on notera $\mathbb{k}$ la catégorie

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\mathrm{id}_0"] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & k \arrow[loop right, "\mathrm{id}_k"] \end{tikzcd}$$

Définition

Une catégorie relative X est dite *maximale* lorsque tous les morphismes de $\mathrm{und}(X)$ sont des équivalences faibles.

Lorsque $\mathscr{C}$ est une catégorie, $\hat{\mathscr{C}}$ désigne la catégorie relative maximale dont la catégorie sous-jacente est $\mathscr{C}$.

Définition

Une catégorie relative X est dite *minimale* lorsque les seuls morphismes de $\mathrm{und}(X)$ qui sont des équivalences faibles sont les morphismes identités.

Lorsque $\mathscr{C}$ est une catégorie, $\check{\mathscr{C}}$ désigne la catégorie relative minimale dont la catégorie sous-jacente est $\mathscr{C}$.

Définition

Soient Y et Z deux catégories relatives et $f : Y \to Z$ et $g : Y \to Z$ deux foncteurs relatifs. Une *homotopie stricte entre f et g* est un foncteur relatif

$$h : Y \times \hat{\mathbb{1}} \to Z$$

tel que pour tout objet ou morphisme y de Y, on ait

$$h(y, 0) = f(y) \text{ et } h(y, 1) = g(y).$$

Dire que h est une homotopie stricte entre f et g, c'est dire que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & Y \times \{0\} \arrow[dr, "f"] & \\ Y \times \hat{\mathbb{1}} \arrow[ur, "\pi_0"] \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & Z \\ & Y \times \{1\} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

avec $\pi_i(y, j) = (y, i)$ pour tout $y \in X$ et tout $(i, j) \in [0, 1]^2$ et où par abus de notation, on note encore f (respectivement g) le morphisme qui à tout $(y, 0) \in Y \times \{0\}$ (respectivement tout $(y, 1) \in Y \times \{1\}$) associe $f(y)$ (respectivement $g(y)$).

Définition

Soit $X \to Y$ une inclusion relative. [a]

On dit que X est un *rétract par déformation de* Y lorsqu'il existe un foncteur relatif $r : Y \to X$ et une homotopie stricte s entre r et id_Y tels que pour tout $x \in \mathrm{Ob}(\mathrm{und}(X))$, $r(x) = x$ et $s_{|r(X)} = \mathrm{id}_X$.

a. X et Y sont donc deux catégories relatives telles que

$$\mathrm{und}(X) \subset \mathrm{und}(Y) \text{ et } \mathrm{we}(X) = \mathrm{we}(Y) \cap X.$$

Définition

Soient X et Y deux catégories relatives. Une *inclusion relative de Dwyer* est un foncteur relatif $X \to Y$ tel que

- $\mathrm{und}(X) \subset \mathrm{und}(Y)$;
- $\mathrm{we}(X) = \mathrm{we}(Y) \cap X$; [a]
- pour tout morphisme f de Y de but un élément de X, $f \in X$;
- X est un rétract par déformation de ZX, où ZX désigne la sous-catégorie relative pleine de Y engendrée par

$$\{y \in Y,\ \exists x \in X,\ \exists f : x \to y\}\,.$$

a. On rappelle que ces deux premiers points font du foncteur considéré une *inclusion relative*

Définition

Soient X et Y deux catégories relatives. Soit $F : A \to B$ un foncteur relatif. On dit que F est un *morphisme relatif de Dwyer* lorsque F admet une unique factorisation

$$X \xrightarrow{\sim} X' \hookrightarrow Y \ ,$$

où $X \xrightarrow{\sim} X'$ est un isomorphisme et $X' \hookrightarrow Y$ une inclusion relative de Dwyer.

Ces foncteurs joueront le rôle des cofibrations dans la structure de modèle que l'on construit dans cet article.

Ensembles partiellement ordonnés relatifs et leurs subdivisions

Définition

Un *ensemble partiellement ordonné relatif* est une catégorie relative dont la catégorie sous-jacente est un ensemble partiellement ordonné.

On note **RelPos** la catégorie dont les objets sont les ensembles partiellement ordonnés relatifs et les morphismes, les foncteurs relatifs entre ensembles partiellement ordonnés relatifs. C'est une sous-catégorie relative pleine de **RelCat**.

Définition

Soit P un ensemble partiellement ordonné relatif. Sa *subdivision terminale* est l'ensemble partiellement ordonné relatif $\xi_t P$ dont

- les objets sont les foncteurs relatifs $\check{\mathbb{k}} \to P$, où $k \in \mathbb{N}$, qui sont des monomorphismes de **RelCat** ;
- les morphismes de $x_1 : \check{\mathbb{k}}_1 \to P$ dans $x_2 : \check{\mathbb{k}}_2 \to P$ sont les diagrammes commutatifs du type

$$\begin{tikzcd} \check{\mathbb{k}}_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "x_1"'] & & \check{\mathbb{k}}_2 \arrow[dl, "x_2"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

- les équivalences faibles sont les morphismes entre objets $x_1 : \check{\mathbb{k}}_1 \to P$ et $x_2 : \check{\mathbb{k}}_2 \to P$ tels que la flèche induite $x_1(k_1) \to x_2(k_2)$ soit une équivalence faible dans P.

Ensembles partiellement ordonnés relatifs et leurs subdivisions

Subdivision initiale

Définition

Soit P un ensemble partiellement ordonné relatif. Sa *subdivision initiale* est l'ensemble partiellement ordonné relatif $\xi_i P$ dont

- les objets sont les foncteurs relatifs $\check{\mathbb{k}} \to P$, où $k \in \mathbb{N}$, qui sont des monomorphismes de **RelCat** ;
- les morphismes de $x_2 : \check{\mathbb{k}}_1 \to P$ dans $x_1 : \check{\mathbb{k}}_2 \to P$ sont les diagrammes commutatifs du type

$$\begin{tikzcd} \check{\mathbb{k}}_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "x_1"'] & & \check{\mathbb{k}}_2 \arrow[dl, "x_2"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

- les équivalences faibles sont les morphismes entre objets $x_2 : \check{\mathbb{k}}_1 \to P$ et $x_1 : \check{\mathbb{k}}_2 \to P$ tels que la flèche induite $x_2(0) \to x_1(0)$ soit une équivalence faible de P.

Ensembles partiellement ordonnés relatifs et leurs subdivisions

Autrement dit, les deux subdivisions ont pour objets les suites croissantes de P et les versions terminale et initiale correspondent à deux façons d'ordonner ces suites. On notera ainsi $(x(0), \cdots, x(k))$ une suite d'éléments de P correspondant à un objet de $\xi_t P$ ou de $\xi_i P$.

Pour la subdivision terminale, le morphisme "dernier sommet"

$$\begin{cases} \xi_t P & \to P \\ (x : \check{\mathbb{k}} \to P) & \mapsto x(k) \end{cases}$$

détecte les équivalences faibles.

Pour la subdivision initiale, c'est le morphisme "premier sommet"

$$\begin{cases} \xi_i P & \to P \\ (x : \check{\mathbb{k}} \to P) & \mapsto x(0) \end{cases}$$

qui joue ce rôle.

Foncteurs de projection terminal et initial

On a :

- un foncteur $\pi_t : \xi_t P \to P$, qui envoie l'objet $x : \check{\mathbb{k}} \to P$ de $\xi_t P$ sur l'objet $x(k)$ de P et le triangle commutatif précédent sur le morphisme $x_1(k_1) \to x_2(k_2)$ de P ;
- un foncteur $\pi_i : \xi_i P \to P$, qui envoie l'objet $x : \check{\mathbb{k}} \to P$ de $\xi_i P$ sur l'objet $x(0)$ de P et le triangle commutatif précédent sur le morphisme $x_2(0) \to x_1(0)$ de P.

Les équivalences faibles de $\xi_t P$ sont les morphismes f de $\xi_t P$ tels que $\pi_t(f)$ soit une équivalence faible de P. Les équivalences faibles de $\xi_i P$ sont les morphismes f de $\xi_i P$ tels que $\pi_i(f)$ soit une équivalence faible de P.

Pour tout ensemble partiellement ordonné relatif P, on notera $\xi P = \xi_t \xi_i P$ et $\pi : \xi P \to P$ le morphisme composé $\xi_t \xi_i P \xrightarrow{\pi_t} \xi_i P \xrightarrow{\pi_i} P$.

Caractère fonctoriel de ξ_i et ξ_t

Théorème

On a deux foncteurs ξ_i : **RelPos** $\to$ **RelPos** et ξ_t : **RelPos** $\to$ **RelPos**.

Démonstration.

Pour tout morphisme $f : P \to P'$ de **RelPos**, on note $\xi_t f$ le foncteur relatif $\xi_t P \to \xi_t P'$ qui à tout monomorphisme $\check{\mathbb{k}} \to P$ associe le monomorphisme $\check{\mathbb{k}}' \to P'$ tel qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \check{\mathbb{k}} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \check{\mathbb{k}}' \arrow[d] \\ P \arrow[r] & P' \end{tikzcd}$$

de sorte que g soit un épimorphisme et on fait de même pour $\xi_i f$. $\square$

Conjugaison entre ξ_i et ξ_t

Théorème

Pour tout ensemble partiellement ordonné relatif P, on a des isomorphismes canoniques $(\xi_i P)^{\mathrm{op}} \cong \xi_t\,(P^{\mathrm{op}})$ et $(\xi_t P)^{\mathrm{op}} \cong \xi_i\,(P^{\mathrm{op}})$.

Démonstration.

Pour tout entier naturel k, on a un (unique) isomorphisme $\Bbbk \cong \Bbbk^{\mathrm{op}}$. Si P est un ensemble partiellement ordonné relatif, on construit alors un isomorphisme und$\,(\xi_i P)^{\mathrm{op}} \cong$ und$\,(\xi_t P^{op})$ en associant à chaque morphisme

$$\begin{tikzcd}
\check{\Bbbk}_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "f_1"'] & & \check{\Bbbk}_2 \arrow[dl, "f_2"] \\
& P^{\mathrm{op}} &
\end{tikzcd}$$

de $\xi_t P^{op}$

Conjugaison entre ξ_i et ξ_t

le morphisme

$$\begin{tikzcd}
\check{\mathbb{k}}_1 \arrow[rr] \arrow[d] & & \check{\mathbb{k}}_2 \arrow[d] \\
\check{\mathbb{k}}_1^{op} \arrow[dr, "f_1^{op}"'] & & \check{\mathbb{k}}_2^{op} \arrow[dl, "f_2^{op}"] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

de $(\xi_i P)^{op}$.

$\square$