Chapitre - Algèbre homologique -

1 - Définitions - Complexes de chaînes

2 - Suites exactes courtes suites exactes longues

Thm Toute suite exacte courte $0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0$ de complexes de chaînes induit une suite exacte longue en homologie
$$\to H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$
de manière fonctorielle -

Fonctorialité

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A_* & \xrightarrow{f_*} & B_* & \xrightarrow{g_*} & C_* & \to & 0 \\ & & \downarrow u_* & & \downarrow v_* & & \downarrow w_* & & \\ 0 & \to & A'_* & \xrightarrow[f'_*]{} & B'_* & \xrightarrow[g'_*]{} & C'_* & \to & 0 \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \to & H_n(A) & \to & H_n(B) & \to & H_n(C) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \to & \cdots \\ & & \downarrow H_n(u) & & \downarrow H_n(v) & & \downarrow H_n(w) & & \downarrow H_{n-1}(u) & & \\ \cdots & \to & H_n(A') & \to & H_n(B') & \to & H_n(C') & \xrightarrow{\partial'} & H_{n-1}(A) & \to & \cdots \end{array}$$

Dém il suffit de montrer que $\forall n$, $H_{n-1}(u)\partial = \partial' H_n(w)$.

Soit $x \in C_n$ tq $dx = 0$. Soit $y \in B_n$ tq $g(y) = x$ et $a \in A_{n-1}$ tq $f(a) = dy$ et $da = 0$ $\quad \partial[x] = [a]$.

On a: • $d\,w\,x = 0$

• $g'vy = wgy$. donc vy est un antécédent de wx par g'. Puis $f'ua = vfa = vdy = dvy$.

Donc $\partial'[wx] = [ua] = u[\partial x]$ - $\boxtimes$

Corollaire 1 Soit $0 \to A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \to 0$ une suite exacte courte de complexe de chaîne. Si 2 parmi les 3 complexes sont acycliques ($\forall n\ H_n(X_\cdot) = 0$) alors le troisième l'est aussi

Dém ex A, B acycliques $\to H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to$ est exacte en C or $H_n(B) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} g_* = \operatorname{Ker} \partial_*$ $\Rightarrow \partial$ injective mais $H_{n-1}(A) = 0 \Rightarrow \partial = 0$
$\overset{\shortparallel}{0}$
Donc $H_n(C) = 0$. $\boxtimes$

Corollaire 2 Soit
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A_* & \to & B_* & \to & C_* & \to & 0 \\ & & \downarrow u_* & & \downarrow v_* & & \downarrow w_* & & \\ 0 & \to & A'_* & \to & B'_* & \to & C'_* & \to & 0 \end{array}$$
un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaîne.
Si deux des trois morphismes $H_n(u_*)$, $H_n(v_*)$, $H_n(w_*)$ sont des iso $\forall n$, alors le troisième aussi.

Rem de terminologie $A_* \xrightarrow{f} A'_*$ est un quasi-iso si $\forall n$ $H_n(f_*)$ est un isomorphisme.

Dém du corollaire 2 : appliquer le lemme des 5 aux suites exactes longues en homologie + fonctorialité.

3 - Homotopie des complexes de chaîne

Déf : Deux morphismes de cx de chaîne $f, g : A_* \to B_*$ sont dits homotopes et on note $f \simeq g$ s'il existe une famille de morphismes de R-module $h_n : A_n \to B_{n+1}$ tq $\forall n$
$$h_{n-1}\, d_n^A + d_{n+1}^B\, h_n = g_n - f_n$$

Prop la relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

Dém : $f \simeq f$ (prendre $h_n = 0 \ \forall n$)
Si $f \simeq g$ alors $g \simeq f$ (prendre $h'_n = -h_n \ \forall n$)
Si $f \underset{h}{\simeq} g$ et $g \underset{k}{\simeq} w$ alors $f \simeq w$ (prendre $l_n = h_n + k_n \ \forall n$)
$\boxtimes$

Remarque cas de complexe $\mathbb{N}$-gradué :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & A_2 & \to & A_1 & \xrightarrow{d_1^A} & A_0 & \to & 0 \\ & \swarrow_{h_1} & & \swarrow_{h_0} & & & \downarrow f_0, g_0 & & \\ \cdots & \to & B_2 & \to & B_1 & \xrightarrow[d_1^B]{} & B_0 & \to & 0 \end{array}$$

la relation d'homotopie se lit $d^B_1 h_0 = g_0 - f_0$.
(en effet on devrait avoir
$d_1^B h_0 + h_{-1} d_0^A = g_0 - f_0$ mais $d_0^A = 0$ et
$0 = h_{-1} : A_{-1} = 0 \to B_0$).

Prop Si $f \simeq g$ alors $H_n(f) = H_n(g)$.

Dém Soit $x \in A_n$, $dx = 0$.
On doit montrer que $[f_n x] = [g_n x]$.
Mais $g_n x - f_n x = dhx + hdx = dhx$ donc $[g_n x - f_n x] = [0]$.
$\Rightarrow [g_n x] = [f_n x]$. $\boxtimes$

Def $f : A_* \to B_*$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : B_* \to A_*$ telle que $gf \simeq id_A$ et $fg \simeq id_B$.

Prop l'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence sur les complexes de chaînes. On note $A_* \simeq B_*$

<u>Dém</u> : $A_* \simeq A_*$ (prendre $f = id$)

Si $A_* \simeq B_*$ alors $B_* \simeq A_*$ (inverser les rôles de f et g)

Si $A_* \simeq B_*$ et $B_* \simeq C_*$:

$f : A \to B$ $\quad u : B \to C$

$g : B \to A$ $\quad v : C \to B$.

il faut montrer que si $f \simeq g : K \to L$ alors

$\forall u : L \to M$, $\forall v : P \to K$ $\quad ufv \simeq ugv$

cela provient du lemme suivant :

si h est une homotopie u, v morphismes de complexes de chaînes

alors uh est une homotopie, hv aussi.

On a donc si $gf \simeq id_A$ $\quad fg \simeq id_B$ $\quad vu \simeq id_B$ $\quad uv \simeq id_C$

<u>alors</u> : $(uf) : A \to C$ $\quad gv : C \to A$

vérifier $\quad ufgv \simeq id_C$ et $\quad gvuf \simeq id_A$ $\quad \boxtimes$

<u>Déf</u> un complexe C_* est dit contractile si $C \simeq 0$

(ou $id_{C_*} \simeq 0$).

<u>Corollaire</u> :
- Si f équivalence d'homotopie alors f est un qiso
- Si C_* est contractile alors il est acyclique.

⚠ on n'a pas la réciproque.

<u>Dém corollaire</u> $\quad \exists g$ tq $gf \simeq id \Rightarrow H_n(g) H_n(f) = id \quad \forall n$

$fg \simeq id \Rightarrow H_n(f) H_n(g) = id \quad \forall n$

$\Rightarrow \forall n \; H_n(f)$ iso $\quad \boxtimes$.