Homologie

Contents

1 Algèbre homologique–Notions de base

Pour travailler cette partie on pourra s'appuyer sur le libre de Félix et Tanré, section 5.
On fixe R un anneau commutatif. On suppose connue la notion de R-module. On note ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ la catégorie des R-modules. La plupart du temps on se restreindra au cas où $R = \mathbb{Z}$ et dans ce cas, la catégorie des R-modules coincide avec la catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens.

1.1 Complexes de chaines de R-modules

Définition 1.1.1. Un complexe de chaines $(C_\bullet, d^C_\bullet)$ de R-modules est la donnée d'une famille $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de R-modules et de morphismes de R-modules $d^C_n\colon C_n \to C_{n-1}$, vérifiant $d^C_n \circ d^C_{n+1} = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La famille des morphismes d^C_n s'appelle *différentielle* de C.

Un morphisme de complexes de chaines est la donnée d'une famille de morphismes de R-modules $f_n\colon C_n \to D_n$ vérifiant $d^D_n \circ f_n = f_n \circ d^D_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On note $\mathrm{Ch}(R)$ la catégorie dont les objets sont les complexes de chaines (de R-modules), et les morphismes, les morphismes de complexes de chaines.

Définition 1.1.2. Soit $(C_\bullet, d^C_\bullet)$ un complexe de chaines de R-modules. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on définit: le R-module des n-*cycles*: $Z_n(C_\bullet) = \ker(d^C_n)$, le R-module des n-**bords**: $B_n(C_\bullet) = \mathrm{im}(d^C_{n+1})$ et le n-ième R-module **d'homologie**: $H_n(C_\bullet) = Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.

Remarque 1.1.3. Ces définitions sont fonctorielles au sens où l'on peut étendre les définitions précédentes en des foncteurs $Z_n, B_n, H_n\colon \mathrm{Ch}(R) \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. Il faut vérifier que si $f\colon C_\bullet \to D_\bullet$ est un morphisme dans $\mathrm{Ch}(R)$ alors $f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D_n)$ et $f_n(B_n(C)) \subset f_n(B_n(D))$.

Remarque 1.1.4. Par la suite, on parlera de "complexe" pour dire "complexe de chaines de R-modules". Dans les exemples, il arrivera souvent que les complexes soient gradués sur $\mathbb{N}$ (on reprend les mêmes définitions mais on suppose que l'on a une famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de R-modules et une famille $d^C_n : C_n \to C_{n-1}$ de morphismes avec $n \geq 1$). En posant $C_n = 0$ pour $n < 0$ et $d^C_n = 0$ pour $n \leq 0$, on peut voir ces complexes comme des complexes de chaines. Quand il sera nécessaire de regarder ces complexes en particulier, on parlera de complexe $\mathbb{N}$-gradués et on notera $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ la catégorie correspondante. Remarquons que lorsque le complexe est $\mathbb{N}$-gradué alors $Z_n(C), B_n(C)$ et $H_n(C)$ sont nuls pour $n < 0$. Et $H_0(C) = C_0/B_0(C)$.

Définition 1.1.5. Un complexe est dit **exact** ou **acyclique** si pour tout n, on a $H_n(C_\bullet) = 0$. On dit aussi qu'un complexe acyclique de R-modules est une suite exacte longue de R-modules. Un morphisme $f\colon (C_\bullet, d^C_\bullet) \to (D_\bullet, d^D_\bullet)$ de complexes de chaines est un *quasi-isomorphisme* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $H_n(f)\colon H_n(C) \to H_n(D)$ est un isomorphisme.

Remarque 1.1.6. Considérons un complexe tel que $C_n = 0$ pour $i < 0$ et $i \geq 3$. Un tel complexe s'écrit

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{f} C_1 \xrightarrow{g} C_0 \longrightarrow 0$$

avec $g \circ f = 0$. Ce complexe est exact si et seulement si f est injective, $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$ et g est surjective. En effet $H_2(C) = \ker(f)$, $H_1(C) = \ker(g)/\mathrm{im}(f)$ et $H_0(C) = C_0/\mathrm{im}(g)$. Donc ce complexe est exact si et seulement si on est en présence d'une suite exacte courte de R-modules.

Exemple 1.1.7. On considère les complexes suivants.

1. Le complexe de groupes abéliens suivant est acyclique.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

2. Le complexe de groupes abéliens suivant est acyclique

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

   Plus précisément pour tout $n \geq 0$, $C_n = \mathbb{Z}$ et $d^C_n = \mathrm{id}$ si n est impair et $d^C_n = 0$ si n est pair.

3. Le complexe défini par $C_0 = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v, C_1 = \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}f$ et $C_n = 0$ si $n \notin \{0, 1\}$, a son homologie concentrée en degré 0 et 1. Se donner une différentielle d^C sur C équivaut à se donner un morphisme de groupes de C_1 dans C_0. Comme C_1 est un groupe abélien libre sur 2 générateurs, il suffit de se donner les valeurs de $d^C_1(e)$ et $d^C_1(f)$. Ou de manière équivalente une matrice dans $M_2(\mathbb{Z})$. L'homologie du complexe est nulle si et seulement si la matrice est inversible dans $M_2(\mathbb{Z})$. Si l'on pose $d^C_1(e) = v - u = -d^C_1(f)$, on montre que $H_0(C, d^C)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et $H_1(C, d^C) = \mathbb{Z}(e + f)$.

On rappelle le lemme du serpent (exo 2, TD8)

Lemme 1.1.8. *Soit un diagramme commutatif de R-modules*

$$\begin{array}{ccccccc} & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\ 0 \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Il existe un morphisme $\delta : \ker\gamma \longrightarrow \operatorname{coker}\alpha$ qui rend la suite

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{coker}\beta \longrightarrow \operatorname{coker}\gamma$$

exacte. Si de plus $A \longrightarrow B$ est injective alors $\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta$ l'est aussi, et si $B' \longrightarrow C'$ est surjective alors $\operatorname{coker}\beta \longrightarrow \operatorname{coker}\gamma$ l'est aussi.

1.2 Suite exactes courtes de complexes de chaines

Définition 1.2.1. Une suite exacte courte de complexes de chaines

$$0 \longrightarrow (C_\bullet, d_\bullet^C) \xrightarrow{f} (D_\bullet, d_\bullet^D) \xrightarrow{g} (E_\bullet, d_\bullet^E) \longrightarrow 0$$

est la donnée de deux morphismes de complexes de chaines f et g tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de R-modules.

Théorème 1.2.2. *Toute suite exacte courte de complexes de chaines induit une suite exacte longue en homologie. Cette suite exacte longue est fonctorielle en les morphismes de suites exactes courtes de complexes de chaines.*

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on peut appliquer le lemme du serpent aux suites exactes courtes suivantes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d_i^C"'] & D_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "d_i^D"'] & E_i \arrow[r] \arrow[d, "d_i^E"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & D_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] & E_{i-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ce qui donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow Z_i(C) \xrightarrow{Z_i(f)} Z_i(D) \xrightarrow{Z_i(g)} Z_i(E) \xrightarrow{\delta}$$

$$C_{i-1}/B_{i-1}(C) \xrightarrow{[f_{i-1}]} D_{i-1}/B_{i-1}(D) \xrightarrow{[g_{i-1}]} E_{i-1}/B_{i-1}(E) \longrightarrow 0$$

Fixons $n \in \mathbb{Z}$. On applique à nouveau le lemme du serpent au diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& C_{n+1}/B_{n+1}(C) \arrow[r, "{[f_{n+1}]}"] \arrow[d, "{[d_{n+1}^C]}"'] & D_{n+1}/B_{n+1}(D) \arrow[r, "{[g_{n+1}]}"] \arrow[d, "{[d_{n+1}^D]}"'] & E_{n+1}/B_{n+1}(E) \arrow[r] \arrow[d, "{[d_{n+1}^E]}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_n(C) \arrow[r, "Z_n(f)"] & Z_n(D) \arrow[r, "Z_n(g)"] & Z_n(E) &
\end{tikzcd}$$

Ce qui donne une suite exacte

$$H_{n+1}(C) \xrightarrow{H_{n+1}(f)} H_{n+1}(D) \xrightarrow{H_{n+1}(g)} H_{n+1}(E) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$$

que l'on peut itérer pour obtenir la suite exacte longue en homologie. Rappelons comment est calculé δ_{n+1} dans le lemme du serpent. Soit $[x] \in H_{n+1}(E)$ avec $x \in Z_{n+1}(E)$. Il existe $y \in D_{n+1}$ tel que $g_{n+1}(y) = x$. Comme $g_n(d_{n+1}^D(y)) = d_{n+1}^E(g_{n+1}(y)) = d_{n+1}^E(x) = 0$, il existe un unique $z \in Z_n(C)$ tel que $f_n(z) = d_{n+1}^D(y)$. On pose $\delta_{n+1}[x] = [z]$.
Démontrons la fonctorialité. On se donne donc un diagramme comme ceci dans $\mathrm{Ch}(R)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & D_\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & E_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r, "f'"] & D'_\bullet \arrow[r, "g'"] & E'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont des suites exactes courtes de complexes de chaines et les colonnes sont des morphismes de complexes de chaines. On obtient les suites exactes longues d'homologie:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(C) \arrow[r, "H_{n+1}(f)"] \arrow[d, dashed, "H_{n+1}(\alpha)"'] & H_{n+1}(D) \arrow[r, "H_{n+1}(g)"] \arrow[d, dashed, "H_{n+1}(\beta)"'] & H_{n+1}(E) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "H_{n+1}(\gamma)"'] & H_n(C) \arrow[r, "H_n(f)"] \arrow[d, dashed, "H_n(\alpha)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(C') \arrow[r, "H_{n+1}(f')"] & H_{n+1}(D') \arrow[r, "H_{n+1}(g')"] & H_{n+1}(E') \arrow[r, "\delta'_{n+1}"] & H_n(C') \arrow[r, "H_n(f')"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

□

Les flèches verticales sont bien définies, mais il faut montrer que les carrés commutent. Les deux carrés de gauche commutent par fonctorialité de $H_{n+1}\colon \mathrm{Ch}(R) \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. Il reste à montrer que pour tout n on a $H_n(\alpha) \circ \delta_{n+1} = \delta'_{n+1} \circ H_{n+1}(\gamma)\colon H_{n+1}(E) \to H_n(C')$. On fixe $x \in Z_{n+1}(E)$. On prend $y \in D_{n+1}$ tel que $y = g_{n+1}(x)$. On a $\delta([x]) = [z]$ avec z l'unique élément de $Z_n(C)$ tel que $f_n(z) = d^D_{n+1}(y)$. On a donc $(H_n(\alpha) \circ \delta)(x) = [\alpha_n(z)]$. Comme $g'_{n+1}(\beta_{n+1}(y)) = \gamma_{n+1}(g_{n+1}(y)) = \gamma_{n+1}(x)$, on a $\delta'_{n+1}([\gamma_{n+1}(x)]) = [\alpha_n(z)]$ car $f'_n(\alpha_n(z)) = \beta_n(f_n(z)) = \beta_n d^D_{n+1}(y) = d^{D'}_{n+1}(\beta_{n+1}(y))$.

Corollaire 1.2.3. *Dans une suite exacte courte de complexes de chaines, si deux des trois complexes sont exacts, le troisième l'est aussi. Etant donné un morphisme de suite exactes courtes de complexes de chaines, si deux des trois morphismes impliqués sont des quasi-isomorphismes, le troisième l'est aussi.*

Démonstration. Dans la longue suite exacte, les roles de C, D et E sont symétriques. Donc on peut supposer que les complexes de chaines D et E sont acycliques. On aura donc une suite exacte (en C) de la forme $0 \to H_n(C) \to 0$. Ceci implique= $H_n(C) = \ker(0) = \mathrm{im}(0) = 0$, donc C est acyclique. Pour la deuxième partie du corollaire on utilise le lemme des cinq (TD 8, exo 1) pour conclure. □

1.3 Homotopie de complexes de chaines

Définition 1.3.1. Soient $f, g : C_\bullet \to D_\bullet$ deux morphismes de complexes de chaines de R-modules. On dit que f est homotope à g, et on note $f \simeq g$, s'il existe une famille de morphimes de R-modules $h_n : C_n \to D_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, telle que $h_{n-1}d^C_n + d^D_{n+1}h_n = g_n - f_n$. Remarquons que si $C, D \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ la condition précédente se restreint à

$$\begin{cases} h_{n-1}d^C_n + d^D_{n+1}h_n & g_n - f_n,\ n \geq 1 \\ d^D_1 h_0 & = f_0 - g_0. \end{cases}$$

Proposition 1.3.2. *L'homotopie entre morphismes de complexes de chaines est une relation d'équivalence.*

Démonstration. $f \simeq f$ car il suffit de prendre $h = 0$. Si $f \simeq g$ avec homotopie h, alors $g \simeq f$ avec homotopie $-h$. Si $f \simeq g$ avec homotopie h et $g \simeq k$ avec homotopie h' alors $f \simeq k$ avec homotopie $h + h'$. □

Théorème 1.3.3. *Si $f \simeq g\colon C_\bullet \to D_\bullet$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(f) = H_n(g)$.*

Démonstration. Soit $x \in Z_n(C)$. On a $f_n(x) = g_n(x) + d^D_{n+1}h_n(x)$. Comme tous les éléments en jeu sont à valeurs dans $Z_n(D)$ on peut prendre leur classe dans $H_n(D)$, ce qui donne $H_n(f)([x] = [f_n(x)] = [g_n(x)] = H_n(g)[x]$. □

Définition 1.3.4. On dit que $f : C_\bullet \to D_\bullet$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe $g : D_\bullet \to C_\bullet$ tel que $gf \simeq 1_{C_\bullet}$ et $fg \simeq 1_{D_\bullet}$. On dit alors queles complexes $C_\bullet$ et $D_\bullet$ sont homotopiquement équivalents.

Remarque 1.3.5. On peut montrer aisément que si $f \simeq g\colon C_\bullet \to D_\bullet$ et si $a\colon C_\bullet \to C_\bullet$ et $b\colon D_\bullet \to D_\bullet$ sont des morphismes de complexes de chaines, alors $b \circ f \circ a \simeq b \circ g \circ a$. Cela implique que l'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence. En effet, la réflexivité et la symétrie ne posent pas de problèmes. Supposons que $f\colon C_\bullet \to D_\bullet$ et $f'\colon D_\bullet \to E_\bullet$ sont deux équivalences d'homotopie. On a $g : D_\bullet \to C_\bullet$ et $g'\colon E_\bullet \to D_\bullet$ tels que $fg \simeq 1_D, gf \simeq 1_C, f'g' \simeq 1_E$ et $g'f' \simeq 1_D$. Donc $(f'f) \circ (gg') = f'(fg)g' \simeq f'g' \simeq 1_E$ et de même $(gg') \circ (f'f) \simeq 1_C$.

Corollaire 1.3.6. *Si f est une équivalence d'homotopie alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(f)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Il existe g tel que $fg \simeq 1_D$ et $gf \simeq 1_C$, donc $H_n()H_n(g) = \mathrm{id}$ et $H_n(g)H_n(f) = \mathrm{id}$. Donc $H_n(f)$ est un isomorphisme. □

Définition 1.3.7. Un complexe de chaines $C_\bullet$ est **contractile** si $1_{C_\bullet} \simeq 0$.

Corollaire 1.3.8. *Si $C_\bullet$ est contractile alors il est acyclique.*

Démonstration. On a $0 = H_n(\mathrm{id}) : H_n(C) \to H_n(C)$ donc nécessairement $H_n(C) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. □

Remarque 1.3.9. Attention, la réciproque n'est pas vraie en général. on pourra s'en convaincre en étudiant la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

qui forme un complexe acyclique mais qui n'est pas contractile.

2 Homologie singulière

2.1 Définition et premières propriétés

On note $\Delta^n = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ le n-simplexe standard, enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants. Tout point de Δ^n s'écrit de manière unique (coordonnées barycentriques) $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \in [0,1], \sum_i \lambda_i = 1$. Si les points v_i sont clairs, on simplifiera parfois cette écrirute en posant $x = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$. Les applications faces

$$\delta_i : \Delta^{n-1} = \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle \to \Delta^n = \langle w_0, \dots, w_n \rangle,\ 0 \le i \le n$$

sont les application affines définies par

$$\delta_i(v_j) = \begin{cases} v_j & \text{si } j < i \\ v_{j+1} & \text{si } j \ge i \end{cases}$$

ou encore: $\delta_i(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_i, \dots, \lambda_{n-1})$.

Lemme 2.1.1. *Pour tout $0 \le i \le j \le n$ on a*

$$\delta_i \circ \delta_j = \delta_{j+1} \circ \delta_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n+1}$$

Démonstration. D'une part pour $i \leq j$ on a D'autre par, on a

$$\delta_i(\delta_j(v_k)) = \begin{cases} \delta_i(v_k) & \text{si } k < j \\ \delta_i(v_{k+1}) & \text{si } k \geq j \end{cases} = \begin{cases} v_k & \text{si } k < i \\ v_{k+1} & \text{si } i \leq k < j \\ v_{k+2} & \text{si } k \geq j \end{cases}$$

D'autre part

$$\delta_{j+1}(\delta_i(v_k)) = \begin{cases} \delta_{j+1}(v_k) & \text{si } k < i \\ \delta_{j+1}(v_{k+1}) & \text{si } k \geq i \end{cases} = \begin{cases} v_k & \text{si } k < i \\ v_{k+1} & \text{si } i \leq k \text{ et } k+1 < j+1 \\ v_{k+2} & \text{si } k+1 \geq j+1 \end{cases}$$

□

Définition 2.1.2. Soit X un espace topologique. Le **complexe de chaines singulier** est donné par la famille $(C_n^{sing}(X;R))_{n\geq 0}$, où $C_n^{sing}(X;R)$ est le R-module libre engendré par les *n-simplexes singuliers*, à savoir, les applications continues $\sigma : \Delta^n \to X$.
Pour $\sigma : \Delta^n \to X$ on note e_σ ou $[\sigma]$ l'élément correspondant dans $C_n^{sing}(X;R)$. Un élément de $C_n^{sing}(X;R)$ s'écrit de manière unique $x = \sum_\sigma \lambda_\sigma e_\sigma$, avec $\lambda_\sigma \in R$ et $\{\sigma | \lambda_\sigma \neq 0\}$ est fini.
On définit $\partial_n \colon C_n^{sing}(X;R) \to C_{n-1}^{sing}(X;R)$ par

$$\partial_n(e_\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e_{\sigma\circ\delta_i}, \ (\partial_n(\sum_\sigma \lambda_\sigma e_\sigma) = \sum_\sigma \lambda_\sigma \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e_{\sigma\circ\delta_i}),$$

Remarque 2.1.3. Le lemme 2.1.1 impllique $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. En effet

$$\begin{aligned}
\partial_n \circ \partial_{n+1}(e_\sigma) &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} e_{\sigma\circ\delta_i\circ\delta_j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i\leq j} (-1)^{i+j} e_{\sigma\circ\delta_i\circ\delta_j} + \sum_{j=0}^{n} \sum_{i>j} (-1)^{i+j} e_{\sigma\circ\delta_i\circ\delta_j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i\leq j} (-1)^{i+j} e_{\sigma\circ\delta_{j+1}\circ\delta_i} + \sum_{j=0}^{n} \sum_{i>j} (-1)^{i+j} e_{\sigma\circ\delta_i\circ\delta_j} = 0
\end{aligned}$$