CW-complexes

On résume ici les notions vues dans la partie CW-complexe.

Introduction

But du cours de topologie algébrique. Notions de **Catégories** et **Foncteurs**. On définit la catégorie $\mathcal{E}$ns (ensembles et applications), $\mathcal{T}$op (espaces topologiques et applications continues), on pourra considérer la catégorie $\mathcal{T}\mathrm{op}_*$ (espaces topologiques pointés et applications continues pointées), $\mathcal{G}$p (groupes et morphismes de groupes), $\mathcal{A}b$ (groupes abéliens et morphismes de groupes).

On verra des invariants comme des foncteurs. Exemple le groupe fondamental définit un foncteur $\pi_1 : \mathcal{T}\mathrm{op}_* \to \mathcal{G}\mathrm{p}$, le i-ième groupe d'homologie définit un foncteur $H_i : \mathcal{T}\mathrm{op} \to \mathcal{A}b$.

1 La catégorie $\mathcal{T}$op

On utilisera les notations suivantes: $\mathbb{D}^n$ ou $\mathbb{B}^n$ sera la boule fermée de dimension n dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ la sphère unité. On rappelle que $\mathbb{D}^n$ est homéomorphe au cube $I^n = [0,1]^n$ de dimension n.

1.1 Topologie finale par rapport à une famille

On rappelle les notions de topologie finale (voir résumé topologie générale).

Exemple 1.1.1. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X on munit l'ensemble $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient (finale par rapport à l'application quotient $q : X \to X/\mathcal{R}$).
Par exemple si $f : X \to Y$ est continue surjective, on définit la relation $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$ alors f se factorise en $f = \tilde{f} \circ q$ et $\tilde{f}$ est continue et bijective. Mais ce n'est pas nécessairement un homéomorphisme. Y peut être muni d'une topologie moins fine que la topologie quotient $X/\mathcal{R}$.

1.2 Notions de colimites dans une catégorie

On se donne $F : I \to \mathcal{C}$ un foncteur où I est une petite catégorie, et F s'appelle un **diagramme dans $\mathcal{C}$**.

On considérera principalement les catégories suivantes

1. La catégorie discrète $\{1\}, \{2\}$ (deux objets, les seuls morphismes sont les identités).
2. La catégorie ayant trois objets $\{0\}, \{1\}, \{2\}$ et les seuls morphismes non triviaux ($\neq id$) sont $0 \to 1$ et $0 \to 2$. Un foncteur de cette catégorie dans $\mathcal{C}$ consiste en la donnée d'un diagramme dans $\mathcal{C}$ de type

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

3. La catégorie $\mathbb{N}$ où les objets sont en bijection avec $\mathbb{N}$ et

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{N}}(i,j) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } i \leq j \\ \emptyset & \text{sinon .} \end{cases}$$

Un foncteur de cette catégorie dans $\mathcal{C}$ consiste en la donnée d'une famille d'objets $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de morphismes $\varphi_n : X_n \to X_{n+1}, n \geq 0$.

Définition 1.2.1. Une **colimite** de F est un **cocone**, c'est-à dire, la donnée d' un objet $c \in \mathcal{C}$ et d'une collection de morphismes $\alpha_i : F(i) \to c$ dans $\mathcal{C}$ pour tout i objet de I vérifiant: $\forall f : i \to j$ morphisme de I, $\alpha_j \circ F(f) = \alpha_i$ et universel par rapport aux cocones: si (d, β_i) est un autre cocone, alors il existe un unique morphisme $g : c \to d$ tel que pour tout $i \in I$, $g \circ \alpha_i = \beta_i$. On note alors $c = \mathrm{colim}_I\, F$.

Proposition 1.2.2. *Si* $\mathrm{colim}_I\, F$ *existe alors elle est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Fait en cours. □

Définition 1.2.3. La colimite pour un diagramme de type (1) s'appelle **coproduit** ou **somme**, pour un diagramme de type (2) on parle de **pushout** ou **somme amalgamée**. Un diagramme dans $\mathcal{C}$ de type

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

où D est la somme amalgamée de B et C au-dessus de A s'appelle un **carré cocartésien**.

Exemple 1.2.4. On voit en cours que dans $\mathcal{E}$ns les colimites $\mathrm{colim}_I\, F$ existent pour I de type (1) (c'est l'union disjointe de deux ensembles, de type (2), de type (3): dans ce cas là si les $\varphi_n : X_n, \to X_{n+1}$ sont des inclusions d'ensemble on parle de (co)limite inductive, et la colimite est $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Proposition 1.2.5. *Les colimites ci-dessus existent dans* $\mathcal{T}$op *et sont obtenues à l'aide des colimites dans les ensembles, munis de la topologie finale. En particulier le coproduit* $X \sqcup Y$ *de deux espaces topologiques* X *et* Y *est l'ensemble* $X \sqcup Y$ *muni de la topologie finale par rapport aux inclusions: les ouverts de* $X \sqcup Y$ *sont de la forme* $U \sqcup V$ *avec* U *ouvert de* X *et* V *ouvert de* Y.

1.3 Cas particulier: recollement d'espaces topologiques, adjonctions cellulaires, bouquets

Soient X, Y des espaces topologiques et $A \subset Y$, muni de la topologie induite. On considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

On a vu que la colimite dans $\mathcal{T}$op de ce diagramme existe, elle est notée $X \cup_f Y$, et s'appelle pushout ou recollement le long de φ. On a alors le carré cocartésien suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"'] & X \arrow[d, "i_X"] \\ Y \arrow[r, "\phi"] & X \cup_\varphi Y \end{tikzcd}$$

L'application ϕ s'appelle le **morphisme caractéristique du recollement**.

Proposition 1.3.1. *En terme d'ensemble, on a une bijection entre $X \cup_\varphi Y$ et $X \sqcup (Y \setminus A)$. La projection canonique $q : X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ vérifie $q(x) = x, \forall x \in X$, $q(a) = \varphi(a), \forall a \in A$ et $q(y) = y, \forall y \in Y \setminus A$. On rappelle que la topologie sur $X \cup_\varphi Y$ est la plus fine rendant l'application q continue.*
De plus, si A est fermé dans Y alors

- *j_X réalise un homéomorphisme de X sur son image*
- *ϕ restreint à $Y \setminus A$ réalise un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. On montre que j_X est continue, injective, donc bijective sur son image et j_X est fermée. d'où l'homéomorphisme. On montre de même que ϕ restreint à $Y \setminus A$ est continue, injective et ouverte. □

Exemple 1.3.2. En prenant $X = *$ et $\varphi : A \to *$ l'application constante, on obtient $* \cup_\varphi Y$ est homéomorphe à Y/A. Donc si A est fermé dans Y on a un homéomorphisme $Y \setminus A \to Y/A \setminus \{A/A\}$. exo: montrer que cela est vrai aussi dans ce cas où A est un ouvert de Y. Par exemple: $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.

Définition 1.3.3. Si $Y = \mathbb{D}^n$, $A = \mathbb{S}^{n-1}$ on note le recollement précédent: $X \cup_\varphi e^n$ et ce recollement s'appelle **attachement cellulaire**. Comme $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n$ est fermé la proposition 1.3.1 s'applique.

Remarque 1.3.4. $X \cup_\varphi e^n \cong X \sqcup \mathbb{D}^n/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $a\mathcal{R}\varphi(a), \forall a \in \mathbb{S}^{n-1}$. Ainsi pour $x \in X$, on a $cl(x) = \{x\} \cup \{\varphi^{-1}(x)\}$ et pour $y \in \overset{\circ}{\mathbb{D}^n}$ on a $cl(y) = \{y\}$.

Définition 1.3.5. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques. Le **bouquet** $X \vee Y$ est l'espace topologique obtenu en prenant $A = \{*\}$ et les deux applications $A \to X$ et $A \to Y$ envoyant $*$ sur les points bases. Il est naturellement pointé par $\{x_0 = y_0\}$.

Proposition 1.3.6. *Le bouquet de deux espaces correspond au coproduit dans la catégorie des espaces topologiques pointés.*

Démonstration. exo □

Proposition 1.3.7. *Si $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ est une application constante alors $X \cup_\varphi e^n$ est homéomorphe à $X \vee \mathbb{S}^n$.*

Démonstration. exo. □

`Fin du cours du mardi 30 janvier`

Enfin on aura besoin du résultat de topologie suivant

Proposition 1.3.8. *Soit $f : X \to Q$ une application continue surjective, et Q muni de la topologie finale par rapport à f. Si K est compact alors la topologie produit sur $Q \times K$ coincide avec la topologie finale induite par la surjection $f \times id : X \times K \to Q \times K$.*

Pour démontrer la proposition on utilisera le lemme suivant

Lemme 1.3.9. *Soient X un espace topologique et K un espace topologique compact. La projection $p : X \times K \to X$ sur la première composante est fermée.*

Démonstration. Considérons F un fermé de $X \times K$. On va montrer que $X \setminus p(F)$ est ouvert. Si $p(F) = X$ c'est fini. On suppose qu'il existe $x \in X \setminus p(F)$, donc $\{x\} \times K \subset (X \times K) \setminus F$, ouvert dans $X \times K$. Donc pour tout $k \in K$ il existe U_k ouvert de X et V_k ouvert de K tel que $(x, k) \in U_k \times V_k \subset (X \times K) \setminus F$. Ainsi $\{x\} \times K$, compact, est recouvert par les ouverts $\{(\{x\} \times K) \cap (U_k \times V_k)\}_{k \in K}$. On en extrait un recouvrement fini:

$$\{x\} \times K \subset \cup_{i=1}^{N} (U_{k_i} \times V_{k_i}) \subset (X \times K) \setminus F.$$

On a, en particulier, $x \in \cap_{i=1}^{N} U_{k_i} \subset X \setminus p(F)$. En effet, par l'absurde, s'il existe $z \in \cap_{i=1}^{N} U_{k_i}$ tel que $z \in p(F)$, alors il existe $k \in K$ tel que $(z, k) \in F$. Cependant, il existe j tel que $(x, k) \in U_{k_j} \times V_{k_j}$. Donc $k \in V_{k_j}$ et $(z, k) \in U_{k_j} \times V_{k_j} \subset (X \times K) \setminus F$, contradiction. On a ainsi trouvé un voisinage ouvert de X contenant x et inclus dans $X \setminus p(F)$. Donc $p(F)$ est fermé dans X. □

Démontrons maintenant la proposition 1.3.8

Démonstration. On utilise la caractérisation de la topologie finale. Nous allons montrer que pour tout $g : Q \times K \to Z$, si $g \circ (f \times id)$ est continue, alors g est continue. Fixons un tel g et notons $h = g \circ (f \times id)$. Fixons $(x_0, k_0) \in X \times K$ et notons $(y_0, k_0) = (f(x_0), k_0)$. Nous allons montrer que g est continue en (y_0, k_0). Fixons U ouvert de Z et contenant $g(y_0, k_0)$.
Etape 1. h est continue en (x_0, k_0) donc il existe W voisinage de (x_0, k_0) tel que $h(W) \subset U$. On peut choisir $W = W_1 \times W_2$ avec W_1 voisinage de x_0 et W_2 voisinage compact de k_0 (K est compact donc localement compact). Remarquons que $g(y_0, W_2) = h(x_0, W_2) \subset U$. Posons

$$V = \{y \in Q | g(y, W_2) \subset U\} \subset Q$$

Etape 2. Montrons que V est un ouvert de Q, ou de manière équivalente que $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X. Pour tout $x \in X$ on a $x \in f^{-1}(V) \iff h(x, W_2) \subset U$ se qui se traduit aussi par

$$x \notin f^{-1}(V) \Leftrightarrow h(x, W_2) \not\subset U \Leftrightarrow \exists k \in W_2,\ h(x, k) \notin U \Leftrightarrow x \in p_X(h^{-1}(Z \setminus U) \cap X \times W_2)$$

où $p_X : X \times W_2 \to X$. Le lemme précédent implique que p_X est fermé. On en déduit ainsi que $X \setminus f^{-1}(V)$ est fermé dans X donc $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X, donc V est ouvert dans Q.
Etape 3, conclusion: g est continue en (y_0, k_0). En effet, on a trouvé V voisinage de y_0, W_2 voisinage de k_0 tel que $V \times W_2$ contient (y_0, k_0) et tel que $g(V \times W_2) \subset U$. □

Corollaire 1.3.10. *Soit $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ une application continue. On a $(X \cup_\varphi e_n) \times I$ est homéomorphe à $(X \times I) \cup_{\varphi \times id_I} (\mathbb{D}^n \times I)$.*

2 CW-complexes

2.1 Premières définitions

Définition 2.1.1. Un **CW complexe** (ou espace cellulaire) X est un espace topologique muni de sous-espaces $X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X$ vérifiant les propriétés suivantes

1. X_0 est un ensemble de points (la topologie induite sur X_0 est discrète).
2. Pour tout $n \geq 1$, il existe un ensemble d'indices I_n et pour tout $\alpha \in I_n$ des applications $\varphi_\alpha^n : \mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1}$ tel que le diagramme suivant soit un carré cocartésien:

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{\alpha \in I_n} \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\bigsqcup_{\alpha \in I_n} \varphi_\alpha^n"] \arrow[d, "\bigsqcup_{\alpha \in I_n} \iota"'] & X_{n-1} \arrow[d, "i_{n-1}"] \\
\bigsqcup_{\alpha \in I_n} \mathbb{D}^n \arrow[r, "\bigsqcup_{\alpha \in I_n} \phi_\alpha^n"'] & X_n \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

3. $X = \cup_n X_n$ est muni de la topologie finale: $U \in X$ est ouvert si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, U \cap X_n$ est ouvert dans X_n.

On dit aussi que X admet une **décomposition cellulaire**.

Vocabulaire 2.1.2. X_n s'appelle le n**-squelette de** X.
Pour $\alpha \in I_n$, l'application caractéristique $\phi_\alpha^n : \mathbb{D}^n \to X_n$ réalise un homéomorphisme de l'intérieur de $\mathbb{D}^n$ sur son image, que l'on note e_α^n et que l'on appelle **cellule de** X de dimension n.
Si X possède un nombre fini de cellules et X_0 est fini, on dit que X est un **CW-complexe fini**.
S'il existe N tel que $\forall n \geq N, X_n = X_N$ (de manière équivalente $I_n = \emptyset$) on dit que X est un **CW-complexe de dimension finie** et sa dimension est l'inf des N qui vérifie cette propriété.
Dans le cas contraire, on dit qu'il est de **dimension infinie**.
Un **graphe** est un CW-complexe de dimension 1.

Remarque 2.1.3. En tant qu'ensemble, $X_{n+1} \cong X_n \bigsqcup_{\alpha \in I_{n+1}} e_\alpha^{n+1}$ et $X \cong X_0 \bigsqcup_{n \geq 1} \bigsqcup_{\alpha \in I_n} e_\alpha^n$.

Exemple 2.1.4. On a vu en cours différentes décompositions cellulaires de $\mathbb{S}^n$ et une décomposition cellulaire du tore.

2.2 Propriétés topologiques des CW-complexes

On suppose ici que X est muni d'une structure de CW complexe. On note I_n l'ensemble des indices de ses n-cellules et X_n son n-squelette. Les propositions suivantes ont été démontrées en cours

Proposition 2.2.1. *On a un homéomorphisme*

$$X_{n+1}/X_n \cong \bigvee_{\alpha \in I_{n+1}} \mathbb{S}^{n+1}.$$

(si $I_{n+1} = \emptyset$ on a $X_{n+1} = X_n$).

Proposition 2.2.2. *X_n est fermé dans X_{n+1}. X_n est fermé dans X.*

Démonstration. Démonstration vue en cours. □

Proposition 2.2.3. *Soit $K \subset X$ un quasi-compact. Alors K intersecte un nombre fini de cellules de X.*

Démonstration. On remarque que $K \cap X_0$ est un fermé de K, donc quasi-compact. Comme il est discret on en déduit que $K \cap X_0$ est fini. Ainsi K intersecte un nombre fini de 0-cellules. Pour $n \geq 1$, on note I_n l'ensemble des indices des cellules de dimension n de X. Notons $J = \{\alpha | e_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$ et $J_n = J \cap I_n$. Pour chaque $j \in J$ on choisit $x_\alpha \in e_\alpha \cap K$ et on note $Y = \{x_\alpha, \alpha \in J\} \subset X$ et $Y_n = \{x_\alpha, \alpha \in J_n\} \subset X_n$. Montrons que Y_n est fermé dans X_n. L'application $\Phi_n : \sqcup_{i \in I_n} \mathbb{D}^n \to X_n$ restreinte à $\sqcup_{i \in I_n} \overset{\circ}{\mathbb{D}}{}^n$ réalise un homéomorphisme sur son image. Notons $F_n = \sqcup_{\alpha \in J_n} \{y_\alpha\}$ avec y_α l'unique élément de la boule ouverte tel que $\Phi_\alpha(y_\alpha) = x_\alpha$. Ceci implique que $Y_n = \Phi_n(F_n)$ est fermé dans X_n car $\Phi_n^{-1}(\Phi_n(F_n)) = F_n$ est fermé dans $\sqcup_{\alpha \in I_n} \mathbb{D}^n$. Ceci implique que Y_n est fermé dans X_m pour tout $m \geq n$.
On a alors $Y \cap X_n = \cup_{n \geq 1} Y_n$ est fermé dans X_n donc Y est fermé dans X et $Y \cap K = Y$ est fermé dans K, quasi-compact. Or Y est discret, donc Y est fini. Conclusion, K intersecte un nombre fini de cellules. □

Définition 2.2.4. On dit que $A \subset X$ est un **sous-CW complexe** si

- A est fermé.
- En tant qu'ensemble A est union de cellules de X.

Proposition 2.2.5. *Tout sous-CW-complexe est un CW-complexe. Pour tout n, le n-squelette de X est un sous CW-complexe de X.*

Démonstration. Démonstration faite en cours. □