ANOTHER MODEL FOR THE HOMOTOPY THEORY OF HOMOTOPY THEORIES
Article de Barwick–Kan (2011)

16 avril 2021

Relèvement de structure de modèle

Définition

Soit une catégorie de modèle F cofibrement engendrée de cofibrations génératrices I et cofibrations génératrices triviales J, G une catégorie bicomplète et une adjonction $f : F \longleftrightarrow G : g$ On dit que la structure de modèle sur F se relève en une structure de modèle cofibrement engendrée sur G si et seulement si :

- $f(I)$ et $f(J)$ admettent l'argument du petit objet
- g envoie les $f(J)$-cells relatifs sur les équivalences faibles.

Remarque

$f : F \longleftrightarrow G : g$ est alors une adjonction de Quillen, et il existe sur G une structure cofibrement engendrée donnée par fI, fJ et dont les équivalences faibles sont les morphismes tels que leur image par g l'est aussi dans F. On renvoie à Hirschhorn "model categories and their localizations".

Catégorie de modèle de Reedy

Définition

On note pour la suite S la catégorie des ensembles simpliciaux et sS celle des bisimpliciaux $\mathrm{Set}^{\Delta^{Op}\times\Delta^{Op}}$. On considérera sauf mention du contraire la structure de modèle usuelle sur S. On appelle Structure de modèle de Reedy sur sS, la structure de modèle dont les équivalences faibles sont les morphismes $L \to M$ de sS dont les restrictions pour tout p entier $L(p, \_) \to M(p, \_)$ dans S sont des équivalences faibles au sens usuel. Les cofibrations sont données par les monomorphismes.

Définition

On a un équivalent de $\Delta[n]$ dans sS : pour tout (m, n) couple d'entiers, on note $\Delta[m, n]$ le bisimplicial tel que $(\Delta[m, n])_{(i,j)}$ est l'ensemble de couples de morphismes croissants de $[i] \to [m]$ et $[j] \to [n]$ dans Δ.

vers le lemme "clé"

Définition

On a les adjonctions $K : sS \longleftrightarrow RelCat : N$ et $K_\xi : sS \longleftrightarrow RelCat : N_\xi$ données par les diagrammes "d'extension de Kan" :

$$\begin{tikzcd}
\Delta \times \Delta \arrow[rr, "{(p,q) \longrightarrow \check{p} \times \hat{q}(\text{resp. } \xi(\check{p} \times \hat{q}))}"] \arrow[d, "{(p,q) \longrightarrow \Delta[p,q]}"'] & & RelCat \\
sS \arrow[urr, "K(\text{resp. } K_\xi)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposition

$\pi : \xi \longrightarrow id$ induit une équivalence de Reedy naturelle $\pi^* : N \longrightarrow N_\xi$ Au sens où pour toute catégorie relative X et tout entier p, le morphisme simplicial $\pi_p^* : NX(p, \_) \longrightarrow N_(p, \_)$ est une équivalence faible au sens usuel.

LE théorème

Théorème

$$K_\xi : sS \longleftrightarrow \mathrm{RelCat} : N_\xi$$

relève toute localisation de Bousfield à gauche de la structure de modèle de Reedy sur sS (en particulier celle de Segal complète) via une équivalence de Quillen en une structure de modèle cofibrement engendrée sur *RelCat* où :

- équivalences faibles (resp. fibrations)= les morphismes dont l'image par N est une équivalence faible (resp. fibration) dans sS
- les cofibrations sont les morphismes de Dwyer
- les objets cofibrants sont les ensembles partiellement ordonnés relatifs.

La catégorie **RelCat** est cartésienne fermée

Définition

Pour toute catégorie relative Y, on définit le foncteur $(-)^Y : RelCat \to RelCat$ qui à toute catégorie relative Z associe la catégorie relative Z^Y qui admet

- les morphismes $Y \to Z$ de $RelCat$ comme objets
- étant donné deux objets F et G, les morphismes $H : Y \times \check{\mathbb{1}} \to Z$ tels que pour tout objet ou morphisme y de Y,

  $$H(y,0) = F(y) \text{ et } H(y,1) = G(y).$$

  comme morphismes de F vers G
- les homotopies strictes de F vers G comme équivalences faibles de F vers G

RelCat admettant les produits finis, on peut définir pour toute catégorie relative Y l'endofoncteur $- \times Y$. Il admet $(-)^Y$ comme adjoint à droite. Plus généralement, pour toutes catégories relatives X, Y, Z, il existe un isomorphisme naturel entre $Z^{X\times Y}$ et $(Z^Y)^X$ qui enrichit l'adjonction.

Un foncteur qui préserve l'homotopie

Proposition

Soient X et Y deux catégories relatives. Soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux foncteur relatifs strictement homotopes. Soit Z une catégorie relative. Alors les foncteurs relatifs $f^* : Z^Y \to Z^X$ et $g^* : Z^Y \to Z^X$ sont strictement homotopes.

Remarque

Ainsi, toute équivalence d'homotopie $e : X \to Y$ induit une équivalence d'homotopie $e^* : Z^Y \to Z^X$.

Démonstration.

On considère une homotopie stricte $h : X \times \hat{\mathbb{1}} \to Y$ entre f et g. On a $Z^h : Z^Y \to Z^{X \times \hat{\mathbb{1}}} \simeq \left(Z^X\right)^{\hat{\mathbb{1}}}$ et *via* l'adjonction entre les foncteurs $- \times \hat{\mathbb{1}}$ et $(-)^{\hat{\mathbb{1}}}$, on obtient $H : Z^Y \times \hat{\mathbb{1}} \to Z^X$, qui est une homotopie entre f^* et g^*. $\square$

Plus précisément, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X \times \{0\} \arrow[dr, "f"] & \\ X \times \hat{\mathbb{1}} \arrow[ur, "\pi_0"] \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & Y \\ & X \times \{1\} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

qui donne le diagramme commutatif suivant, en appliquant le foncteur (contravariant) $(Z)^{-}$:

$$\begin{tikzcd} & Z^{X \times \{0\}} \arrow[dr, "Z^{\pi_0}"] & \\ Z^{Y} \arrow[ur, "Z^{f}"] \arrow[rr, "Z^{h}"] \arrow[dr, "Z^{g}"'] & & Z^{X \times \hat{\mathbb{1}}} \\ & Z^{X \times \{1\}} \arrow[ur, "Z^{\pi_1}"'] & \end{tikzcd}$$

et par l'adjonction entre les foncteurs $- \times \hat{\mathbb{1}}$ et $(-)^{\hat{\mathbb{1}}}$, on obtient le diagramme commutatif suivant, qui montre que H est une homotopie entre f^* et g^* :

$$\begin{tikzcd}
 & Z^X \times \hat{\mathbb{1}} \arrow[dr, "\mathrm{id} \times \pi_0"] & \\
Z^Y \times \hat{\mathbb{1}} \arrow[ur, "f^* \times \mathrm{id}"] \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "g^* \times \mathrm{id}"'] & & Z^X \\
 & Z^X \times \hat{\mathbb{1}} \arrow[ur, "\mathrm{id} \times \pi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Les foncteurs ξ_t ; ξ_i et ξ préservent l'homotopie

On notera par la suite $\xi = \xi_t \xi_i$.

Proposition

Les foncteurs ξ_i, ξ_t et ξ préservent les homotopies entre morphismes d'ensembles partiellement ordonnés relatifs finis.

La donnée d'une homotopie (au sens large) entre deux morphismes F, G de $X \to Y$ dans *RelCat* équivaut à la donnée d'un diagramme $\hat{J} \to Y^X$ où J est une catégorie zig-zag de la forme :

$$\begin{tikzcd} & x_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & x_{2n-1} \arrow[dr] & \\ x_0 & & x_2 \arrow[ur, dotted, no head] & & x_{2n} \end{tikzcd}$$

où $J(x_0) = F$, $J(x_{2n}) = G$ et chaque morphisme $x_{2i} \leftarrow x_{2i+1}$ (resp.$x_{2i+1} \to x_{2i+2}$) a pour image une homotopie de $J(x_{2i}) \leftarrow J(x_{2i+1})$(resp.$J(x_{2i+1}) \to J(x_{2i+2})$)

suite

Démonstration.

Soient F et $G : P \to X \in RelPos$ où P est fini, soit H une homotopie stricte de F vers G, on veut prouver l'existence d'une homotopie au sens large de $\xi_t F$ vers $\xi_t G$.Soit n le nombre d'objets de P, il existe $\hat{J}$ tel que J est une catégorie zigzag dont le nombre d'objets est $2n+1$ et il existe $k : \xi_t P \times \hat{J} \to \xi_t X$ tel que pour tout $(r_1, ..., r_m) \in \xi_t P$,
$k((r_1, ..., r_m), j_{2n}) = ((r1, 0), ..., (r_m, 0))$ et
$\mathrm{k}((\mathrm{r}_1, ..., r_m), j_0) = ((r1, 1), ..., (r_m, 1))$

Alors le morphisme : $\xi_t P \times \hat{J} \xrightarrow{k} \xi_t(P \times \hat{1}) \xrightarrow{\xi_t H} \xi_t X$ fournit une homotopie large de $\xi_t F$ vers $\xi_t G$ via l'adjonction $Z^{X \times Y} \equiv (Z^Y)^X$ en vérifiant que $\xi_t H((r_1, 0), ..., (r_m, 0)) = \xi_t F$ et
$\xi_t H((r_1, 1), ..., (r_m, 1)) = \xi_t G$ $\square$

suite 2

En particulier, les équivalences d'homotopie sont préservées par ξ, ξ_i et ξ_t. D'où la proposition :

Proposition

Pour tous entiers p,q, les morphismes du diagramme suivant sont des équivalences d'homotopie (f désigne la projection $\check{p} \times \hat{q} \to \check{p}$) :

$$\begin{tikzcd}
\xi(\check{p} \times \hat{q}) \arrow[r, "\pi_t\xi_i"] \arrow[d, "\xi f"] & \xi_i(\check{p} \times \hat{q}) \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "\xi_i f"] & \check{p} \times \hat{q} \arrow[d, "f"] \\
\xi\check{p} \arrow[r, "\pi_t\xi_i"] & \xi_i\check{p} \arrow[r, "\pi_i"] & \check{p}
\end{tikzcd}$$

Démonstration.

Le diagramme est bien commutatif :

$$\begin{tikzcd} \hat{n} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "{(r_0, r_0')\dots(r_n, r_n')}"'] & \hat{n} \arrow[d, "{(r_0)\dots(r_n)}"] \\ \check{p} \times \hat{q} \arrow[r, "f"] & \check{p} \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales commutent car f est une équivalence d'homotopie (rétract par déformation) et $\xi_{i/t}$ préservent les équivalences d'homotopie.

$$\begin{tikzcd} \xi\check{p} \arrow[r, "\pi_t\xi_i"] \arrow[d, "\xi_t\pi_i"'] & \xi_i\check{p} \arrow[d, "\pi_i"] \\ \xi_t\check{p} \arrow[r, "\pi_t"] & \check{p} \end{tikzcd}$$

π_t est une équivalence d'homotopie de réciproque $i \in \check{p} \longrightarrow (0, 1, ..., i)$, π_i aussi, donc $\xi_t\pi_i$ et finalement $\pi_t\xi_i$ $\square$

Equivalences d'homotopie dans sS

Définition

f et g sont homotopes comme morphismes $A \to B$ de sS (ensembles bisimpliciaux) si et seulement il existe un zigzag de morphismes $A \times \Delta[0,1] \to B$. On définit comme l'auditeur s'y attend la notion d'équivalence d'homotopie.

Remarque

Une équivalence d'homotopie dans sS induit une équivalence d'homotopie au sens de Reedy (pour tout entier p, f_p et $g_p : A(p, \_) \to B(p, \_)$ sont homotopes au sens usuel dans S en tant que morphismes simpliciaux)

Définition

Pour tout $\alpha : \Delta \times \Delta \to RelCat$ (catégorie relative cobisimpliciale), on note N_α l'adjoint à droite de $\underset{Y}{Lan}(\alpha)$ (où Y désigne le plongement de Δ dans S). Concrètement, à toute catégorie relative X et couple d'entiers (p, q), N_α associe les morphismes $\alpha(p, q) \to X$ de $RelCat$.

suite

Proposition

Si $\iota : \Delta \times \Delta \to RelCat$ désigne le foncteur associant (p,q) à $\hat{q}$ pour p et q des entiers, et étant donné $\alpha : \Delta \times \Delta \to RelCat$ et s'il existe $\epsilon : \alpha \to \iota$ une transformation naturelle alors si f et g sont deux morphismes homotopes dans *RelCat* leurs images par N_α le sont dans sS.

Démonstration.

Soit $H : X \times \hat{1} \to Y$ dans *RelCat*, ϵ induit une transformation naturelle $N_\iota \to N_\alpha$ en particulier un morphisme $N_\iota \hat{1} \to N_\alpha \hat{1}$. De plus $\Delta[0,1] \equiv N_\iota \hat{1}$ et N_α en tant qu'adjoint à droite préserve le produit d'où $N_\alpha X \times N_\alpha \hat{1} \equiv N_\alpha(X \times \hat{1})$
La composition suivante nous donne alors l'homotopie bisimpliciale voulue :

$$N_\alpha X \times \Delta[0,1] \equiv N_\alpha X \times N_\iota \hat{1} \xrightarrow{\epsilon} N_\alpha X \times N_\alpha \hat{1} \equiv N_\alpha(X \times \hat{1}) \xrightarrow{N_\alpha H} N_\alpha Y$$

$\square$

Proposition

Rappelons le lemme avant de le démontrer :
$\pi^* : N \longrightarrow N_\xi$ défini par tirage en arrière de $\pi : \xi \longrightarrow id$ est une équivalence naturelle de Reedy. Cela revient à prouver que, pour tout X dans *RelCat* et p entier, l'application suivante est une équivalence faible au sens usuel dans les simpliciaux :

$$\pi_p^* : NX(p,\_\,) \longrightarrow N_\xi X(p,\_)$$

Le résultat est donné par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{RelCat}(\check{p} \times \hat{_}, X) \arrow[r, "\text{iso}"] \arrow[d, "\pi_p^*"'] & A \arrow[r, "\mathrm{diag}(f)"] & B \arrow[d, "\mathrm{diag}(k)"] \\
\mathrm{RelCat}(\xi(\check{p} \times \hat{_}), X) \arrow[r, "\text{iso}"] & C \arrow[r, "\mathrm{diag}(\mathrm{g})"] & D
\end{tikzcd}$$

suite et fin

Démonstration.

où : $A := \mathrm{diag}(\mathrm{RelCat}(\check{p} \times \hat{q}, X^{\hat{0}}))$
$B := \mathrm{diag}(\mathrm{RelCat}(\check{p} \times \hat{q}, X^{\hat{r}}))$,
$C := \mathrm{diag}(\mathrm{RelCat}(\xi(\check{p} \times \hat{q}), X^{\hat{0}}))$, $D := \mathrm{diag}(\mathrm{RelCat}(\xi(\check{p} \times \hat{q}), X^{\hat{r}}))$
et où $k : \mathrm{RelCat}(\hat{r}, X^{\check{p} \times \hat{q}}) \longrightarrow \mathrm{RelCat}(\hat{r}, X^{\xi(\check{p} \times \hat{q})})$ induit par π. On remarque alors que $f(\_, r)$, $g(\_, r)$ et $k(q, \_)$ sont des équivalences d'homotopie et donc $\mathrm{diag}(f)$ $\mathrm{diag}(g)$ et $\mathrm{diag}(k)$ aussi. □