ANOTHER MODEL FOR THE HOMOTOPY THEORY OF HOMOTOPY THEORIES
Article de Barwick–Kan (2011)
Sections 9 et 10

20 avril 2021

Tout rétract par déformation d'un morphisme de Dwyer est un morphisme de Dwyer.

On considère le poussé-en-avant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "j"] \\ B \arrow[r, "t"'] & D \end{tikzcd}$$

dans **RelCat**, de sorte que i soit un morphisme de Dwyer. Alors :

- on a un morphisme de Dwyer $j : C \to D$ tel que $ZC = ZA \coprod_A C$;
- en notant XA (respectivement XC) la sous-catégorie relative pleine de B (respectivement de D) engendrée par les objets qui ne sont pas dans $i(A)$ (respectivement $j(C)$), on a deux isomorphismes induits (par restriction) par t :
$$XA \cong XC$$
et
$$XA \cap ZA \cong XC \cap ZC$$
- si $(A, B, C) \in \mathbf{RelPos}^3$, alors $D \in \mathbf{RelPos}$.

Tout morphisme composé de morphismes de Dwyer est lui-même un morphisme de Dwyer.

Proposition

On considère une inclusion relative $P \to Q$ dans **RelPos** telle que pour tout morphisme $f : q_1 \to q_2$ de Q tel que $q_1 \in P$, on ait $f \in P$. Alors l'inclusion relative induite $\xi_t P \to \xi_t Q$ est un morphisme de Dwyer.

Définition

Soient k_1 et k_2 deux entiers naturels. On note $\partial\Delta[k_1, k_2]$ le plus grand sous-bicomplexe simplicial de $\Delta[k_1, k_2]$ qui ne contient pas son (k_1, k_2)-bisimplexe non dégénéré.

Proposition

Pour tous entiers naturels k_1 et k_2, l'inclusion $\partial\Delta[k_1, k_2] \to \Delta[k_1, k_2]$ induit un morphisme de Dwyer

$$K_\xi \partial\Delta[k_1, k_2] \to K_\xi \Delta[k_1, k_2] = \xi_t \xi_i \left(\hat{\mathbb{k}_1} \times \check{\mathbb{k}_2} \right).$$

Proposition

Tout monomorphisme $L \to M$ d'ensembles bisimpliciaux induit un morphisme de Dwyer $K_\xi L \to K_\xi M$.

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on voit L comme un objet de M. Pour tout entier $n \geq -1$, on note M^n le plus petit objet de M contenant les (i, j)-bisimplexes tels que $i + j \leq n$. On note aussi $\Delta_n(M, L)$ l'union disjointe d'autant de copies de $\Delta[i, j]$ qu'il y a de (i, j)-bisimplexes non dégénérés tels que $i + j = n$ dans $(M^n \cup L) \setminus \left(M^{n-1} \cup L\right)$. De même, $\partial\Delta(M, L)$ désigne l'union disjointe d'autant de copies de $\partial\Delta[i, j]$ qu'il y a de (i, j)-bisimplexes non dégénérés tels que $i + j = n$ dans $(M^n \cup L) \setminus \left(M^{n-1} \cup L\right)$. □

On a un poussé-en-avant dans s**S**

$$\begin{tikzcd}
\partial\Delta_n(M,L) \arrow[r] \arrow[d] & M^{n-1}\cup L \arrow[d] \\
\Delta_n(M,L) \arrow[r] & M^n \cup L
\end{tikzcd}$$

qui donne le poussé-en-avant suivant par application du foncteur K_ξ :

$$\begin{tikzcd}
K_\xi\left(\partial\Delta_n(M,L)\right) \arrow[r] \arrow[d] & K_\xi\left(M^{n-1}\cup L\right) \arrow[d] \\
K_\xi\left(\Delta_n(M,L)\right) \arrow[r] & K_\xi\left(M^n \cup L\right)
\end{tikzcd}$$

Or, d'après la proposition précédente, $K_\xi\left(\partial\Delta_n(M,L)\right) \to K_\xi\left(\Delta_n(M,L)\right)$ est un morphisme relatif de Dwyer et donc par stabilité par poussé-en-avant, $K_\xi\left(M^{n-1}\cup L\right) \to K_\xi\left(M^n\cup L\right)$ est un morphisme relatif de Dwyer.

Enfin, on remarque que $M = \bigcup_{n \geq -1} (M^n \cup L)$ et donc que $K_\xi M = \bigcup_{n \geq -1} K_\xi (M^n \cup L)$. Le morphisme

$$K_\xi L \to K_\xi \left(M^{n-1} \cup L\right) \to K_\xi (M^n \cup L) \to \bigcup_{n \geq -1} K_\xi (M^n \cup L) = K_\xi M,$$

composé de morphismes relatifs de Dwyer est donc - par stabilité par composition - un morphisme relatif de Dwyer.

□

Remarque

On montre que $K_\xi L \to K_\xi M$ est en fait un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés relatifs.

"Lemme-clef" - 1

Lemme

On considère le poussé-en-avant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "j"] \\ B \arrow[r, "t"'] & D \end{tikzcd}$$

dans **RelCat**, de sorte que i soit un morphisme de Dwyer. Alors le morphisme induit

$$NB \coprod_{NA} NC \to ND$$

est une équivalence faible de la structure de modèle de Reedy sur s**S**.

"Lemme-clef" - 2

Lemme

On considère le poussé-en-avant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "j"] \\ B \arrow[r, "t"'] & D \end{tikzcd}$$

dans **RelCat**, de sorte que i soit un morphisme de Dwyer. Si Ni est une équivalence faible, alors Nj en est une également. Si Ns est une équivalence faible, alors Nt en est une également.

Corollaire

Puisque la transformation naturelle $\pi^* : N \to N_\xi$ est une équivalence naturelle de Reedy, on déduit des lemmes précédents que dans la situation de ces lemmes :

- le morphisme induit

$$N_\xi B \coprod_{N_\xi A} N_\xi C \to N_\xi D$$

  est une équivalence faible de la structure de modèle de Reedy sur s$\mathbf{S}$;
- si $N_\xi i$ est une équivalence faible, alors $N_\xi j$ en est une également ;
- si $N_\xi s$ est une équivalence faible, alors $N_\xi t$ en est une également.

Caractérisation des équivalences faibles de la structure de Reedy

On note $\eta_\xi : \mathrm{id}_{s\mathbf{S}} \Rightarrow N_\xi K_\xi$ l'unité de l'adjonction $K_\xi : s\mathbf{S} \rightleftharpoons \mathbf{RelCat} : N_\xi$.

Proposition

L'unité η_ξ est une équivalence faible naturelle de la structure de modèle de Reedy sur $s\mathbf{S}$ - et donc de toute localisation de Bousfield à gauche de celle-ci.

Corollaire

Les équivalences faibles de la structure de Reedy - et de ses localisations de Bousfield à gauche - sont les morphismes $f : L \to M$ d'ensembles bisimpliciaux tels que le morphisme $N_\xi K_\xi f : N_\xi K_\xi L \to N_\xi K_\xi M$ d'ensembles bisimpliciaux soit une équivalence faible de la structure de Reedy - et donc de toutes ses localisations de Bousfield à gauche.

On a une adjonction

$$K_\xi : s\mathbf{S} \rightleftharpoons \mathbf{RelCat} : N_\xi.$$

La structure de modèle sur s**S** se relève en une structure de modèle cofibrement engendrée sur **RelCat**. En effet,

- s**S** est cofibrement engendrée ;
- l'argument du petit objet s'applique aux monomorphismes de s**S** et aux monomorphismes $L \to M$ de **RelCat** tels que tout morphisme $L(P, -) \to M(p, -)$ induise une équivalence d'homotopie entre les réalisations géométriques ;
- on a vu que si f est une équivalence faible de s**S**, alors $N_\xi K_\xi f$ est une équivalence faible de **RelCat**. En particulier, $N_\xi K_\xi$ envoie toute cofibration triviale de s**S** sur une équivalence faible. Or, le foncteur K_ξ envoie tout monomorphisme de s**S** sur un morphisme de Dwyer (donc "préserve les cofibrations génératrices"), les morphismes de Dwyer sont stables par poussé-en-avant et par composition et le foncteur N_ξ envoie tout poussé-en-avant d'un morphisme de Dwyer sur une équivalence faible.

Preuve du théorème principal

Description des équivalences faibles, des fibrations ; un critère pour les cofibrations et les objets cofibrants

- D'après le théorème de relèvement des structures de modèle, les équivalences faibles de **RelCat** sont les morphismes dont l'image par N est une équivalence faible de s**S** et les fibrations de **RelCat** sont les morphismes dont l'image par N est une fibration de s**S**.
- Toute cofibration de **RelCat** est un morphisme de Dwyer. En effet, on sait d'après le théorème de relèvement que les cofibrations génératrices de **RelCat** sont les images par K_ξ des monomorphismes de s**S**. Or, on a vu que tout l'image par K_ξ de tout monomorphisme est un morphisme de Dwyer et on conclut donc par stabilité par rétraction, par poussé-en-avant et par composition des morphismes de Dwyer.
- Avec les mêmes arguments, on montre que tout objet cofibrant de **RelCat** est un ensemble partiellement ordonné relatif.

La structure de modèle de Reedy sur s**S** et la structure de modèle sur **RelCat** construite par relèvement de celle-ci sont équivalentes - plus précisément, l'adjonction $K_\xi : s\mathbf{S} \rightleftharpoons \mathbf{RelCat} : N_\xi$ est une équivalence de Quillen.

En effet, tout morphisme de **RelCat** est une équivalence faible si et seulement si son image par N_ξ en est une et l'unité de l'adjonction η est une équivalence faible.