Homologie des espaces topologiques –

1- Homologie singulière

Notations $\Delta^n = \{(t_0, .., t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_i \geq 0 \quad \sum t_i = 1\}$
$= \langle e_0, .., e_n \rangle$ ← enveloppe convexe.

Plus généralement si $v_0, .., v_n$ sont $n+1$ points affinement indépendants on note $\langle v_0, .., v_n \rangle$ l'enveloppe convexe de ces points.
On a $\Delta^n \approx \langle v_0, .., v_n \rangle$.

On a des applications (affines) appelées faces : $\delta_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$
où $\delta_i(t_0, .., t_{n-1}) = (t_0, .., t_{i-1}, 0, t_i, .., t_{n-1})$ $\quad 0 \leq i \leq n$
que l'on écrit aussi $\delta_i \langle v_0, .., v_{n-1} \rangle = \langle v_0, .., \hat{v_i}, .., v_n \rangle$.
et des applications de dégénérescence
$\sigma_i : \Delta^n \longrightarrow \Delta^{n-1}$
$(t_0, .., t_n) \mapsto (t_0, .., t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, .., t_n)$ $\quad 0 \leq i \leq n-1$.

Déf Soit X un espace topologique. Un p-simplexe de X est une application continue $\tau : \Delta^p \to X$.
On note $C_p^{sing}(X; R)$ (ou $C_p(X; R)$) le R-module libre engendré par les p-simplexes.
Un élément de $C_p^{sing}(X; R)$ est donc une somme (finie) $\sum \lambda_j \tau_j$ où $\lambda_j \in R$ et $\tau_j : \Delta^p \to X$.
Lorsque $R = \mathbb{Z}$ on note $C_p^{sing}(X)$ (ou $C_p(X)$).

On définit $\partial_p : C_p(X; R) \to C_{p-1}(X; R)$ par
$$\partial_p(\tau) = \sum_{i=0} (-1)^i \, \tau \circ \delta_i = \sum_{i=0} (-1)^i \, \tau \langle v_0, .., \hat{v_i}, .., v_p \rangle$$ –

Prop $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. $\Rightarrow$ $(C_*^{sing}(X;R), \partial_*)$ est un complexe de chaînes

Dém : $(\partial_p \circ \partial_{p+1})(\tau) = \partial_p\left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \tau \circ \delta_i\right)$

$$= \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^{i+j} \tau \circ \delta_i \circ \delta_j .$$

On a: $\delta_i \circ \delta_j : \Delta^{p-1} \xrightarrow{\delta_j} \Delta^p \xrightarrow{\delta_i} \Delta^{p+1}$

$(t_0,.., t_{p-1}) \mapsto (t_0,.., t_{j-1}, 0, t_j,.., t_{p-1}) \mapsto (t_0,.., t_{i-1}, 0, t_i,.., t_{j-1}, 0, t_j,.., t_{p-1})$

pour $i \leq j$ ($i=j$ donc $(t_0,..,t_{j-1},0,0,t_j,..,t_{p-1})$.)

$\delta_{j+1} \circ \delta_i : (t_0,..,t_{p-1}) \mapsto (t_0,.., t_{i-1}, 0, t_i,.., t_{p-1})$
$\mapsto (t_0,.., t_{i-1}, 0, t_i,.., t_{j-1}, 0, t_j,.., t_{p-1})$.

Donc : $\forall i \leq j \quad \delta_i \circ \delta_j = \delta_{j+1} \circ \delta_i$.

On a donc: $\sum_{0 \leq i \leq j \leq p} (-1)^{i+j} \tau \circ \delta_i \circ \delta_j + \sum_{0 \leq j < i \leq p+1} (-1)^{i+j} \tau \circ \delta_i \circ \delta_j$

$$= \sum_{0 \leq k \leq l \leq p} (-1)^{k+l} \tau \circ \delta_{l+1} \circ \delta_k + \sum_{0 \leq j < i \leq p+1} (-1)^{i+j} \tau \circ \delta_i \circ \delta_j$$

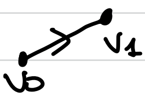
$(j=k \quad i=l+1)$ $= \sum_{0 \leq j < i \leq p+1} (-1)^{i+j+1} \tau \circ \delta_i \circ \delta_j + \sum_{0 \leq j < i \leq p+1} (-1)^{i+j} \tau \circ \delta_i \circ \delta_j = 0.$

$\boxtimes$

Déf L'homologie singulière de X est l'homologie du complexe $C_*^{sing}(X;R)$, notée $H_*(X;R)$. (ou $H_*(X)$ quand il n'y a pas de coefficients dans R).

Exemple : calcul de $H_0(X;R)$ — $C_0(X;R)$: le R-module libre engendré par les points de X. $\sum \lambda_x \tau_x$.
$C_1(X;R)$ le R-module libre engendré par les chemins $(\tau : \Delta^1 \to X)$ de X. : $\sum \lambda_i \gamma_i$.

Calculons $\partial_1 \gamma = \sum_{i=0}^{1} \gamma \circ \delta_i$ où $\delta_0 : \Delta^0 \to \Delta^1$, $* \mapsto (0,1)$
et $\delta_1 : \Delta^0 \to \Delta^1$, $* \mapsto (1,0)$



$\partial_1 \gamma = \gamma(1) - \gamma(0)$.

$H_0(X;R) = C_0(X;R) / \mathrm{Im}\,\partial_1$: le R-module libre engendré par les composantes connexes par arcs de X.

Si X est connexe par arcs $\quad H_0(X;R) = R$.

Rem : Si X est homéomorphe à Y alors $C_*(X;R)$ est iso à $C_*(Y;R)$ et $H_*(X;R)$ est iso à $H_*(Y;R)$.
plus généralement:

Prop : $Top \longrightarrow Ch_{\geq 0}(R)$ est un foncteur

$X \mapsto C_*^{sing}(X;R)$

$f : X \to Y \mapsto C_*^{sing}(f) : C_*^{sing}(X;R) \longrightarrow C_*^{sing}(Y;R)$

$\tau \mapsto f \circ \tau$.

Prop Soit $X = \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ où les X_α sont les composantes connexes par arcs de X

$\forall p \quad H_*(X;R) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_p(X_\alpha;R)$

Dém Pour $\tau : \Delta^p \to X$ continue donc $\tau(\Delta^p)$ est connexe par arcs $\Rightarrow \exists \alpha \in A$ tq $\tau(\Delta^p) \subset X_\alpha$.
en particulier $\forall i \in [\![0,p]\!]$ $\quad (\tau \circ \delta_i)(\Delta^{p-1}) \subset X_\alpha$.
Donc $\delta_p \tau \in C_{p-1}(X_\alpha)$.
Soit $c \in C_p(X)$ tq $\partial_p c = 0$.
on écrit $c = \sum c_\alpha$ avec $c_\alpha \in C_p(X_\alpha)$.
$$\partial_p c = \sum \partial_p c_\alpha = 0 \Rightarrow \partial_p c_\alpha = 0.$$

Donc $\varphi : Z_p(X) \longrightarrow \bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha)$ est bien définie

Si $c = \partial d$ $\quad d \in C_{p+1}(X)$ de même $d = \sum d_\alpha$ de manière unique $\quad c = \sum \partial d_\alpha \Rightarrow \varphi(c) = 0$.
Donc φ passe au quotient : $\quad \bar\varphi : H_p(X) \to \bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha)$
- $\bar\varphi$ est surjective et $\bar\varphi([c]) = [0]$
$$\Rightarrow \quad c = \sum c_\alpha \quad c_\alpha = \partial d_\alpha \quad \Rightarrow \quad c = \partial\left(\sum d_\alpha\right) \Rightarrow [c] = [0] \quad \boxtimes$$

Prop $$H_k(pt) = \begin{cases} R & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dém Soit $\tau_p : \Delta^p \to pt$ l'unique application continue.
on a $\tau_p \delta_i = \tau_{p-1}$.
Donc le complexe $C_*^{sing}(pt; R)$ s'écrit.
$$\cdots \; R e_4 \xrightarrow{id} R e_3 \xrightarrow{0} R e_2 \xrightarrow{id} R e_1 \xrightarrow{0} R e_0$$

On a $\quad H_0(pt; R) = R$
$\quad H_k(pt; R) = 0 \quad \forall k > 0.$ $\quad \boxtimes$

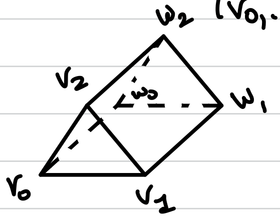
② Comportement par rapport à l'homotopie

Thm : Si $f \simeq g : X \to Y$ alors $C_*(f) \simeq C_*(g) : C_*(X) \to C_*(Y)$
$\Rightarrow H_*f = H_*g$.

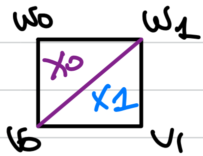
Dém Il faut construire $P_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$
tel que $\partial P + P\partial = C_*(g) - C_*(f)$.

$\exists F : X \times I \to Y$ tq $F(x,0) = f(x)$ $F(x,1) = g(x)$ $\forall x \in X$
F continue.

Idée $\Delta^n \times I$ est l'enveloppe convexe de $2(n+1)$ points :
$[v_0,..,v_n, w_0,..,w_n]$.



union de $(n+1)$-simplexes:
$[v_0,..,v_i,w_i,..,w_n]$.
$(i = 0$ à $n)$.



on note $\chi_i : \Delta^{n+1} \to \Delta^n \times I$ le $n+1$-simplexe
$[v_0,..,v_i,w_i,..,w_n]$ de $\Delta^n \times I$.

Soit σ un générateur de $C_n^{sing}(X)$.

$$\Delta^{n+1} \xrightarrow{\chi_i} \Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma \times id} X \times I \xrightarrow{F} Y$$

définit un élément de $C_n^{sing}(Y)$. que l'on note
$F(\sigma \times id)[v_0,.., v_i, w_i,.. w_n]$.

On définit alors l'opération "prisme"
$P_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F(\sigma \times id)[v_0,.., v_i, w_i,.., w_n]$. On calcule:

$$\partial P_n(\tau) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \Big(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j F(\tau \times id)\,[v_0,.., \hat{v_j},.., v_i, w_i,.., w_n]$$
$$+ (-1)^i F(\tau\times id)\,[v_0,.., v_{i-1}, \hat{v_i}, w_i,.., w_n]$$
$$+ (-1)^{i+1} F(\tau\times id)\,[v_0,.., v_i, \hat{w_i},.., w_n]$$
$$+ \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{j+1} F(\tau\times id)\,[v_0,.., v_i, w_i,.., \hat{w_j},.., w_m] \Big)$$

$$P_{n-1}(\partial\tau) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i P_{m-1}\, \tau[v_0,.., \hat{v_i},.., v_n]$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j F(\tau\times id)\,[v_0,.., v_j, w_j,.., \hat{w_i},.., w_n]$$
$$+ \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{j+1} F(\tau\times id)\,[v_0,.., \hat{v_i},.., v_j, w_j,.., w_n].$$

<u>Bcl</u> $\partial P_n(\tau) + P_{n-1}(\partial\tau) = \sum_{i=0}^{n} F(\tau\times id)[v_0,.., v_{i-1}, \hat{v_i}, w_i,.., w_n] - F(\tau\times id)[v_0,.., v_i, \hat{w_i}, w_{i+1},.., w_n].$

$= F(\tau\times id)[w_0,.., w_n] - F(\tau\times id)[v_0,.., v_n].$

$= F(\tau, 1) - F(\tau, 0) = g\circ\tau - f\circ\tau.$ $\boxtimes$

<u>Corollaire</u> $\quad H_p(\Delta^n; R) = \begin{cases} R & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(vrai pour n'importe quel espace topologique contractile)

But suivant : calculer $H_*(\partial\Delta^n; R)$. (ou $H_*(S^{m-1}; R)$)
pour cela il faut introduire la notion d'homologie relative.