Cours du 16/05/23

Homologie cellulaire

On va définir un complexe. $C_n^{cell}(X)$.

- $C_n^{cell}(X) = H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = \bigoplus_{\alpha \in A^n} \mathbb{Z} e_\alpha^n$.
- on va définir une différentielle :

$$\begin{tikzcd} & H_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[dr, "j_{n-1}"] & \\ d_n : H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[rr, "d_n"'] & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \end{tikzcd}$$

On a $d_n d_{n+1} = 0$ car :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & & & \\ & H_n(X^{(n)}) \arrow[dr, "j_n"] & & & \\ H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "d_n"] & & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \arrow[dr, "\partial_n"'] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \\ & & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[ur, "j_{n-1}"'] & \end{tikzcd}$$

$\partial_{n-1} \circ j_m = 0$ à cause de la suite exacte longue d'homologie associée à la paire $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$.

On définit alors l'homologie cellulaire $H_n^{CW}(X)$ comme l'homologie de ce complexe.

Thm Soit X un CW-complexe. $\forall n$ $H_n^{CW}(X) = H_n^{sing}(X)$

Dém : On a $H_n^{sing}(X) = H_n(X^{(n+1)})$
et de la longue suite exacte associée à la paire $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$
on a $H_{n+1}(X^{(n)}) = 0 \to H_{n+1}(X^{(n+1)}) \to H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)})$
$\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X^{(n)}) \to H_n(X^{(n+1)}) \to 0$

Donc $H_n^{sing}(X) \simeq H_n(X^{(n+1)}) \simeq H_n(X^{(n)}) / \mathrm{Im}\, \partial_{n+1}$.

Comme $j_n : H_n(X^{(n)}) \to H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ est injective, elle induit un iso de :
- $\mathrm{Im}\, \partial_{n+1} \to \mathrm{Im}\, j_n \partial_{n+1} = \mathrm{Im}\, d_{n+1}$.
- $H_n(X^{(n)}) \to \mathrm{Im}\, j_n = \mathrm{Ker}\, \partial_n = \mathrm{Ker}\, j_{n-1}\partial_n = \mathrm{Ker}\, d_n$

Cd $H_n^{sing}(X) \simeq H_n(X^{(n)}) / \mathrm{Im}\, \partial_{n+1} \simeq \mathrm{Ker}\, d_n / \mathrm{Im}\, d_{n+1} = H_n^{CW}(X)$ ⊠

Exemple 1 calcul de $H_\cdot(\mathbb{C}P^n)$. Il a été vu en TD que $\mathbb{C}P^n$ a une décomposition cellulaire avec une $2i$ cellule $\forall\ 0 \leq i \leq n$.
Donc le complexe calculant l'homologie cellulaire

$$\cdots \xrightarrow{0} H_2(\mathbb{C}P^{n(2)}, \mathbb{C}P^{n(1)}) \xrightarrow{0} H_1(\mathbb{C}P^{n(1)}, \mathbb{C}P^{n(0)}) \to H_0((\mathbb{C}P^n)^0)$$

$$\begin{array}{ccccc} R & 0 & R & 0 & R \end{array}$$

d'où $H_k^{CW}(\mathbb{C}P^n) = R$ si k pair $\leq 2n$ et 0 sinon.

<u>Ex 2</u> $S^n \times S^n$. une 0 cellule, 2 n cellules, 1 $2n$ cellule.
si $n \geq 2$.
donc
$$H_0(S^n \times S^n, R) = R$$
$$H_n(S^n \times S^n, R) = R \oplus R$$
$$H_{2n}(S^n \times S^n, R) = R$$ et 0 partout ailleurs.

Le cas $n=1$ est le cas du tore qui a déjà été traité en TD. (Même résultat).

Calcul de d_n: $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \to H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$

Cas $n=1$ $d_1 : H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \xrightarrow{\partial} H_0(X^{(0)})$
$$[c] \longmapsto [\partial c].$$

Si $X^{(0)} = *$ alors $\partial c = 0 \Rightarrow d_1 = 0$. et $H_0(X) = H_0(X^{(0)})$.

Cas $n \geq 2$.

$d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$ où $d_{\alpha\beta}$ est le degré de l'application suivante:
$$S_\alpha^{n-1} \xrightarrow{f_\alpha} X^{(n-1)} \twoheadrightarrow X^{(n-1)}/X^{(n-2)} = \bigvee_\beta S_\beta^{n-1} \twoheadrightarrow S_\beta^{n-1}$$ (toutes les autres sont envoyées sur 0).

<u>Remarque</u> : f_α est d'image compacte donc rencontre un nombre fini de cellules $\Rightarrow d_{\alpha\beta} \neq 0$ pour un nombre fini de β.

Dém :

$$\begin{tikzcd}
H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H_n(\Phi_\alpha)"] & \tilde H_{n-1}(\partial D_\alpha^n) \arrow[r, "(\Delta_{\alpha\beta})_*"] \arrow[d, "\tilde H_{n-1}(\varphi_\alpha)"] & \tilde H_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \arrow[d, "\pi(q_\beta)_*"] \\
H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dr, "d_n"'] & \tilde H_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j_{n-1}"] & \tilde H_{n-1}(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}) \arrow[d, "\wr\wr"] \\
 & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \arrow[r, "\approx"] \arrow[ur, "\omega \approx"] & H_{n-1}(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}, X^{(n-2)}/X^{(n-2)})
\end{tikzcd}$$

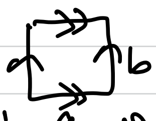
choisissons $[D_\alpha^n] \in H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) = \mathbb{Z}$ un générateur
$e_\alpha^n = [\Phi_\alpha(D_\alpha^n)]$ est un générateur noté e_α^n de $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$.

On a donc $d_n e_\alpha^n = (j_{n-1})_* \partial_n [D_n^\alpha] = (j_{n-1})_* (f_\alpha)_* \underbrace{\partial [D_n^\alpha]}_{\text{générateur de } \tilde H_{n-1}(\partial D_\alpha^n)}$

$= \sum d_{\alpha\beta}\, e_\beta^{n-1}$

via l'iso ω : $\omega\left(\sum d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}\right) = q_* (f_\alpha)_* \partial[D_n^\alpha]$.
$= \sum_\beta (q_\beta q f_\alpha)_* \partial [D_n^\alpha] = \sum_\beta \deg(\Delta_{\alpha\beta})\, e_\beta^{n-1}$.

Ex calcul pour le tore :
1 0-cellule
2 1-cellule
1 2-cellule $\quad S^1 \to S^1_a \vee S^1_b$.



attachée avec le mot $aba^{-1}b^{-1}$.
Donc $S^1 \to S^1_a$ et $S^1 \to S^1_b$ sont de degré 0 $\Rightarrow$ d_2 est 0, d_1 est 0 donne l'homologie du tore —

<u>Exemple</u> $P_\infty(\mathbb{R})$ a une cellule en chaque dimension et on a vu que

$$H_k(P_k(\mathbb{R}), P_{k-1}(\mathbb{R})) \longrightarrow H_{k-1}(P_{k-1}(\mathbb{R}), P_{k-1}(\mathbb{R}))$$

correspond à l'application

$$S^{k-1} \xrightarrow{\pi} P_{k-1}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\pi} P_{k-1}(\mathbb{R}) / P_{k-2}(\mathbb{R}) = S^{k-1}$$

de degré $1+(-1)^k$.

Donc le complexe cellulaire à coeff dans $\mathbb{Z}$ est donné par.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \cdots \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} \\ \cdots & 3 & 2 & & 1 & & 0 \end{array}$$

ce qui donne $H_k(P_\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0. \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & k \text{ impair} \\ 0 & k \text{ pair et } k>0. \end{cases}$

et le résultat déjà obtenu pour $H_k(P_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$ selon la parité de n.

Par ailleurs si l'on regarde à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le complexe cellulaire de $P_\infty(\mathbb{R})$ est défini par

$H_n(P_n(\mathbb{R}), P_{n-1}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $d_n = 0$ $\forall n$.

Donc $H_n(P_\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\forall n$

et $H_k(P_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\forall k \leq n$.

Application (voir TD aussi).

Thm (a) $D \subset S^n$ $D \approx D^k$ $k \geq 0$
alors $\tilde{H}_i(S^n \setminus D) = 0$ $\forall i$

(b) $S \subset S^n$ et $S \approx S^k$ $0 \leq k < n$.
$\tilde{H}_i(S^n \setminus S) = \mathbb{Z}$ $i = n-k-1$
$= 0$ sinon.

Application Si $S \approx S^1$ dans S^2 (courbe fermée de S^2)
alors $\tilde{H}_0(S^2 \setminus S) = \mathbb{Z}$
$\Rightarrow S$ sépare S^2 en deux composantes connexes par arcs.

Dém (a) par récurrence sur k.
- $k = 0$. $S^n \setminus \{x\} \simeq *$
- $D^k \approx I^k$ donc on peut choisir un homéo $h : I^k \to D$

On pose $A = S^n \setminus h(I^{k-1} \times [0, \frac{1}{2}])$ ouvert de S^n
$B = S^n \setminus h(I^{k-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$ ouvert de S^n.
$A \cap B = S^n \setminus D$.
$A \cup B = S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\})$.
On connaît $\tilde{H}_i(A \cup B) = 0$. $\forall i$.
Mayer-Vietoris
$$0 \to \tilde{H}_*(A \cap B) \xrightarrow{j} \tilde{H}_*(A) \oplus \tilde{H}_*(B) \to 0 \text{ sor un iso}$$
Donc $\tilde{H}_*(A \cap B) = \tilde{H}_*(A) \oplus \tilde{H}_*(B)$.
Par l'absurde on suppose qu'il existe $[x] \neq 0 \in \tilde{H}_i(S^n \setminus D)$.
$\partial x = 0$ et $x \neq \partial y$ $\forall y \in C_{i+1}(A \cap B)$.
$j[x] = [x]_A - [x]_B \neq 0$ par exemple $[x_A] \neq 0$

On découpe à nouveau A_1.

$$\underbrace{S^n \setminus h(I^{k-1} \times [0, \tfrac{1}{4}])}_{A_2} \qquad \underbrace{S^n \setminus h(I^{k-1} \times [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}])}_{B_2}$$

$A_2 \cap B_2 = A_1$. $\qquad A_2 \cup B_2 \simeq S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{\tfrac{1}{4}\})$

$\to \tilde{H}_i(A_2 \cup B_2) = 0$.

$\tilde{H}_*(A_1) \simeq \tilde{H}_*(A_2) \oplus \tilde{H}_*(B_2)$.

ainsi on construit une suite d'intervalle

$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_\ell \dots \supset \cap I_n = \{p\}$.

tel que $\forall \ell$, $\exists \alpha_\ell \in C_i(S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_\ell))$ avec $[\alpha_\ell] \neq [0]$.

et $\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_\ell)) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_{\ell+1}))$

$[\alpha_\ell] \longmapsto [\alpha_{\ell+1}]$.

On a ainsi

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus D) \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_\ell)) \to \tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\}))$$

$[\alpha] \neq 0 \longmapsto [\alpha_\ell] \neq 0 \qquad [\alpha] = [0]$.

Donc $\exists \beta \in C_{i+1}(S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\}))$ tq $\partial\beta = \alpha$.

$\beta = \sum \lambda_r \tau_r \qquad \tau_r : \Delta^{i+1} \to S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$. d'image compact

et $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\}) = \bigcup\limits_{\ell} S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_\ell)$.

$\Rightarrow \operatorname{Im} \tau_r \subset$ union finie donc dans un certain I_{ℓ_r}

et donc β aussi a bord —

(b) $S \subset S^n$ $\quad S \cong S^k$. $0 \leq k < n$

$\tilde{H}_i(S^n \setminus S) = \mathbb{Z}$ $i = n-k-1$

$= 0$ sinon.

$k=0$ $\quad S^n \setminus \{a, b\}. \simeq S^{n-1}$. $\quad$ ok.

Puis $\quad S = D_1 \cup D_2 \quad D_1 \cap D_2 \approx S^{k-1}$.

$A = S^n \setminus D_1 \quad B = S^n \setminus D_2. \quad A \cup B = S^n \setminus \underbrace{(D_1 \cap D_2)}_{S'}$.

$A \cap B = S^n \setminus S$.

Mayer Vietoris.

$$\longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus S) \to \underset{0}{\tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)} \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus S') \to \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus S) \to \cdots$$

Donc $\tilde{H}_i(S^n \setminus S) = \tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus S') = \begin{cases} \mathbb{Z} & i+1 = n-(k-1)-1. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$i = n-k-1$ $\quad \blacksquare$.