Complete Segal spaces.

I. Les espaces simpliciaux

intro nouveau modèle pour les $(\infty,1)$-catégories, comme qCat, Cat_Δ

→ les espaces de Segal complets (CSS)

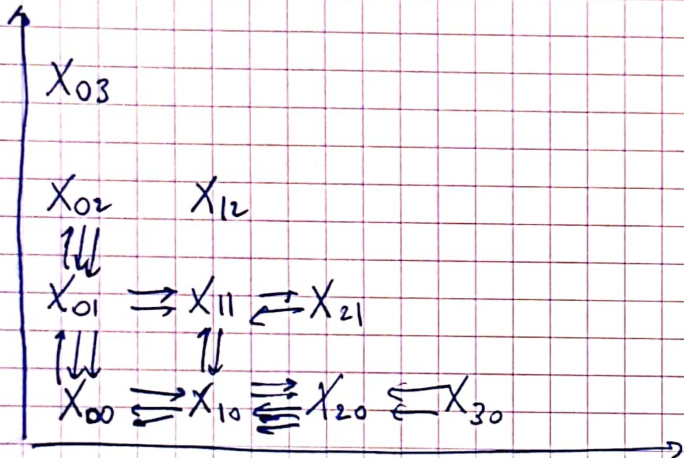
qCat : vit dans sSet, dont c'est les objets fibrants.

Cat_Δ : dans les cat simpliciales

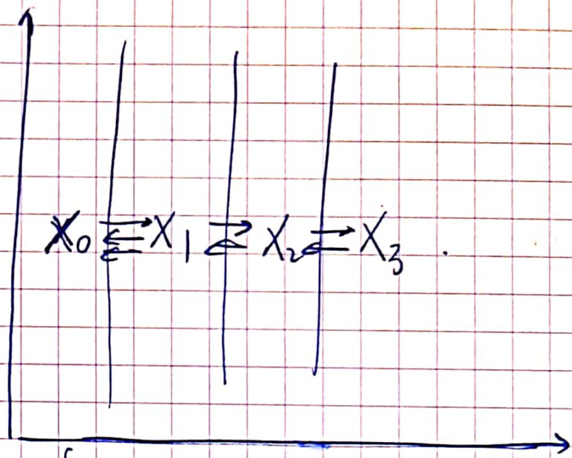
les CSS sont des ensembles bisimpliciaux : $Set^{\Delta^{op} \times \Delta^{op}}$

$\cong (Set^{\Delta^{op}})^{\Delta^{op}} = sSet^{\Delta^{op}}$ → "espaces" simpliciaux = sSpaces ou sS

2 façons 1. Présentation.

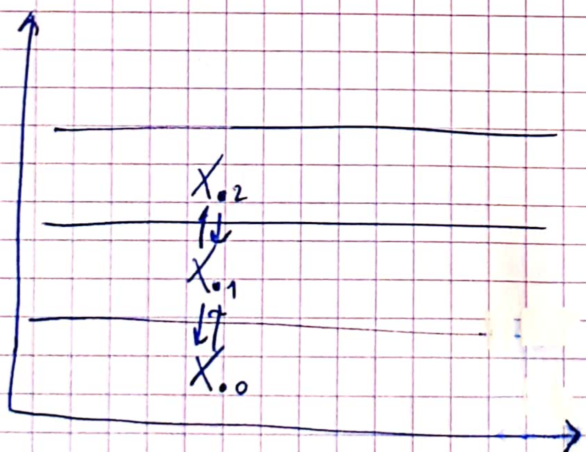


où X_{ij} sont des ensembles.



où les $X_n \in sSet$

chaque colonne est un ensemble simplicial



chaque ligne est un ensemble simplicial.

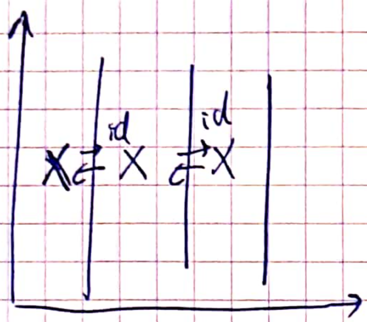
on va voir des exemples qui vont montrer l'intérêt de cette structure

a) $sSet \xrightarrow{\text{plongement fidèle}} sSpace = sSet^{\Delta^{op}}$ de trois façons.

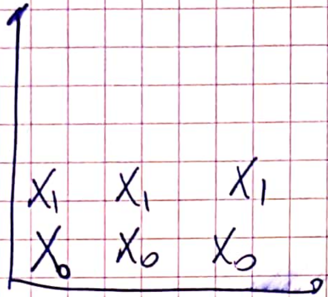
plongement vertical. si $X \in sSet$,

on associe $\mathcal{X}$ tq $\forall n,\ \mathcal{X}_{n\bullet} = X$

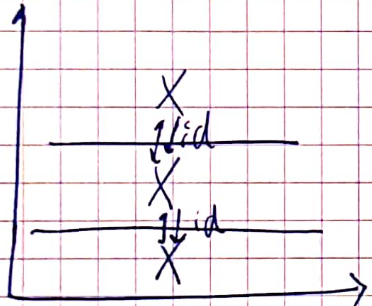
on notera $\mathcal{X} = X$



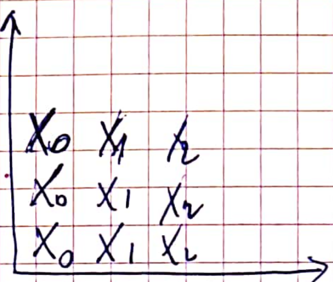
=



plongement horizontal.



qu'on notera X^t

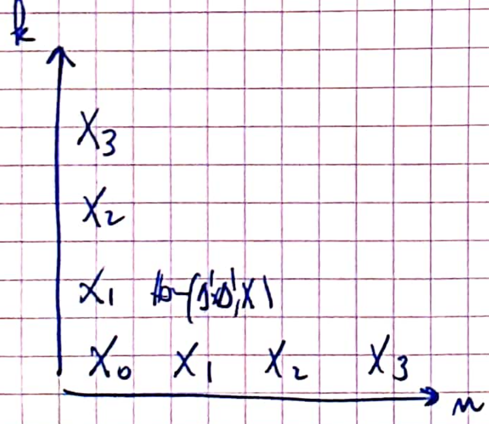


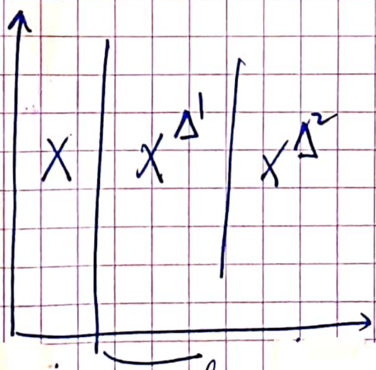
Rq pareil que le plongement $Set \hookrightarrow sSet$

troisième plongement.

$$\begin{array}{ccl} sSet & \hookrightarrow & sSpace \\ X & \longmapsto & \mathcal{X} \text{ tq } \mathcal{X}_n = Map(\Delta_n, X) = X^{\Delta^n} \end{array}$$

ie $\mathcal{X}_{nk} = Hom(\Delta_n \times \Delta_k, X)$.





la colonne 1 = des flèches

on verra que c'est un plongement avec de meilleures propriétés

b) $Cat_\Delta \hookrightarrow$ sSpace via le "nerf simplicial" sN

Rappel : on peut voir une catégorie simpliciale $\mathcal{C}$ comme un objet simplicial dans Cat :

$\vdots$

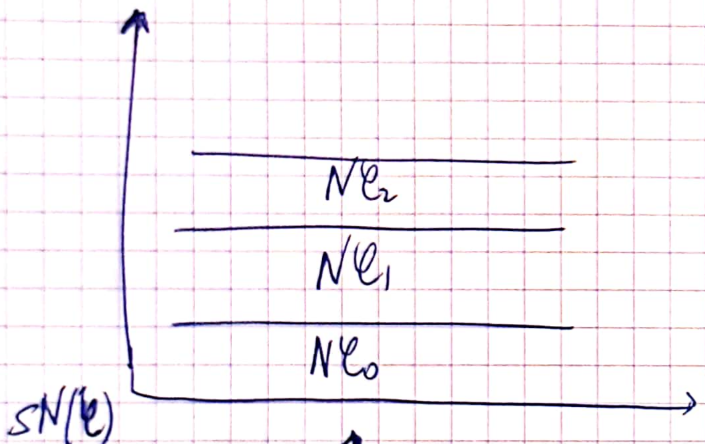
$\mathcal{C}_2$ où toutes les $\mathcal{C}_n$ ont les mêmes objets que $\mathcal{C}$

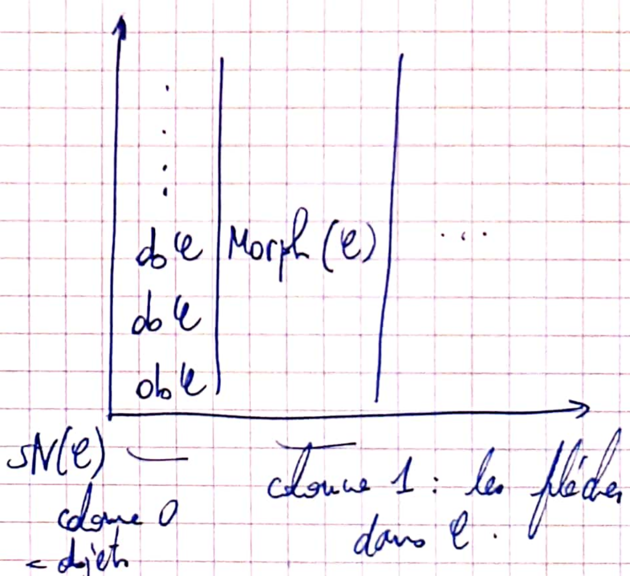
$\mathcal{C}_1$ } morphismes de degré 1 de $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}_1(x,y) = \mathcal{C}(x,y)_1$

$\mathcal{C}_0$ } morphismes de $\mathcal{C}_0$: morphismes de degré 0 de $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}_0(x,y) = \mathcal{C}(x,y)_0$

on applique le nerf usuel à chaque niveau :





on observe un principe philosophique des sSpaces :
horizontalement, info "catégorique"
verticalement, info "homotopique"

<u>bilan</u> contient sSet, Cat_Δ → puissant
version des cat simpliciales à homotopie près

pour faire des cat à homotopie près, $Cat \xhookrightarrow{N} sSet$

pour faire des cat simpliciales à ——, $\underbrace{sCat}_{Cat_\Delta} \xhookrightarrow{sN} \underbrace{s(sSet)}_{sSpace}$.

enrichissement simplicial de sSpace :

où $Map(X,Y)_n = Hom_{sSpace}(X \otimes \Delta^n, Y)$

d° par d°   d° par d°   par plongement vertical

le lemme de Yoneda : $Map(\Delta n^t, X) \simeq X_n$. comme dans sSet

Première
2. Structure de modèle sur sSpace
pas directement la bonne, on devra la raffiner → c'est une base

sSpace = $sSet^{\Delta^{op}}$ est du type C^I, ie une "catégorie de diagrammes"

a) structure injective : on a vu qu'on pourrait mettre une structure projective ou une structure de modèle injective sous conditions.
on s'interesse à la structure injective

hypothèses Δ^{op} et petite, $sSet_{(Kan)}$ est cofibrement engendrée + presentable = combinatoire
donc il existe une structure injective sur $sSpace = sSet^{\Delta^{op}}$ tq :

W = eqv faible d'ens simpl degré par degré
$\mathcal{C}$ = cofibration d'ens simpl degré par degré ie mono
$\mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap W)^{\perp}$

on va s'interesser aux objets fibrants ; on veut une description explicite des fibrations.

pour ça, on va faire un détour par la structure de modèle de Reedy sur $sSpace = sSet^{\Delta^{op}}$, on va mq dans notre cas c'est la même

b) Structure de Reedy sur $\mathcal{C}^{\Delta^{op}}$

marche en général pour $\mathcal{C}^{I}$ où I est une catégorie de Reedy. (cf exam homotopie 2), mais on le fait pour $I = \Delta^{op}$.

$\mathcal{C}$ cat modèle fermée

thm. $\mathcal{C}^{\Delta^{op}}$ admet une structure de modèle de Reedy

pas important pour nous

(propre et cofibrement engendrée) tq :

W = eqv faible dans $\mathcal{C}$ degré par degré

$Cof = \{ f : X \to Y$ tq $\forall n$ $sk_{n-1}Y_n \sqcup_{(sk_{n-1}X)_n} X_n \to Y_n$ cof dans $\mathcal{C} \}$

$fibr = \{ f : X \to Y$ tq $\forall n$ $X_n \to (cosk_{n-1}X)_n \times_{cosk_{n-1}(Y)_n} Y_n$ fibr dans $\mathcal{C} \}$

où sk_n est le n-squelette

et $cosk_n$ l'adjoint à droite de sk_n.

prop. dans le cas où $\mathcal{C} = sSet$ (et donc $\mathcal{C}^{\Delta^{op}} = sSpace$), la structure de Reedy est la même que la structure injective !

ainsi, W = eqv faible degré par degré

C = monomorphismes

les objets fibrants sont les $X \in sSet^{\Delta^{op}}$, tq $X \to *$ fibration

ie $X_n \to (cosk_{n-1}X)_n$ fibration

Rq. $(cosk_{n-1}X)_n = Map(\Delta_n^t, cosk_{n-1}X)$
$= Map(sk_{n-1}\Delta_n^t, X)$
$= Map(\partial\Delta_n^t, X)$.

X Reedy fibrant $\Leftrightarrow \forall n, X_n \to Map(\partial\Delta_n^t, X)$ est une fibration de Kan

à retenir

flèche dans sSet

"qui à un mon simplexe associe son bord" les espaces simpliciaux Reedy fibrants vont être très importants dans la suite, étudions-les un peu.

prop. $X \in sSpace$
si X Reedy fibrant, alors $\forall n$, X_n est un complexe de Kan.

preuve par récurrence

$\underline{n=0}$ $X_0 \longrightarrow Map(\partial\Delta_0^t, X) = Map(\phi, X) = *$ fibration.

ie X_0 fibrant

• si $\forall k<n$, X_k fibrant

$X_n \longrightarrow \underline{Map(\partial\Delta_n^t, X)}$ fibration

$= eq\left(\prod X_{n-1} \rightrightarrows \prod X_{n-2}\right)$ fibrant comme limite d'objets fibrants

donc X_n fibrant

MAIS ce n'est pas équivalent

prop. $X \in sSpace$ Reedy fibrant.
alors $(d_1, d_0) : X_1 \longrightarrow X_0 \times X_0$ est une fibration de Kan
dans sSet

preuve. $X_1 \longrightarrow Map(\partial\Delta_1^t, X) = Map(* \sqcup *, X) = X_0 \times X_0$.