42- Quelques propriétés des revêtements

- $p: E \to B$ un revêtement CALCA.
  $\rightarrow$ c'est un homéo local donc application ouverte et surjective.

- On rappel que si G agit par auto sur X de manière totalement discontinue alors $X \to X/G$ est un revêtement.

Prop Soit $p: E \to X$ revêtement CALCA. $\mathrm{Aut}(p)$ agit de manière libre et totalement discontinue sur E. En particulier $E \to E/G$ est un revêtement pour tout $G \subset \mathrm{Aut}(p)$.

Dém. E connexe par arcs si $f(x) = x$ avec $f \in \mathrm{Aut}(p)$ alors $f = id$.

- Soit $x \in E$ et $U_i \ni x$ un feuillet au-dessus de U, ouvert trivialisant de px. Soit $f \in \mathrm{Aut}(p)$
On a $U_i \cap fU_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, y, z \in U_i$ tq $y = f(z)$.
$\Rightarrow py = pfz = pz \Rightarrow y = z$ car $p|_{U_i}$ homéo.
Donc $f(y) = y \Rightarrow f = id$.
$\forall G \subset \mathrm{Aut}(p)$ G agit de manière totalement discontinue sur E.

Déf Un revêtement $p: E \to B$ est dit *galoisien* si $p_*(\pi_1(E, x))$ est distingué dans $\pi_1(B, p(x))$.

Prop p est galoisien $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Aut}(p)$ agit transitivement sur les fibres $\Leftrightarrow$ $\forall\, x,y$ tq $px=py$ $p_*(\pi_1(E,x))=p_*(\pi_1(E,y))$

Dem p galoisien $\Leftrightarrow$ $\forall x$ $p_*(\pi_1(E,x))$ distingué dans $p_*(\pi_1(B,px))$. Or les groupes $p_*(\pi_1(E,x))$ pour $x\in p^{-1}(b)$ forment une classe de conjugaison de $\pi_1(B,b)$. D'où l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii)

Par ailleurs si $\forall\, x,y\in p^{-1}(b)$ $p_*(\pi_1(E,x))=p_*(\pi_1(E,y))$ on a

$$\begin{tikzcd} & E_y \arrow[d, "p"] \\ E_x \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

il existe un unique $f\in \mathrm{Aut}(p)$ tq $f\circ x=y$. Ceci conclut l'équivalence i $\Leftrightarrow$ ii $\boxtimes$

Théorème Soit $p: E\to B$ un revêtement galoisien (CALCA) on a $B\simeq E/\mathrm{Aut}(p)$ - et donc $\pi_1(B,b)/p_*\pi_1(E,x)\simeq \mathrm{Aut}(p)$.

Dem par ce qui a été vu précédemment,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & E/\mathrm{Aut}(p) \arrow[r, "\bar p"] & B \end{tikzcd}$$

$\bar p$ est bien définie car $\forall f\in \mathrm{Aut}(p)$ $\forall x\in E$
$p(fx)=px \Rightarrow \bar p(fx)=\bar p(x)$. est continue (topologie quotient sur $E/\mathrm{Aut}\,p$.
$\bar p$ est ouverte car p ouverte, π surj et U ouvert de $E/\mathrm{Aut}(p)$
$\Rightarrow \pi^{-1}(U)$ ouvert de E.
$\bar p$ est surjective et $px=py \Rightarrow \exists!\, f\in \mathrm{Aut}(p)$ tq $fx=y$
$\Rightarrow$ $[x]=[y]\in E/\mathrm{Aut}(p)$ -

Remarque la dem se généralise dans le cas d'un revêtement quelconque sauf que $\bar p$ n'est plus injective (l'action n'est pas forcément transitive)

42- Automorphismes du revêtement universel

Prop B CALCA et vérifiant (S) $p : E \to B$ son revêtement universel.

(i) $\mathrm{Aut}(p)$ agit simplement transitivement sur les fibres de p

(ii) $\mathrm{Aut}(p)$ agit totalement discontinuement sur E

$$B \simeq E/_{\mathrm{Aut}(p)}.$$

(iii) $\forall f \in \mathrm{Aut}(p)$, $\forall x \in p^{-1}(b)$, $\forall \gamma \in \pi_1(B,b)$

$f(x \cdot [\gamma]) = f(x) \cdot [\gamma]$

(iv) Fixons x_0 tel que $p(x_0) = b$. Il existe un unique isomorphisme de groupe $\gamma_{x_0} : \mathrm{Aut}(p) \longrightarrow \pi_1(B,b)$

tel que $f(x_0) = x_0 \cdot \gamma_{x_0}(f)$, $\forall f \in \mathrm{Aut}(p)$.

Dém (i) et (ii) : le revêtement est galoisien.

(iii). Soit $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$.

$x \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$.

On a $p(f\tilde{\gamma}) = p \circ f \circ \tilde{\gamma} = p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

et $(f \circ \tilde{\gamma})(0) = f(x)$. Donc $f\tilde{\gamma}$ est l'unique relèvement de γ tel que $(f\tilde{\gamma})(0) = f(x)$.

$f(x) \cdot [\gamma] = (f \circ \tilde{\gamma})(1) = f(x \cdot [\gamma])$.

iv) On rappelle que $\pi_1(B,b)$ agit à droite sur $p^{-1}(b)$ transitivement et avec stabilisateurs triviaux.

Donc si $x_0 \in p^{-1}(b)$, il existe un unique $\gamma_{x_0}(f) \in \pi_1(B,b)$ tel que $f(x_0) = x_0 \cdot \gamma(f)$.

Montrons que J_{x_0} est un morphisme de groupes.

Soient $f, g \in \mathrm{Aut}(p)$.

On a $fg(x_0) = f(g(x_0)) = f(x_0 \cdot J_{x_0}(g)) = f(x_0) \cdot J_{x_0}(g)$
$= x_0 \cdot J_{x_0}(f) J_{x_0}(g)$
$= x_0 \cdot J_{x_0}(fg)$

Comme l'action est libre on a $J_{x_0}(fg) = J_{x_0}(f) J_{x_0}(g)$.

il est injectif : si $J_{x_0}(f) = e$ alors $f(x_0) = x_0 \Rightarrow f = id$

il est surjectif : $\forall \gamma \in \pi_1(B, b)$ il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma} : x_0 \rightsquigarrow y_0$ puis il existe un unique f tq $f(x_0) = y_0 = x_0 \cdot \gamma$.

$\boxtimes$

<u>Corollaire</u> $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$.

Le revêtement $\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$ est universel ($\mathbb{R}$ est contractile).

$\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translations. Ce qui induit un morphisme

$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(p)$ qui est un isomorphisme car $\mathbb{Z}$ agit librement transitivement sur les fibres. $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1)$.

5 - Correspondance de Galois

<u>Thm</u> Soit B CALCA, semi-localement simplement connexe et $b_0 \in B$.

Alors il y a une bijection

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{c} \text{revêtements } p : E \to B \text{ avec } E \text{ connexe} \\ \text{et } x \in p^{-1}(b) \end{array} \right\} \Big/ \begin{array}{l}\text{iso}\\ \text{de rev}\\ \text{pointés}\end{array} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-groupes} \\ \text{de } \pi_1(B, b) \end{array} \right\}$$

$$(E, p, x) \longmapsto p_*(\pi_1(E, x))$$

Dém on a déjà vu que (E,p,x) iso à (E',p',x')
$\iff p_*(\pi_1(E,x)) = p'_*\pi_1(E',x')$.

surjectivité Soit $\tilde{p}:(\tilde{B},\tilde{x}) \longrightarrow (B,b)$ le revêtement universel de B.

$$\gamma : \mathrm{Aut}(\tilde{p}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(B,b)$$
$$f \longmapsto \gamma(f) \text{ tq } f(\tilde{x}) = \tilde{x}\cdot\gamma(f))$$

Soit $\Gamma \subseteq \pi_1(B,b)$ nn trivial (sinon $\Gamma = \{e\}$ prendre $\tilde{B}$, $\Gamma = \pi_1(B,b)$ prendre B)

$\gamma^{-1}(\Gamma)$ sous groupe de $\mathrm{Aut}(\tilde{p})$ agit de manière totalement discontinue sur $\tilde{B}$ - (par automorphisme).

$$\underset{\text{revêtmt.}}{\tilde{B} \overset{P}{\twoheadrightarrow}} \tilde{B}/\gamma^{-1}(\Gamma) \xrightarrow{\pi} B$$

comme dans le cas galoisien, tout est bien défini.
Montrons que π est un revêtement.
Soit $x \in B$, U ouvert trivialisant $\tilde{p}^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} U_i$
On a vu que $\mathrm{Aut}(\tilde{p})$ agit de manière totalement discontinue, simplement et librement sur les fibres mais aussi sur les U_i -
les fibres sont indexées par $x \in \tilde{p}^{-1}(b) \simeq \mathrm{Aut}(p)$.
en partitionnant $\mathrm{Aut}(p) = \bigsqcup_{\mathrm{Aut}(p)/\gamma^{-1}(\Gamma)} \gamma^{-1}(\Gamma)$ (classes à gauche modulo $\gamma^{-1}(\Gamma)$)

on obtient $\tilde{p}^{-1}(U) = \bigsqcup_{[i]\in \mathrm{Aut}(p)/\gamma^{-1}(\Gamma)} \bigsqcup_{f\in\gamma^{-1}(\Gamma)} U_{fi}$

$$\Rightarrow \pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{[i]\in \mathrm{Aut}(p)/\gamma^{-1}(\Gamma)} \tilde{p}\Big(\bigsqcup_{f\in\gamma^{-1}(\Gamma)} U_{fi}\Big) \longleftarrow \simeq U.$$

Comme $\tilde{B}$ est simplement connexe et $\tilde{B} \to \tilde{B}/\gamma^{-1}(\Gamma)$ est un revêtement. $\pi_1(\tilde{B}/\gamma^{-1}(\Gamma))$ agit simplement transitivement sur les fibres : $\gamma^{-1}(\Gamma) \approx \pi_1(\tilde{B}/\gamma^{-1}(\Gamma))$
et $\pi_*(\tilde{B}/\gamma^{-1}(\Gamma)) = \Gamma$.

Remarque si Γ est d'indice fini n dans $\pi_1(B, b)$ alors $\tilde{B}/\gamma^{-1}(\Gamma) \to B$ est un revêtement à n feuillets.

Exemple Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$.

On peut ainsi classifier les revêtements de S^1 à partir de son revêtement universel:
$\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$.
où $\mathbb{Z} \simeq \mathrm{Aut}(p)$:
$n \longmapsto t \mapsto n+t$.

Fixons $m \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{R}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} S^1$

$$S^1 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} S^1.$$
$$e^{2i\pi t} \longmapsto e^{2i\pi m t}$$
homéo.

est l'application $S^1 \xrightarrow{p} S^1$ revêtement à m feuillets
$z \mapsto z^m$ son groupe est $p_*(\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}$.

<u>Remarque</u> : tous les revêtements de S^1, $\mathbb{R}P^k$ sont galoisiens.

<u>Prop</u> Si p Galoisien alors le groupe quotient $\pi_1(B,p(x)) / p_*\pi_1(E,x)$ agit sur E simplement transitivement sur la fibre.

<u>dém</u> ...

<u>Ex</u> On a vu que $k \geq 2$ $\pi_1(\mathbb{RP}^k) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
donne deux revêtements
(universel $S^k \to \mathbb{RP}^k = S^k / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{RP}^k \to \mathbb{RP}^k$.

<u>Exple</u> revêtement à deux feuilles d'un bouquet de deux cercles.

On a $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle$.

On cherche donc un revêtement $(E,x) \xrightarrow{q} (S^1 \vee_{x_0} S^1, x_0)$ à deux feuilles.
$q^{-1}(x_0)$ est en bijection avec $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) / q_*(\pi_1(E,x))$ nous dit que le groupe $q_*(\pi_1(E,x))$ est d'indice 2 dans $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$, donc distingué. Le revêtement sera donc Galoisien et $\mathrm{Aut}(q) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) / q_*(\pi_1(E,x))$

Notons $\{x_1, x_2\} = q^{-1}(x_0)$.
Se donner une action de $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[a] * \mathbb{Z}[b]$
(où a, b sont les lacets $t \mapsto e^{2i\pi t}$

)

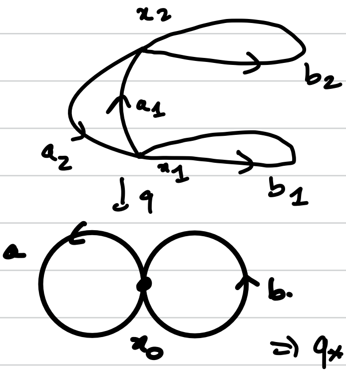
équivaut à se donner les éléments $x_1 \cdot [a]$ et $x_1 \cdot [b]$.
De plus on veut E connexe par arcs, donc une action transitive, donc

nécessairement $x_1 \cdot [a] = x_2$ ou $x_1 \cdot [b] = x_2$.

3 cas de figures :
- $x_1 \cdot [a] = x_2$ et $x_1 \cdot [b] = x_1$ (1)
- $x_1 \cdot [a] = x_1$ et $x_1 \cdot [b] = x_2$ (2)
- $x_1 \cdot [a] = x_2$ et $x_1 \cdot [b] = x_2$ (3)

Les deux premiers cas étant symétriques, on représente le 1er cas uniquement.

<u>Cas 1</u>



$$E_1 \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$$

$\Rightarrow$

$$\pi_1(E_1, x_1) = \mathbb{Z}[a_1 a_2] * \mathbb{Z}[b_1] * \mathbb{Z}[a_1 b_2 a_2]$$

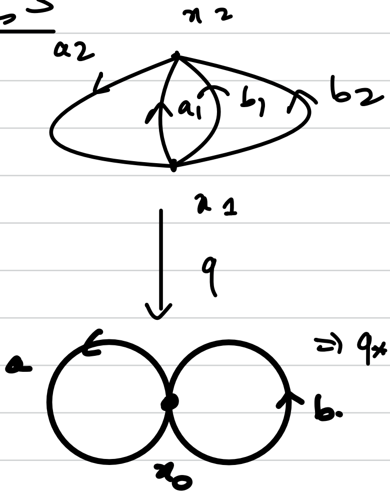
$$q[a_1 a_2] = [a]^2$$

$$q[b_1] = [b]$$

$$q[a_1 b_2] = [ab].$$

$$\Rightarrow q_*(\pi_1(E_1, x_1)) = \mathrm{Ker}\left(\begin{array}{l}\varphi_1 : \pi_1(S^1 \vee S^1) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \quad [a] \mapsto -1 \\ \quad [b] \mapsto 1\end{array}\right)$$

<u>Cas 3</u>



$$E_3 \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$$

$\Rightarrow$

$$\pi_1(E_3, x_1) = \mathbb{Z}[a_1 a_2] * \mathbb{Z}[b_1 b_2] * \mathbb{Z}[a_1 b_2]$$

$$q[a_1 a_2] = [a]^2$$

$$q[b_1 b_2] = [b]^2$$

$$q[a_1 b_2] = [a][b]$$

$$\Rightarrow q_*(\pi_1(E_3, x_1)) = \mathrm{Ker}\left(\begin{array}{l}\varphi_3 : \pi_1(S^1 \vee S^1) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \quad [a] \mapsto -1 \\ \quad [b] \mapsto -1\end{array}\right)$$