Cours du 18/04/23 [cours 9]

__Rappel__ X espace topologique, R un anneau

$C_n^{sing}(X;R) =$ R-module libre engendré par les applications continues $\tau : \Delta^n \to X$

$$\partial\tau = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tau \circ \delta_i \quad \text{où } \delta_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$$

est l'application affine défini par $\delta_i(v_k) = \begin{cases} v_k & k \leq i-1 \\ v_{k+1} & k \geq i \end{cases}$

$$H_n(X;R) := H_n(C_\bullet^{sing}(X;R))$$

__Déf__ : le complexe singulier réduit $\tilde{C}(X;R)$ est le complexe de chaîne $C^{sing}(X;R)$ augmenté en degré -1 par R :

$$C_0(X;R) \xrightarrow{\varepsilon} R$$
$$\tau \mapsto 1$$

On définit l'homologie réduite $\tilde{H}(X;R)$ comme l'homologie de ce complexe.

On a
$$\tilde{H}_p(X;R) = \begin{cases} H_p(X;R) & p > 0 \\ \operatorname{Ker}\varepsilon / \operatorname{Im}\delta_0 & p = 0 \\ 0 & p < 0 \end{cases}$$

si X est connexe par arcs alors $\tilde{H}_0(X;R) = 0$.
en particulier si X est contractile alors $\forall p$ $\tilde{H}_p(X;R) = 0$.

3 - Homologie relative

Déf Soit $A \subset X$ un sous-espace topologique.
cela fournit $i_*: C_n(A;R) \to C_n(X;R)$
on définit le complexe relatif $C_n(X,A)$ comme le quotient $C_n(X;R)/C_n(A;R)$ et l'homologie relative comme $H_n(C_*(X,A))$.

Pourquoi relatif ? · un cycle de $C_*(X,A)$ correspond à une chaîne $c \in C_n(X)$ telle que ∂c est à valeurs dans A.
pour un tel cycle, si l'on note $\bar{c}$ sa classe modulo $C_n(A)$ on a $[\bar{c}] = [\bar{0}]$ dans $H_n(C_*(X,A))$
$\Leftrightarrow \exists\, \bar{u} \in C_*(X,A)$ telque $\bar{c} = \delta \bar{u}$
$\Leftrightarrow \exists\, u \in C_n(X),\ v \in C_n(A)$ $c = \delta u + v$
donc c est un bord relativement à A.

Prop $0 \to C_*(A) \to C_*(X) \to C_*(X,A) \to 0$ est une suite exacte courte de complexes. Le morphisme connectant dans la suite exacte longue en homologie
$H_n(X;A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$ est donné par $\partial[\bar{c}] = [\partial c]$.

Dém a) $i_*: C_n(A) \to C_n(X)$ est injective.
Soit $\alpha = \sum \lambda_j \alpha_j$ avec $\lambda_j \in R$ et $\alpha_j: \Delta^n \to A$ continue.
$i_* \alpha = \sum \lambda_j\, i \circ \alpha_j = 0$. $i \circ \alpha_j: \Delta^n \to X$ est continue
$\Rightarrow \forall j\ \lambda_j = 0$. car $C_n(X)$ est le R-module libre engendré par toutes les applications continues $\Delta^n \to X$.

Morphisme connectant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C_n(X)/C_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r] & C_{n-1}(X) \arrow[r] & C_n(X)/C_n(A) &
\end{tikzcd}$$

$c \in C_n(X)$, $c \mapsto \bar{c}$, $c \mapsto \partial c$

par définition on a $\partial c \in C_n(A)$ donc $[\bar{c}] \mapsto [\partial c]$. $\boxtimes$.

<u>Remarque</u> : On montre que l'on a une suite exacte courte
$0 \to \tilde{C}_\cdot(A;R) \to \tilde{C}_\cdot(X;R) \to C_\cdot(X,A;R) \to 0$ au niveau des complexes augmentés. La suite exacte longue associée relie l'homologie relative et l'homologie réduite.

<u>Rappel</u> Top_2 : catégorie dont les objets sont les paires (X,A) avec $A \subset X$ et les morphismes $(X,A) \to (Y,B)$ sont les applications continues $X \xrightarrow{f} Y$ tq $f(A) \subset B$.
On a une notion d'homotopie relativement à A :
$f \simeq_{\mathrm{rel}\,A} g$ si $f|_A = g|_A$ et $\exists\ H : X \times I \to Y$
$H(x,0) = f(x)$ $H(x,1) = g(x)$
$H(a,t) = f(a) = g(a)$.

<u>Prop</u> $\mathrm{Top}_2 \longrightarrow \mathrm{Ch}_*$ est un foncteur
$(X,A) \longmapsto C_*(X,A)$
Si $f \simeq_{\mathrm{rel}A} g$ alors $C_*(f) \simeq C_*(g) : C_*(X,A) \to C_*(Y,B)$

<u>Prop</u> (Voir TD) Soit $A \subset B \subset X$ on a une suite exacte longue en homologie
$$\cdots \to H_n(B,A) \to H_n(X,A) \to H_n(X,B) \to H_{n-1}(B,A) \to \cdots$$

4- Théorème d'excision (vers des calculs explicites)

Principe de base : pour calculer l'homologie singulière on peut choisir des simplexes singuliers "aussi petits" que l'on veut. ⇝ Thm des petites chaînes.

Soit X un espace topologique. $\mathcal{U}=\{U_i,\ i\in I\}$ une famille de sous-espaces de X tq $X=\bigcup_{i\in I}\mathring{U}_i$ (leur intérieur recouvre X).

Le complexe des $\mathcal{U}$-chaînes $C_*^{\mathcal{U}}(X)$ est un sous-complexe de $C_*(X)$ défini comme suit :
$C_p^{\mathcal{U}}(X)$ est le R-module libre engendré par les simplexes $\tau:\Delta^p\to X$ vérifiant $\exists\, i\in I$ $\tau(\Delta^p)\subset U_i$.

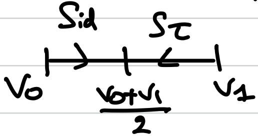
__Thm__ l'inclusion $C_*^{\mathcal{U}}(X)\to C_*(X)$ est un quasi-isomorphisme

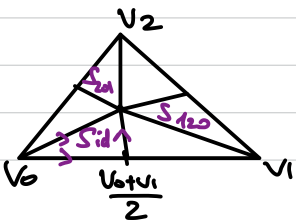
__Dém__ On va tout d'abord construire un opérateur : la subdivision barycentrique :

$$S_n^X : C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$$
$$\tau \longmapsto \sum_{\alpha\in\Sigma_{n+1}} \varepsilon(\alpha)\, \tau\circ S_\alpha$$

où $S_\alpha : \Delta^n \to \Delta^n$ est l'application affine définie par
$S_\alpha(v_i)=\frac{v_{\alpha(0)}+\dots+v_{\alpha(i)}}{i+1}$.

__Ex__





$\forall f : X \to Y$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "S_n^X"] \arrow[d, "C_n(f)"'] & C_n(X) \arrow[d, "C_n(f)"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "S_n^Y"'] & C_n(Y) \end{tikzcd}$$

Commute.

en effet $\forall \tau : \Delta^n \to X$

$$C_n(f) \circ S_n^X(\tau) = \sum_{\alpha \in \Sigma_{n+1}} \varepsilon(\alpha)\, f \circ \tau \circ S_\alpha = S_n^Y(f\tau) = S_n^Y(C_n(f)(\tau))$$

S_n^X est un morphisme de complexes de chaînes. On se réfère à Hatcher Prop 2.21 pour une autre présentation de S_n^X et exercice 24 et 25 section 2.1 pour montrer que les deux présentations coïncident.

Nous allons montrer par récurrence sur n que $S^X \simeq id_X$.
Plus précisément, on va mq pour n fixé, il existe $h_0^X, \ldots, h_{n-1}^X, h_n^X : C_k(X) \to C_{k+1}(X)$ tel que $\forall\ 0 \leq k \leq n-1$

$$\partial_k h_{k-1}^X + h_{k-2}^X \partial_{k-1} = S_{k-1}^X - id_{C_{k-1}(X)}$$

et h_k^X est fonctoriel en X :

$$\forall f : X \to Y \quad C_{k+1}(f) \circ h_k^X = h_k^Y \circ C_k(f).$$

- $k=0$ $\quad \partial_1 h_0^X = S_0^X - id_{C_0(X)}$. Or $S_0^X = id$ donc on peut prendre $h_0^X = id$.

Notons $i_n : \Delta^n \to \Delta^n$ l'identité. On a $\partial_n i_n \in C_{n-1}(\Delta^n)$

Donc :
$$\partial_n h_{n-1}^{\Delta^n} \partial_n i_n + h_{n-2}^{\Delta^n} \underbrace{\partial_{n-1}\partial_n i_n}_{=0} = \underbrace{S_{n-1}^{\Delta^n} \partial_n i_n}_{= \partial_n S_n^{\Delta^n} i_n} - \partial_n i_n.$$

$$\Rightarrow \partial_n \left(h_{n-1}^{\Delta^n} \partial_n i_n - S_n^{\Delta^n} i_n + i_n \right) = 0.$$

Or $H_n(\Delta^n) = 0$ car Δ^n est contractile donc il existe $h_n^{\Delta^n}(i_n) \in C_{n+1}(\Delta^n)$ tel que

$$\partial_{n+1} h_n^{\Delta^n}(i_n) = h_{n-1}^{\Delta^n}\partial_n i_n - S_n^{\Delta^n} i_n + i_n.$$

On pose alors :
$$h_n^X : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$$
$$\tau : \Delta^n \to X \longmapsto C_{n+1}(\tau)\big(h_n^{\Delta^n}(i_n)\big).$$

Bien défini :
$C_k(\tau) : C_k(\Delta^n) \longrightarrow C_k(X)$ étendu par linéarité.
$\rho : \Delta^k \to \Delta^n \longmapsto \tau\circ\rho : \Delta^k \to X.$

Cette définition assure la fonctorialité de h_n^X.
$\forall \tau \in C_n(X)$ on a :
$$\partial_{n+1} h_n^X(\tau) = \partial_{n+1} C_{n+1}(\tau)(h_n(i_n)) = C_n(\tau)\left[h_{n-1}\partial_n i_n - S_n^{\Delta^n} i_n + i_n\right]$$
$$= h_{n-1}^X \partial_n \tau - S_n^X \tau + \tau.$$

Remarquons que $\mathrm{Diam}(S\alpha) \leq \frac{n}{n+1}\mathrm{Diam}(\Delta^n)$ $\forall \alpha \in \Sigma_{n+1}$.

Montrons maintenant que $C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*(X)$ est un quasi-iso.
Soit $\tau : \Delta^n \to X$. $V_i = \tau^{-1}(U_i)$.
Il existe $\varepsilon > 0$ $\forall x \in \Delta^n$ $B(x,\varepsilon) \cap \Delta^n \subset V_i$ pour un certain i. (Δ^n métrique compact)
Puis il existe $k(\tau)$ tq $S_n^{k(\tau)}(\tau) \in C_*^{\mathcal{U}}(X)$.
On itère S_n un certain nombre de fois pour diminuer le diamètre. Si $\tau \in C_*^{\mathcal{U}}(X)$ on pose $k(\tau) = 0$, sinon on prend le plus petit vérifiant cela. Cela fournit $S : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ tel que $Si = id$.

$$\begin{tikzcd} C_n^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r, hook, "i"'] & C_n(X) \arrow[l, bend right, "S"'] \end{tikzcd}$$

Rq $H_*(i)$ est un isomorphisme.
- <u>surjectivité</u> : $S_n \simeq id \Rightarrow \forall k\ S_n^k \simeq id$.

5

Soit $c \in C_n(X)$ tel que $\partial c = 0$ $c = \sum \alpha_i \tau_i$ avec $\tau_i : \Delta^n \to X$. soit $k = \sup(k(\tau_i))$.

$S_n^k(c) - c = \partial H(c) - H(\partial c) = \partial H(c)$

$\Rightarrow [c] = [S_n^k(c)]$ et $S_n^k(c) \in C_*^{\mathcal{U}}(X)$ -

- <u>injectivité</u> : soit $c \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ tel que $\partial c = 0$ et $[ic] = [0]$

$\Rightarrow \exists\, d \in C_{n+1}(X)$ tq $\partial d = c$ -

il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $S^k d \in C_*^{\mathcal{U}}(X)$.

$\partial(S^k d) = S^k(\partial d) = S^k c$

or $S^k c - c = \partial H c - H \partial c \Rightarrow [S^k c] = [c] \in H(C^{\mathcal{U}}(X))$ -

et $S^k c = \partial(S^k d) \in C^{\mathcal{U}}(X) \Rightarrow [S^k c] = [0] = [c]$ ⊠

Corollaire [suite exacte longue de Mayer-Vietoris]

Soient U, V un recouvrement d'ouverts de X. Il existe une suite exacte longue d'homologie

$$\to H_n(U\cap V) \xrightarrow{\alpha_n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\beta_n} H_n(X) \to H_{n-1}(U\cap V) \to$$

avec $\alpha_n([x]) = [x]_U - [x]_V$
et $\beta_n([y]_U + [z]_V) = [y] + [z]$.

Dém prenons $\mathcal{U} = \{U, V\}$ et posons $\varphi : C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*(X)$ l'application induite par l'inclusion. Par le théorème des petites chaînes on peut remplacer dans la suite exacte longue $C_*(X)$ par $C_*^{\mathcal{U}}(X)$.
On considère alors la suite exacte courte :

$$0 \to C_*(U\cap V) \xrightarrow{\gamma} C_*(U) \oplus C_*(V) \xrightarrow{\rho} C_*^{\mathcal{U}}(X) \to 0.$$

$\gamma(c) = c_U - c_V$
$\rho(c_U + d_V) = c + d.$
On a bien $\rho\gamma = 0.$
γ est injective
ρ est surjective par déf de $C_*^{\mathcal{U}}(X)$.

Soit $c_U = \sum \lambda_\alpha \tau_\alpha \qquad \tau_\alpha : \Delta^p \to U.$
$d_V = \sum \mu_\beta \tau'_\beta \qquad \tau'_\beta : \Delta^p \to V.$

$c_U + d_V = 0 \Rightarrow \sum \lambda_\alpha \tau_\alpha + \sum \mu_\beta \tau'_\beta = 0.$
soit $\lambda_\alpha = 0, \mu_\beta = 0$ soit $\exists \alpha, \beta\ \tau_\alpha = \tau'_\beta$. et $\lambda_\alpha = -\mu_\beta$
$\Rightarrow c_U = -d_V$ avec $c_U = \sum \lambda_\alpha \tau_\alpha \quad \tau_\alpha : \Delta^p \to U\cap V.$
$\Rightarrow c_U + d_V = \gamma(c).$ ☒.

Application :

Thm $H_p(S^n;R) = \begin{cases} R & \text{si } p=0,n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad n\geq 1$

$H_p(S^0;R) = \begin{cases} R\oplus R & p=0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dém cas $n \geq 1$.

$S^n = U \cup V$ avec $V, U \simeq D^n$, $U\cap V \simeq S^{n-1}$. (recouvrement classique).

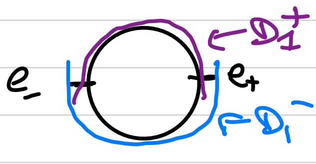
On a donc une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \to H_k(S^{n-1}) \to H_k(D^n)\oplus H_k(D^n) \to H_k(S^n) \to H_{k-1}(S^{n-1}) \to \cdots$$

Donne un iso entre $H_k(S^n)$ et $H_{k-1}(S^{n-1})$ pour $k\geq 2$.

cas $k=0$. $H_0(S^n;R)=R$ car S^n est connexe par arcs.

cas $n=1$ $\quad 0 \to H_1(S^1) \xrightarrow{\delta} H_0(S^0) \xrightarrow{i} H_0(D^1)\oplus H_0(D^1) \xrightarrow{j} H_0(S^1) \to 0$



$$Re_-\oplus Re_+ \xrightarrow{i} Ru\oplus Rv \xrightarrow{j} Re_+ \to 0.$$

$ie_- = u-v \qquad ju = e_+$

$ie_+ = u-v \qquad jv = e_+$.

$\mathrm{Ker}\, i = R(e_- - e_+)$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, i = \mathrm{Im}\, \delta$

Ccl $H_1(S^1) \simeq R$.

et $H_k(S^1) = 0 \quad \forall k \geq 2$.

Pour $n \geq 2$ on a $H_k(S^n) \simeq H_{k-1}(S^{n-1})$ $k \geq 2$.

$\Rightarrow H_n(S^n) = R$.

et $H_k(S^n) = 0$ $k \neq n$ $k \geq 2$.

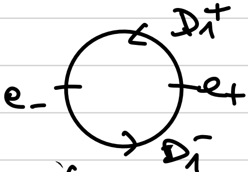
$$0 \to H_1(S^n) \xrightarrow{0} H_0(S^{n-1}) \to H_0(D^n) \oplus H_0(D^n) \to H_0(S^n) \to 0$$

$$R \hookrightarrow R \oplus R \longrightarrow R$$

injective.

Donc $H_1(S^n) = 0$ $n \geq 2$ - $\boxtimes$.

Remarque sur les générateurs : l'argument des petites chaînes nous dit que $\mathcal{U} = \{D_1^+, D_1^-\}$ $C_*^{\mathcal{U}}(S^1) \longrightarrow C_*(S^1)$ est un quasi iso -



Notons $\sigma_1 : I \to S^1$ $\to$ à valeurs dans D_1^+

$t \mapsto e^{-i\pi t}$

$\sigma_2 : I \to S^1$ $\to$ à valeurs dans D_1^-

$t \mapsto e^{-i\pi(t+1)}$

$$\partial(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_1(1) + \sigma_2(1) - \sigma_1(0) - \sigma_2(0) = e_- + e_+ - e_- - e_+ = 0$$

donc $\sigma_1 + \sigma_2$ est un cycle de $C_*^{\mathcal{U}}(S^1)$

La suite exacte courte :

$$0 \to C_*(D_1^+ \cap D_1^-) \xrightarrow{i} C_*(D_1^+) \oplus C_*(D_1^-) \xrightarrow{\varphi} C_*^{\mathcal{U}}(S^1) \to 0.$$

$$c \mapsto c_+ - c_-$$

$$u_+ + v_- \mapsto u_+ + v_-.$$

Nous fournit l'iso

$$\underbrace{H_1(C_*^{\mathcal{U}}(S^1))}_{\shortparallel} \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_0(C_*(D_1^+ \cap D_1^-))$$

$$H_1(S^1) \longrightarrow \tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z}(e_+ - e_-)$$

Mais $\sigma_1 + \sigma_2 = \varphi(\sigma_1 + \sigma_2)$ $\partial(\sigma_1 + \sigma_2) = i(e_+ - e_-)$.

Donc $\partial[\sigma_1 + \sigma_2]$ est un générateur de $\tilde{H}_0(S^0)$ donc c'est un générateur de $H_1(S^1)$.

Corollaire [le théorème d'excision]

1) Soit X un espace topologique $U \subset W \subset X$ des sous-espaces tel que $\overline{U} \subset \mathring{W}$.
L'inclusion de paire $(X \setminus U, W \setminus U) \longrightarrow (X, W)$ induit un iso en homologie relative.

2) Si $A, B \subset X$ tq $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$, l'inclusion de paires $(B, A \cap B) \subset (X, A)$ induit un iso en homologie relative.

Dém On a 1) $\Leftarrow$ (2), il suffit de poser
$A = W$ $B = X \setminus U$
$\mathring{B} = X \setminus \overline{U} \supset X \setminus \mathring{W}$ donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$
et de même $W = A$ $U = X \setminus B$.
On va démontrer 2)
avec $\mathcal{U} = \{A, B\}$ les petites chaînes donnent
$H_*(C_*^{\mathcal{U}}(X)) \longrightarrow H_*(C_* X)$ est un iso.
On a les suites exactes courtes suivantes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_*^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\text{qiso}"] & C_*^{\mathcal{U}}(X)/C_*(A) \arrow[r] \arrow[d, "\text{qiso}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] & C_*(X) \arrow[r] & C_*(X, A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ccl $H_*(X, A) = H_*\left(C_*^{\mathcal{U}}(X) / C_*(A)\right)$.

Soit $\varphi : C_*(B) \longrightarrow C_*^{\mathcal{U}}(X) / C_*(A)$ $\varphi(c) = \overline{c}$.

φ est surjective : soit $c = \sum \lambda_i \tau_i$ avec $\tau_i : \Delta^n \to X$ vérifie $\tau_i(\Delta^n) \subset A$ ou $\tau_i(\Delta^n) \subset B$
on découpe c et $c = c_A + c_B$ (pas forcément unique mais existe)
et $\bar{c} = \overline{c_B} = \varphi(c_B)$.
Par ailleurs $\varphi(c) = 0 \Leftrightarrow \bar{c} = 0 \Leftrightarrow c \in C_*(A)$.
Mais $c \in C_*(B) \Rightarrow c \in C_*(A \cap B)$
et réciproquement $c \in C_*(A \cap B) \Rightarrow \varphi(c) = 0$.
Conclusion $C_*^{\mathcal{U}}(X) / C_*(A) \simeq C_*(B) / C_*(A \cap B)$.

Ccl $H_*(B, A \cap B) \longrightarrow H_*(X, A)$ induit par l'inclusion est un isomorphisme.

5- Applications

Thm $S^{n-1} = \partial D^n$ n'est pas un rétract de D^n.

Dém : $S^{n-1} \overset{r}{\underset{i}{\rightleftarrows}} D^n$ $\quad r i = id \Rightarrow H_*(r) H_*(i) = id$
$\Rightarrow H_*(i)$ injective mais $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$
$\mathbb{Z} \xrightarrow{H_*(i)} 0$ n'est pas injective.

Corollaire [Thm du pt fixe de Brouwer]
Toute application continue $f : D^n \to D^n$ admet un point fixe.

Dém Si $\forall x \in D^n$ $f(x) \neq x$
$r : D^n \longrightarrow S^{n-1}$
$x \longmapsto r(x) = [f(x), x) \cap S^{n-1}$. continue.
et vaut id sur S^{n-1} $ri = id$ absurde

Thm Si $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ sont deux ouverts homéo alors $m = n$.

Dém Pour $x \in U$ on pose $A = U$ $B = \mathbb{R}^m \setminus \{x\}$.
$\mathbb{R}^m = A \cup B$. Par excision on a.
$$H_k(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}).$$

La suite exacte longue associée à la paire $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ Donne

$$\to \underset{\substack{\parallel \\ 0 \\ k \geq 1}}{H_k(\mathbb{R}^m)} \to H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \xrightarrow{\delta} \underset{\substack{\parallel \\ \mathbb{Z}}}{H_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\})} \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H_{k-1}(\mathbb{R}^m)}$$

$k-1 = m-1$. $(m \geq 2)$.

Donc pour $m \geq 2$:
$$H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}$$
$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) = 0 \quad k \neq m, \ k \geq 2.$$

Cas $m = 1$
$$0 \to \underset{\substack{\parallel \\ \mathbb{Z}}}{H_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})} \to \overset{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H_0(\mathbb{R}^1 \setminus \{x\})} \twoheadrightarrow \overset{\mathbb{Z}}{H_0(\mathbb{R}^1)}$$
$$\to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H_0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{x\})}.$$

D'où le résultat $\boxtimes$.

6) Degré d'une application (voir aussi exo 2 feuille de TD 11)

Déf $f : S^n \to S^n$ continue

$$f_* : H_n(S^n;\mathbb{Z}) \to H_n(S^n;\mathbb{Z})$$
$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$1 \longmapsto \deg f.$$

Prop
- $\deg id = 1$ $\quad \deg(f\circ g) = \deg f \times \deg g$.
- Si $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$
- Si f est une équivalence d'homotopie alors $\deg f = \pm 1$.

- Si f est une réflexion par rapport à l'hyperplan d'équation $x_i = 0$ $\left((x_1,\dots,x_{n+1}) \mapsto (x_1,\dots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\dots x_{n+1}) \right)$ $\deg f = -1$.

- L'application antipode $x \mapsto -x$ est de degré $(-1)^{n+1}$.

Démonstration : voir TD –

Remarque sur les générateurs de $H_n(S^n)$.

Fixons $\varphi_n : \Delta^n \to D^n$ un homéomorphisme tel que $\varphi_n|_{\partial\Delta^n}$ soit un homéo $\partial\Delta^n \to \partial D^n = S^{n-1}$.

On note $j^+ : D^n \to S^n$
$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto \left(x_1,\dots,x_n, \sqrt{1-\textstyle\sum x_i^2}\right)$$
et $j^- : D^n \to S^n$
$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto \left(x_1,\dots,x_n, -\sqrt{1-\textstyle\sum x_i^2}\right)$$

On pose $in^+, in^- : \Delta^n \to S^n$ les composées $j^+ \circ \varphi_n$ et $j^- \circ \varphi_n$.

On a alors $in^+ - in^- \in C_n(S^n)$ et $\partial(in^+ - in^-) = 0$.
car $in^+|_{\partial\Delta^n} = in^-|_{\partial\Delta^n}$.

$[in^+ - in^-]$ engendre $H_n(S^n)$.
(la démonstration utilise la suite ~~exacte~~ longue de Mayer-Victoris

En posant $r_{n+1} : S^n \to S^n$
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$$

on a $[r_{n+1}]([in^+ - in^-]) = [in^- - in^+]$
d'où $\deg r_{n+1} = -1$.