

Mardi 12/03/24

---

Démonstration du théorème de Van Kampen

P. Lévrier

---

ENS -

---

23-24

---



# Le théorème de Van Kampen

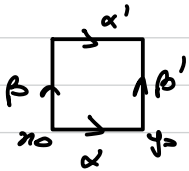
Thm Soit  $X = U_1 \cup U_2$  un espace topologique avec  $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$  ouverts, connexes par arcs.

Soit  $x_0 \in U_1 \cap U_2$

On a 
$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U_1, x_0) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)} \pi_1(U_2, x_0)$$

On rappelle le lemme suivant.

Soit  $G: [0,1]^2 \rightarrow X$  une application continue.



$$\begin{aligned} \alpha(t) &= G(t, 0) & \alpha(0) &= x_0 & \alpha(1) &= y_0 \\ \alpha'(t) &= G(t, 1) \\ \beta(s) &= G(0, s) & \beta'(s) &= G(1, s). \end{aligned}$$

on a

$$[\alpha] = [\beta][\alpha'][\beta'] \text{ dans } \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1([0,1]^2, (0,0)) \cong \pi_1([0,1], 0) \cong \mathbb{Z}$$

Dém du lemme:

$$L: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^2$$

$$(a,r) \mapsto \begin{cases} (0, 3a) & 0 \leq a \leq \frac{1}{3} \\ (\frac{3a-1}{2-r}, r) & \frac{1}{3} \leq a \leq 1-\frac{1}{3} \\ (1, 3-3a) & 1-\frac{1}{3} \leq a \leq 1. \end{cases}$$

$G \circ L$  réalise l'homotopie voulue  $\square$

Notations :  $G_j = \pi_1(U_j, x_0)$  pour  $j \in \{1, 2\}$ ,  $G = \pi_1(X, x_0)$   
 $H = \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$   $\varphi_j: H \rightarrow G_j$  la morphisme de groupes induit par l'inclusion canonique  $U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_j$ .

(2)

On note de même  $j_i: G_i \rightarrow G$  la morphisme de groupes induit par l'inclusion  $G_i \hookrightarrow X$ .

On note  $i_j: G_j \hookrightarrow G_1 * G_2$

$N$  le sous-groupe distingué de  $G_1 * G_2$  engendré par les éléments de type  $(\varphi_1 h, \varphi_2 h^{-1})$  pour  $h \in H$ .

On note  $\bullet$  la multiplication dans  $G_1 * G_2$ .

en particulier on a  $i_1 \varphi_1(h) \bullet i_2 \varphi_2(h)^{-1} \in N, \forall h \in H$ .

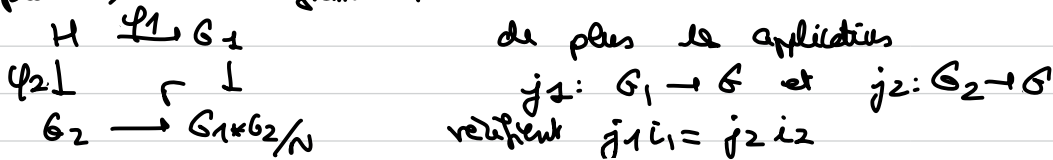
Pour  $a, b \in G_1 * G_2$  on note  $a \equiv b [N]$

$\Leftrightarrow \exists n \in N \quad a = n \bullet b$

$\Leftrightarrow \exists n' \in N \quad a = b \bullet n'$ .

En particulier on a  $\forall h \in H \quad i_1 \varphi_1(h) \equiv i_2 \varphi_2(h) [N]$ .

On a montré que  $G_1 * G_2 / N$  est la somme amalgamée (pushout) du diagramme :



Ainsi il existe un unique morphisme

$\tilde{f}: G_1 * G_2 \rightarrow G$  tq  $\tilde{f} \circ i_1 = j_1$   $\tilde{f} \circ i_2 = j_2 : G_2 \rightarrow G$ .

et tel que  $\forall h \in H, \tilde{f}(i_1 \varphi_1(h) \bullet i_2 \varphi_2(h)^{-1}) = e_G$ .

donc  $N \subset \ker \tilde{f}$ .

On montre a)  $\tilde{f}$  surjective

b)  $\ker \tilde{f} \subset N$ .

Etape 1 montrons que  $\tilde{f}$  est surjective  
 un élément de  $G$  s'écrit  $[\alpha]$ , avec  $\alpha$  lacet de  $X$   
 basé en  $x_0$  -  $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ .

il existe  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  tel que  
 $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]} \in U_{l_i}$   $l_i \in \{1, 2\}$ . (en utilisant le nombre de  
 Lebesgue). On peut choisir ce découpage afin d'alterner  
 $U_1$  et  $U_2$ . En particulier pour tout  $i$  on a  $t_i \in U_1 \cap U_2$ .  
 On choisit  $\gamma_i: [0,1] \rightarrow U_1 \cup U_2$  un chemin de  $t_i$  à  $x_0$ .  
 si  $t_i = x_0$ , on prend le chemin constant.

On note alors  $\alpha_i = \gamma_i^{-1} \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]} \gamma_{i+1}$  est un lacet de  
 $U_{l_i}$  basé en  $x_0$ .

posons

$$A = ([\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_{k-1}]) \in G_1 * G_2$$

alors

$$\tilde{f}(A) = [\alpha_1][\alpha_2] \dots [\alpha_{k-1}] = [\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_{k-1}] = [\alpha] \in G.$$

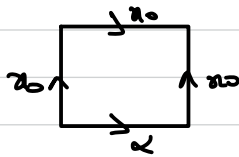
Etape 2  $\text{Ker } \tilde{f} \subset N$ .

Soit  $A = ([\alpha_1], \dots, [\alpha_n]) \in \text{Ker } \tilde{f}$ .

$$\Rightarrow [\alpha_1 \dots \alpha_n] = [c_{x_0}]. \quad \text{On note } \alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_n.$$

On va montrer  $A \equiv e$   $[H]$ .

On a la donnée d'une homotopie  $S: [0,1]^2 \rightarrow X$   
 qui vérifie les conditions au bord suivantes



en utilisant le nombre de Lebesgue,  
 on a un quadrillage en carrés

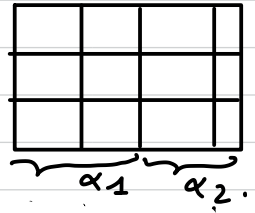
$$P_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] \text{ tel que}$$

$$S(P_{ij}) \subset U_{l_j}$$

avec  $l_{ij} \in \{1, 2\}$ .

Quitte à rallonger le pavé on peut supposer qu'il existe  
 $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} < i_n$

tg  $S' \left| \left[ (t_{ij}, t_{ij+1}) \times \mathcal{I}_0 \right] \right. = \alpha_j$ . Par exemple:

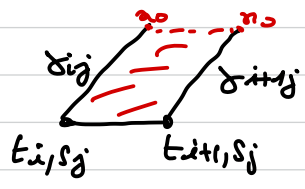


Notons  $\alpha_{ij} = S(t_i, s_j)$

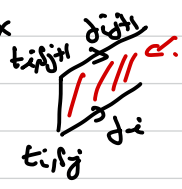
et choisissons un chemin  $\gamma_{ij}: [0,1] \rightarrow X$   
 de  $\alpha_{ij}$  à  $\alpha_0$ . on choisit ce chemin à valeurs dans  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$   
 ou  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  selon où se trouve  $\alpha_{ij}$  -  
 si  $\alpha_{ij} = \alpha_0$  on prend  $\gamma_{ij} = c_{\alpha_0}$

On va construire  $S': [0,1]^3 \rightarrow X$  tg  $S'(t, s, 0) = S(t, s)$   
 par étapes.

(a) plateaux horizontaux

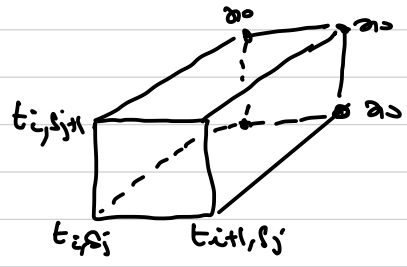


(b) plateaux verticaux



(c) cubes:

tout se remplit  
 sauf face du fond et  
 intérieur.



si  $S' \left| \left[ (t_i, t_{i+1}) \times (s_j, s_{j+1}) \right] \subset \mathcal{U}_{ij}$  alors  $S' \left| \left( (t_i, t_{i+1}) \times (s_j, s_{j+1}) \right) \times [0,1] \right. = \alpha_{ij}$

On note  $\alpha'_j = S' \Big|_{[t_{ij}, t_{i,j+1}] \times [y, y+1]}$

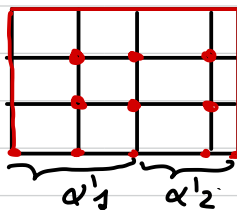
on a  $\alpha_j$  un lacet de  $U_{e_j} \Rightarrow \alpha'_j$  lacet de  $U_{e_j}$   
 et  $(\alpha'_j) = (\alpha_j) \in \pi_1(U_{e_j}, \alpha_0)$

Donc

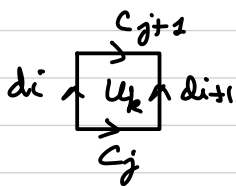
$$A = [(\alpha'_1), \dots, (\alpha'_n)] \quad \text{et} \quad (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = (\alpha)$$

et  $S' \Big|_{(0,1) \times (0,1) \times [y, y+1]}$  fournit une fonction  $\text{rel } \alpha, \gamma$  entre  $\alpha$  et  $\alpha_0$  avec un parage tel que

$$\alpha'_{ij} = \alpha_0 \quad \forall i, j$$



Regardons un de petits carrés:

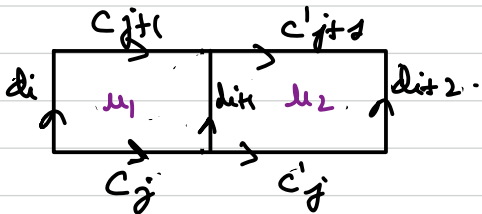


$U_k, k \in \{1, 2\}$

on a, par le lemme

$$[C_j] = [d_i][C_{i+1}][d_{i+1}]^{-1} \in G_k.$$

imaginons que l'on se trouve dans le cas de figure suivant:



dans  $G_1$  on a:

$$[C_j] = [d_i][C_{j+1}][d_{i+1}]^{-1}$$

dans  $G_2$  on a

$$[C'_j] = [d_{i+1}][C'_{j+1}][d_{i+2}]^{-1}$$

Calculons dans  $G_1 \leftarrow G_2$  le produit

$$i_1 [C_i] \cdot i_2 [C'_i]$$

$$= i_1 [d_i] \cdot i_1 [C_{j+1}] \cdot i_1 [d_{i+1}]^{-1} \cdot i_2 [d_{i+1}] \cdot i_2 [C'_{j+1}] \cdot i_2 [d_{i+2}]^{-1} \\ i_1 \varphi_1 [d_{i+1}]^{-1} \cdot i_2 \varphi_2 [d_{i+1}]$$

6

car dit+1:  $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2 -$

Donc

$$i_1 [c_i] \cdot i_2 [c'_i] \equiv i_1 [d_i] \cdot i_1 [c'_{j+1}] \cdot i_2 [c'_{j+1}] \cdot i_2 [d_{i+2}]^{-1}$$

si les deux casés ont  $\bar{a}$  valeurs des de même espce  $\mathbb{R}_1$   
 $i_1 [c_j] \cdot i_1 [c'_j] = i_1 [d_j] \cdot i_1 [c'_{j+1}] \cdot i_1 [c'_{j+1}] \cdot i_1 [d_{i+2}]^{-1}$

Conclusion dans  $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$

$$A \equiv [a_1 \bar{a}] \cdot [a_2 \bar{a}] \cdot \dots \cdot [a_n \bar{a}] \quad \text{modulo } \mathbb{H}.$$

où  $a_i \bar{a}$  est le lacet apparaissant à la  $i$ -ème ligne  
du cadrillage. - la dernière ligne du cadrillage correspond à  
 $[c_{00}] \cdot [c_{20}] \dots \cdot [c_{2n}]$

Donc  $A \equiv e$  modulo  $\mathbb{H}$  ~~et~~