Cours du 9/05/2023.

Calcul explicite du degré d'une application:

$f : S^n \to S^n$ surjective (sinon $\deg f = 0$ voir TD).
On suppose qu'il existe $y \in S^n$ tel que $f^{-1}(y)$ est fini
$f^{-1}(y) = \{x_1, .., x_r\}$
Soit V un voisinage de y, et U_i voisinage de x_i, $1 \leq i \leq r$
tel que $f(U_i) \subset V$ et $U_i \cap U_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

Déf degré local par rapport à x_i.
$\deg f|_{x_i}$ est l'unique entier tel que

$$\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|}{H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|}{H_n(V, V \setminus \{y\})}}$$

soit la multiplication par $\deg f|_{x_i}$.

Remarque : bien défini car par excision on a
$S^n = V \cup S^n \setminus \{y\}$
donc $H_*(V, V \setminus \{x\}) \longrightarrow H_*(S^n, S^n \setminus \{x\})$ est un iso
et la suite exacte longue

$$\underset{0}{\underset{\|}{H_k(S^n \setminus \{x\})}} \longrightarrow H_k(S^n) \underset{\underline{\text{iso}}}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} H_k(S^n, S^n \setminus \{x\}) \to \underset{0}{\underset{\|}{H_{k-1}(S^n \setminus \{x\})}}$$

<u>Prop</u> $\operatorname{Deg} f = \sum_{i=1}^{r} \deg f|_{x_i}$ –

Application $P_n(\mathbb{R}) = S^n/_{x\sim -x} \overset{\alpha}{\underset{\longrightarrow}{\approx}} D^n/_{x\sim -x,\ x\in S^{n-1}}$

$$\approx P_{n-1}(\mathbb{R}) \cup_{q_{n-1}} e^n$$

où
$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{q_{n-1}} & P_{n-1}(\mathbb{R}) \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ D^n & \longrightarrow & P_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

Soit $g : S^n \xrightarrow{q_n} P_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\alpha^{-1}} D^n/_{x\sim -x,\ x\in S^{n-1}} \xrightarrow{\pi} P_n(\mathbb{R})/_{P_{n-1}(\mathbb{R})} = S^n$

Soit N et S les pôles de S^n – On a $g^{-1}(N) = \{N, S\}$.
Soient W_N et W_S des voisinages de ces pôles dans S^n et V un voisinage du pôle N dans S^n tq $g(W_N) \subset V$ $g(W_S) \subset V$.
$g|_{W_N} : W_N \to V$ est homotope à l'identité
et $g|_{W_S} : W_S \to V$ ——————— $x \mapsto -x$.

$\Rightarrow$ $\deg g = \deg g|_{\{N\}} + \deg g|_{\{S\}} = 1 + (-1)^{n+1}$
$\deg g = 0$ si n est pair et 2 si n est impair –

Dém de la proposition

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(U_i, U_i\setminus\{x_i\}) \arrow[r, "f_*^{x_i}"] \arrow[d, "k_i"] \arrow[dl, "id"'] & H_n(V, V\setminus\{y\}) \arrow[d, "id"] \\
H_n(S^n, S^n\setminus\{x_i\}) & H_n(S^n, S^n\setminus f^{-1}(y)) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "f_*^y"] & H_n(S^n, S^n\setminus\{y\}) \\
 & H_n(S^n) \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f_*"] \arrow[ul, "id"] & H_n(S^n) \arrow[u, "id"]
\end{tikzcd}$$

<u>Par excision</u> : $W = \coprod_{i=1}^{r} U_i$ $\qquad S = S^n \setminus f^{-1}(y)$.

$$H_n\left(W, \coprod_{i=1}^{r} U_i\setminus\{x_i\}\right) \xrightarrow[\text{iso}]{\sim} H_n(S^n, S)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$\bigoplus_{i=1}^{r} H_n(U_i, U_i\setminus\{x_i\}) \xrightarrow{\sim} H_n(S^n, S^n\setminus f^{-1}(y))$$

$$\| $$

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}.$$

On a $p_i \circ j = id$ $\forall i$, donc j est l'unique morphisme de groupe abélien tel que $j(1) = \underbrace{(1,..,1)}_{r\text{ fois}}$.

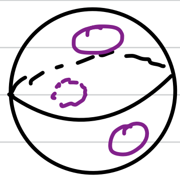
On a $k_i(1) = (0,..,\underset{\uparrow \text{ en place } i}{1},0,..,0)$

ce qui donne pour $\deg f = f_*(1)$,
$$\deg f = f_*^y j(1) = f_*^y(1,..,1) = \sum_{i=1}^{r} f_*^y \circ k_i(1) = \sum_{i=1}^{r} \deg f|_{x_i}.$$

Prop $\forall k \in \mathbb{Z}$ il existe une application continue $f : S^n \to S^n$ de degré k.

Dém • pour $n=1$.
on a vu que $z \mapsto z^k$ est de degré k.

• Fixons $k \geq 1$
• Fixons $\coprod_{i=1}^{k} D^n \xrightarrow{j = \sqcup j_i} S^n$.



$X = S^n \setminus \operatorname{Im} j$.

on a $S^n / X \simeq \bigvee_{i=1}^{k} S^n$

On note $q : S^n \to S^n/X = \bigvee_{i=1}^{k} S^n$ et $p : \bigvee_k S^n \to S^n$

qui vaut l'identité sur chaque sphère.

Calculons le degré $f = pq : S^n \to S^n$.

On a pour $y \in S^n \setminus N$.
$f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, .., x_k\}$ et il existe des ouverts U_i, U tq f réalise un homéo : $U_i \to U$.
donc $\deg f|_{x_i} = \pm 1$. quitte à composer j_i par une réflexion on peut donc supposer $\deg f|_{x_i} = 1$ $\forall i$ ou $\deg f|_{x_i} = -1$ $\forall i$.
cela nous fournit donc une application de degré k ou $-k$.
pour $k=0$ il suffit de prendre une application constante.

7 - Attachement cellulaire et homologie

On rappelle que si X est obtenu à partir de A par adjonction de cellules alors $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ induit un iso en homologie.

$\Rightarrow$ $H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X/A, A/A) = \tilde{H}_n(X/A)$ est un iso.

exo 3 TD 10

Thm Soit $f : S^{n-1} \to X$ une application continue et $Y = X \cup_f e^n$ on a :

1) $\tilde{H}_k(Y) \cong \tilde{H}_k(X)$ $\forall k \neq n, n-1$

2) La suite suivante est exacte :

$$0 \to \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y) \to \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} \tilde{H}_{n-1}(X) \to \tilde{H}_{n-1}(Y) \to 0$$

Dém on écrit la suite exacte longue associée à la paire (Y, X) et on a $Y/X \simeq S^n$.

$$\begin{tikzcd}
\to H_{k+1}(Y,X) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \tilde{H}_k(X) \arrow[r] & \tilde{H}_k(Y) \arrow[r] & H_k(Y,X) \to \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
\tilde{H}_{k+1}(S^n) \arrow[d, phantom, "\parallel"] & & & \tilde{H}_k(S^m) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
0 \text{ pour } k \neq n-1 & & & 0 \text{ pour } k \neq n
\end{tikzcd}$$

d'où si $k \neq n, n-1$ on a $\tilde{H}_k(Y)$ est isomorphe à $\tilde{H}_k(X)$.

Puis $(D^n, S^{n-1}) \to (Y, X)$ donne un morphisme entre les deux suites exactes longues associées aux paires.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{H}_n(X) \arrow[r] & \tilde{H}_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,X) \arrow[r] & H_{n-1}(X) \arrow[r] & H_{n-1}(Y) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}_n(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[u, "\tilde{H}_n(f)"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \tilde{H}_n(D^n) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & H_n(D^n, S^{n-1}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u, "\wr"] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[u, "H_{n-1}(f)"] & H_{n-1}(D^n) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & 0 \\
& 0 & 0 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\boxtimes$

<u>Cor</u>: $\tilde{H}_k(P_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & , \forall\ k<n \text{ et } k \text{ impair} \\ \mathbb{Z} & , \text{pour } k=n \text{ si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

<u>Dém</u> Par récurrence sur n

<u>$n=1$</u> $P_1(\mathbb{R}) \simeq S^1 \Rightarrow H_0(P_1(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ et $H_1(P_1(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$

<u>$n=2$</u> $P_2(\mathbb{R}) = P_1(\mathbb{R}) \cup_{q_1} e^2$ $\quad q_1 : S^1 \to S^1/_{x \sim -x}$

en identifiant $P_1(\mathbb{R})$ avec S^1 via l'homéo

$S^1/_{x\sim -x} \to S^1$ $\quad$ q_1 devient $S^1 \to S^1$ de degré 2.
$x \mapsto x^2$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $z \mapsto z^2$

$$0 \to \underset{=0}{\tilde{H}_2(P_1(\mathbb{R}))} \to \tilde{H}_2(P_2(\mathbb{R})) \to \underbrace{\tilde{H}_1(S^1) \to \tilde{H}_1(P_1(\mathbb{R}))}_{\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}} \to \tilde{H}_1(P_2(\mathbb{R})) \to 0$$

$\Rightarrow \tilde{H}_1(P_2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\tilde{H}_2(P_2(\mathbb{R})) = 0$

Supposons le résultat vrai pour tout $l \leq 2n$.

On a alors :

$P_{2n+1}(\mathbb{R}) = P_{2n}(\mathbb{R}) \cup_{q_{2n}} e^{2n+1}$ $\quad q_{2n} : S^{2n} \to S^{2n}/_{x\sim -x}$

La suite exacte s'écrit donc:

$$0 \to \tilde{H}_{2n+1}(P_{2n+1}(\mathbb{R})) \to \underset{\shortparallel\ \mathbb{Z}}{\tilde{H}_{2n}(S^{2n})} \to \underset{\shortparallel\ 0}{\tilde{H}_{2n}(P_{2n}(\mathbb{R}))} \to \tilde{H}_{2n}(P_{2n+1}(\mathbb{R})) \to 0$$

par hypothèse de récurrence.

donc $\tilde{H}_{2n}(P_{2n+1}(\mathbb{R})) = 0$ et $\tilde{H}_{2n+1}(P_{2n+1}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$.

Par ailleurs pour $k \neq 2n, 2n+1$ $\tilde{H}_k(P_{2n+1}(\mathbb{R})) = \tilde{H}_k(P_{2n}(\mathbb{R}))$
d'où le résultat ($=0$ sauf en degré k impair et $< 2n$).

Enfin $P_{2n+2}(\mathbb{R}) = P_{2n+1}(\mathbb{R}) \cup_{q_{2n+1}} e^{2n+2}$

le calcul fait p2 du degré de l'aplication g pour $P_{2n+1}(\mathbb{R})$

$$g : S^{2n+1} \xrightarrow[q_{2n+1}]{} P_{2n+1}(\mathbb{R}) \underset{\pi}{\twoheadrightarrow} P_{2n+1}(\mathbb{R})/P_{2n}(\mathbb{R}) = S^{2n+1}$$

est de degré $2 = 1 + (-1)^{2n+2}$.

Posons $X = P_{2n}(\mathbb{R})$ $Y = P_{2n+1}(\mathbb{R})$ on a $Y = X \cup_{q_{2n}} e^{2n+1}$.
la suite exacte

$$0 \to H_{2n+1}(Y) \to \underset{\underset{H_{2n+1}(S^{2n+1})}{\wr\wr}}{H_{2n+1}(Y,X)} \to \underset{\underset{0}{\parallel}}{H_{2n}(X)} \to H_{2n}(Y) \to \cdots$$

donne

$$H_{2n+1}(P_{2n+1}(\mathbb{R})) \xrightarrow[H_{2n+1}(\pi)]{} H_{2n+1}(S^{2n+1}) \text{ est un isomorphisme.}$$

On en déduit donc que $H_{2n+1}(q_{2n+1})$ est la multiplication par 2 ou par -2.

Ainsi de la suite exacte

$$0 \to \tilde{H}_{2n+2}(P_{2n+2}(\mathbb{R})) \to \underset{\underset{\mathbb{Z}}{\wr\wr}}{\tilde{H}_{2n+1}(S^{2n+1})} \to \underset{\underset{\mathbb{Z}}{\wr\wr}}{\tilde{H}_{2n+1}(P_{2n+1}(\mathbb{R}))} \to \tilde{H}_{2n+1}(P_{2n+2}(\mathbb{R})) \to 0$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow[H_{2n+1}(q_{2n+1})]{\times \varepsilon 2} \mathbb{Z}$$

on déduit :
$\tilde{H}_{2n+2}(P_{2n+2}(\mathbb{R})) = 0$ et $\tilde{H}_{2n+1}(P_{2n+2}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque sur l'homologie à coefficients dans R un anneau quelconque ou plus généralement un groupe abélien -

les raisonnements faits sur les suites exactes associées à un attachement cellulaire restent les mêmes : plus précisément le théorème p5 est valable pour tous les coefficients -

Pour calculer $H_*(P_n(\mathbb{R}), R)$ il faut retravailler les suite exactes -car on verra apparaître des morphismes de type $R \xrightarrow[\times 2]{} R$.

Si l'on refait le calcul on obtient le résultat suivant:

$$\tilde{H}_k(P_n(\mathbb{R}), R) = \begin{cases} \ker(R \xrightarrow{\times 2} R) & 0 < k \leq n \text{ et } k \text{ pair} \\ R/2R & \text{si } k < n \text{ et } k \text{ impair} \\ R & \text{si } k = n \text{ et } n \text{ impair} \\ 0 & k > n, k = 0 \end{cases}$$

en particulier si $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on obtient

$$H_k(P_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \forall\, 0 \leq k \leq n$$
$$= 0 \quad \text{pour } k > m$$

8- Homologie cellulaire

On fixe X un CW-complexe. On note A_n l'ensemble des n-cellules. $X^{(k)}$ son k-ième squelette.

Prop

a) $H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = 0 \quad \forall k \neq n$

b) $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de base e_α^n, $\alpha \in A_n$

c) $H_k(X^{(n)}) = 0 \quad \forall k > n$.

d) Si X est de dim finie N alors $H_k(X) = 0 \quad \forall k > N$.

e) L'inclusion canonique $X^{(n)} \longrightarrow X$ induit un iso $H_k(X^{(n)}) \to H_k(X) \quad \forall k < n$.

Dém : Comme $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ est une bonne paire on a $H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = \tilde{H}_k(X^{(n)}/X^{(n-1)})$ et $X^{(n)}/X^{(n-1)} \simeq \bigvee_{\alpha \in A_n} S^n$

Or, si A, B sont correctement pointés on a $\tilde{H}_*(A \vee B) = \tilde{H}_*(A) \oplus \tilde{H}_*(B)$.

En effet, $A \vee B = A \sqcup B / x_A \sim x_B$. Donc

$$\tilde{H}_*(A \vee B) = H_*(A \sqcup B, x_A \sqcup x_B) = H_*(A, x_A) \oplus H_*(B, x_B)$$
$$= \tilde{H}_*(A) \oplus \tilde{H}_*(B).$$

Ceci permet de conclure les points a) et b).

c) est démontré par récurrence sur n. Pour $n=0$ $X^{(0)}$ est un espace discret donc $H_k(X^{(0)}) = 0$, $\forall k > 0$.

Si c'est vrai au rang n on applique la suite exacte longue associée à la paire $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$ ce qui donne

$$H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \to H_k(X^{(n)}) \to H_k(X^{(n+1)}) \to H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \to 0$$

$$\to \underset{\substack{=0 \\ \text{pour } k>n \\ \text{donc pour } k>n+1}}{H_k(X^{(n)})} \to H_k(X^{(n+1)}) \to \underset{=0 \text{ pour } k>n+1}{H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)})} \to$$

d) Si X est de dimension finie N, alors $X = X^{(N)}$ donc $H_k(X) = 0$ pour $k > N$.

e) Supposons d'abord que X est de dim finie N.
Par a et b pour $k < n$ on a $H_k(X^{(n)}) \to H_k(X^{(n+1)})$ est un iso car $H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) = H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}) = 0$
on obtient alors

$$H_k(X^{(n)}) \to H_k(X^{(n+1)}) \to \dots \to \underset{= H_k(X)}{H_k(X^{(N)})}$$

sont tous des iso pour $k < n$

Supposons X quelconque et considérons c un k-cycle de X, avec $k < n$.
$c = \sum \alpha_i \tau_i$ avec $\tau_i : \Delta^k \to X$
Δ^k compact donc $\tau_i(\Delta^k)$ intersecte un nombre fini de cellules de X. Donc $\exists N$ tel que $c \in C_k(X^{(N)})$.
Mais pour $k < n$ on a $H_k(X^{(n)}) \to H_k(X^{(N)})$ (prendre $N > n$) est un iso donc
$\exists ! \, [d] \in H_k(X^{(n)})$ tel que $i_*([d]) = [c]$.
Conclusion $H_k(X^{(n)}) \to H_k(X)$ est un iso $\boxtimes$