DMA-ENS

2023/2024 MaJ: 26 mars 2024

Homotopie, groupe fondamental et théorème de Seifert-Van Kampen

Contents

1 Homotopie

1.1 Applications homotopes

Définition 1.1.1. Deux applications continues f et $g : X \to Y$ sont **homotopes** s'il existe une aplication continue $F : X \times I$ telles que $F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x)$, pour tout $x \in X$. On note $f \simeq g$.

Exemple 1.1.2. a) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ est homotope à une application constante. En effet, il suffit de considérer l'homotopie $\mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ qui à (x,t) associe tx.

b) Toute application continue, non surjective $f : X \to \mathbb{S}^n$ est homotope à une application constante. En effet, fixons $v \in \mathbb{S}^n$ tel que $v \notin \mathrm{Im}(f)$. On construit l'homotopie $H : X \times I \to \mathbb{S}^n$ définie par $H(x,t) = \frac{(1-t)f(x)+t(-v)}{||(1-t)f(x)+t(-v)||}$. Cette fonction est bien définie car une droite joignant deux points de la sphère $\mathbb{S}^n$ rencontre $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement si ces deux points sont opposés. Donc pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $x \in X$ on a $(1-t)f(x) + t(-v) \neq 0$.

Définition 1.1.3. Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues, $A \subset X$ et $f|_A = g|_A$. On dit que f est homotope à g relativement à A s'il existe une homotopie $F : X \times I \to Y$ telle que $F(a,t) = f(a) = g(a), \forall a \in A$. On note $f \simeq_A g$.

Proposition 1.1.4. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $A \subset X$ et $\psi : A \to Y$ une application continue. On note $\mathcal{C}(X,Y)_\psi$ l'ensemble des applications $f : X \to Y$ continues telles que $f|_A = \psi$. L'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X,Y)_\psi$. On note $[X,Y]_\psi$ le quotient de $\mathcal{C}(X,Y)_\psi$ par cette relation d'équivalence.*

Démonstration. La relation est
– Réflexive: il suffit de prendre $H : X \times I \to Y$ définie par $H(x,t) = f(x)$.
– Symétrique. Si H est une homotopie de f à g alors $H' : X \times I \to Y$ définie par $H'(x,t) = H(x, 1-t)$ est une homotopie de g à f.
– Transitive. Fixons H une homotopie de f à g et K une homotopie de g à h. L'application continue

$$L(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ K(x,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \ . \end{cases}$$

est une homotopie de f à h. □

Remarque 1.1.5. Remarquons que si $A = \emptyset$ on notera $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des applications continues $f : X \to Y$ et $[X,Y]$ le quotient de $\mathcal{C}(X,Y)$ par la relations d'équivalence $\simeq$.

Exemple: $[*, X]$ est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes par arcs de X.

1.2 Type d'homotopie

Définition 1.2.1. Deux espace topologiques X et Y ont **même type d'homotopie** ou sont **homotopiquement équivalents** s'il existe $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ continues telles que $fg \simeq \mathrm{id}_Y$ et $gf \simeq \mathrm{id}_X$. On dit que f et g sont des **équivalences d'homotopie**.

Remarque 1.2.2. Deux espaces homéomorphes sont homotopiquement équivalents.

Proposition 1.2.3. *L'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence.*

Démonstration. La réflexivité et la symétrie sont immédiates. Il reste à démontrer la transitivité qui est une conséquence du lemme qui suit. □

Lemme 1.2.4. *Soient $f, g : X \to Y$, $h : Y \to Z$ et $k : T \to X$ toutes continues. Si $f \simeq g$ alors $hf \simeq hg$ et $fk \simeq gk$.*

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 1.2.5. *La donnée des ensembles $\mathcal{C}(X,Y)$ pour X et Y des espaces topologiques, fournit une catégorie appelée la* **catégorie homotopique** *des espaces topologiques.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la compostiion est bien définie: Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues. On défini $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ où $[f]$ désigne la classe de f modulo la relation d'homotopie. Le lemme 1.2.4 permet de conclure que c'est bien défini et associatif et que l'identité de X dans X est donnée par $[\mathrm{id}_X]$. □

Exemple: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$.

Définition 1.2.6. X est **contractile** si $X \simeq *$.

Remarque 1.2.7. X est contractile si et seulement si il existe $x_0 \in X$ tel que $\mathrm{id}_X \simeq c_{x_0}$.

Définition 1.2.8. Soit A un sous espace topologique de X, on note $\iota : A \to X$ l'injection canonique. A est un **rétracte de** X s'il existe $r : X \to A$ tel que $r\iota = 1_A$. r s'appelle une rétraction.

A est un **rétracte par déformation** si de plus $\iota r \simeq 1_X$. r s'appelle rétraction par déformation.

A est un **rétracte par déformation forte** si de plus $\iota r \simeq_A 1_X$. r s'appelle rétraction par déformation forte.

Remarque 1.2.9. Par définition, si A est un rétracte par déformation alors ι est une équivalence d'homotopie, car $\iota r \simeq 1_X$ et $r\iota = 1_A$.

Proposition 1.2.10. *$f : S^n \to X$ se prolonge en une application continue $g : B^{n+1} \to X$ si et seulement si f est homotope à une application constante.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $g : B^{n+1} \to X$ qui prolonge f. Soit $H : B^{n+1} \times I \to X$ l'application définie par $H(x,t) = g(tx)$. H est continue et est une homotopie entre g et l'application constante $c_{g(0)}$. Donc en se restreignant à S^n on obtient $f \simeq c_{g(0)}$. Réciproquement, supposons que $f \simeq c_{x_0}$ pour un certain $x_0 \in X$. Soit $H : S^n \times I \to X$ l'homotopie entre f et c_{x_0}. Considérons l'application $g : B^{n+1} \to X$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} H(\frac{x}{||x||}, 2 - 2||x||), & ||x|| \geq \frac{1}{2} \\ x_0, & ||x|| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Clairement g est continue et $g|_{S^n} = f$. □

1.3 Homotopie et adjonction cellulaire

Une **paire d'espaces topologiques** (Y, X) est la donnée d'un espace topologique Y et d'un sous-espace $X \subset Y$. On peut définir une catégorie de paires d'espaces topologiques, où un morphisme de paires $(Y, X) \to (Y', X')$ est une application continue $f : Y \to Y'$ vérifiant $f(X) \subset X'$.

Définition 1.3.1 (Propriété d'extension des homotopies)**.** On dit que la paire (Y, X) admet la **propriété d'extension des homotopies** si pour tout $g : Y \to Z$ et pour tout $G : X \times I \to Z$ tel que $G(x, 0) = g(x), \forall x \in X$, il existe $H : Y \times I \to Z$ tel que $H(y, 0) = g(y), \forall y \in Y$ et $H(x,t) = G(x,t), \forall x \in X, t \in [0,1]$.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & X \times I \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "G"] & \\
Y \times \{0\} \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Y \times I \arrow[dr, dotted, "H"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.3.2. *La paire (Y, X) admet la propriété d'extension des homotopies si et seulement si $\iota : Y \cup_X X \times I \to Y \times I$ admet une rétraction.*

Démonstration. Supposons que ι admet une rétraction $r : Y \times I \to Y \cup_X X \times I$. Par propriété universelle de $Y \cup_X X \times I$ il existe un unique $K : Y \cup_X X \times I \to Z$ continu tel que $K(y) = g(y)$ et $K(x,t) = G(x,t)$. On pose alors $H = K \circ r$ et on montre que H vérifie les propriétés voulues.

Supposons que (Y, X) vérifie la propriété d'extension des homotopies et posons $Z = Y \cup_X X \times I$ avec $g : Y \to Z$ et $G : X \times I \to Z$ les morphismes canoniques. On a alors l'existence de $H : Y \times I \to Z$ qui vérifie $H(y, 0) = g(y)$ et $H(x, t) = G(x, t)$. Par ailleurs $H \circ \iota : Z \to Z$ coincide avec les morphismes canoniques sur Y et $X \times I$ donc par propriété universelle de Z il n'y a que l'identité qui satisfait cette propriété. Ainsi $H \circ \iota = \mathrm{id}_Z$ et H est une rétraction de ι. □

Corollaire 1.3.3. *La paire $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ vérifie la propriété d'extension des homotopies.*

Démonstration. On construit une rétraction r de l'injection canonique $\mathbb{D}^n \cup_{\mathbb{S}^{n-1}} (\mathbb{S}^{n-1} \times I) \to \mathbb{D}^n \times I$ en considérant la projection radiale issue de $A = (0, \ldots, 0, 2)$. □

Lemme 1.3.4. *La propriété d'extension des homotopies est stable par pushout.*

Démonstration. On se donne un diagramme pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[\phi]{} & B \end{array}$$

où (Y, X) a la propriété d'extension des homotopies. On fixe également $g : B \to Z$ et $G : A \times I \to Z$ tels que $G(a, 0) = g(a), \forall a \in A$. On rappelle que $B = Y \cup_f A$ et que (B, A) est une paire d'espaces topologiques. Comme $B \times I$ est homéomorphe à $(Y \times I) \cup_{f \times I} (A \times I)$, pour constuire $H : B \times I \to Z$ continue, il suffit de construire $H_A : A \times I \to Z$ et $H_Y : Y \times I \to Z$ continues, vérifiant: $\forall x \in X, H_Y(x, t) = H_A(f(x), t)$. On pose $H_A = G$. Par propriété d'extension des homotopies de la paire (Y, X), il existe $H_Y : Y \times I \to Z$ tel que $H_Y(x, t) = G(f(x), t)$ et $H_Y(y, 0) = g(\phi(y))$, car $G(f(x), 0) = g(f(x)) = g(\phi(x))$, pour tout $x \in X$. Donc $H : B \times I \to Z$ existe. Vérifions qu'il a les bonnes propriétés. Si $a \in A$, alors $H(a, t) = H_A(a, t) = G(a, t)$. Soit $b \in B$ et calculons $H(b, 0)$. Si $b = \phi(y)$ avec $y \in Y$, on a $H(b, 0) = H_Y(y, 0) = g(\phi(y)) = g(b)$; si $b \in A$, on a $H(b, 0) = H_A(b, 0) = G(b, 0) = g(b)$. Donc H étend l'homotopie G et coincide en 0 avec g. □

Corollaire 1.3.5. *Si $Y = X \cup_\varphi e^n$ alors la paire (Y, X) admet la propriété d'extension des homotopies. Plus généralement si Y est obtenu à partir de X par un attachement de cellules de même dimension alors (Y, X) a la propriété d'extension des homotopies.*

Démonstration. Démonstration mentionnée en cours. □

Proposition 1.3.6. *Si (Y, X) admet la propriété d'extension des homotopies et si X est contractile alors $q : Y \to Y/X$ est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. Notons $\iota : X \to Y$ l'inclusion canonique: $\iota(x) = x$. Comme X est contractile, il existe $x_0 \in X$ et une homotopie $H : X \times I \to X$ de id_X à c_{x_0}. Ainsi $\iota \circ H$ est une homotopie de ι à c_{x_0}. Par la propriété d'extension des homotopies, il existe une homotopie $K : Y \times I \to Y$, de source id_Y, coincidant avec H sur X. Pour tout $x \in X$ on a $K(x, 1) = x_0$. L'application g définie par $g(y) = K(y, 1)$, $\forall y \in Y$, est continue et induit une application continue $\bar{g} : Y/X \to Y$. Remarquons qu'en notant $q : Y \to Y/X$ la projection canonique on a $\bar{g}q(y) = K(y, 1)$ donc $\bar{g}q \simeq id_Y$. Par ailleurs $\forall (x, t) \in X \times I, (q \circ K)(x, t) = q \circ H(x, t) = [x_0] \in Y/X$. Donc l'application $q \circ K : Y \times I \to Y/X$ passe au quotient par la relation engendrée par $(x, t)\mathcal{R}(x', t), \forall x, x' \in X$. Par l'exercice 5 de la feuille de TD2 on a $Y \times I/\mathcal{R} \approx (Y/X) \times I$. Donc $q \circ K$ induit une applicaion continue $\bar{K} : (Y/X) \times I \to Y/X$ qui est une homotopie de $id_{Y/X}$ à $q\bar{g}$. Conclusion: q est une équivalence d'homotopie. □

Proposition 1.3.7. *Si (Y, X) et (Z, Y) admettent la propriété d'extension des homotopies, il en est de même pour la paire (Z, X).*

Démonstration. Soit T un espace topologique. Fixons $g : Z \to T$ et $G : X \times I \to T$ continues telles que $G(x, 0) = g(x), \forall x \in X$.
La paire (Y, X) admet la propriété d'extension des homotopies, donc il existe $H_Y : Y \times I \to T$ telle que $H_Y(x, t) = G(x, t), \forall x \in X$ et $H_Y(y, 0) = g|_Y(y) = g(y)$.
De même en considérant la paire (Z, Y), il existe $H_Z : Z \times I \to T$ telle que $H_Z(y, t) = H_Y(y, t), \forall y \in Y$, et $H_Z(z, 0) = g(z)$. L'homotopie H_Z étend bien l'homotopie G en une homotopie sur Z qui coincide avec g au temps $t = 0$. □

Corollaire 1.3.8. *Si Y est obtenu à partir de X par un nombre fini d'adjonctions cellulaires et si X est contractile alors $q : Y \to Y/X$ est une équivalence d'homotopie.*

Théorème 1.3.9. *Si $f, g : S^{n-1} \to X$ sont homotopes alors $X \cup_f e^n \simeq X \cup_g e^n$.*

Démonstration. La preuve a été vue en cours. On pourra également consulter le livre de Félix-Tanré, *Topologie algébrique* (cours et exercices corrigés, master-Capes/agreg, chez Dunod), section 2.2, Proposition 2.10. □

2 Groupe fondamental

2.1 Chemins, lacets et groupe fondamental

Définition 2.1.1. Soit X un espace topologique, et x_0, x_1 des points de X. Un **chemin de x_0 à x_1** est une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Les points x_0 et x_1 s'appellent les extrémités du chemin. **Un lacet de X basé en** x_0 est un chemin de x_0 à x_0.

On dit que deux chemins γ, γ' ayant même extrémités sont homotopes s'ils sont homotopes relativement à $\{0, 1\}$. Deux lacets basés en x_0 sont homotopes s'ils sont homotopes en tant que chemins.

La classe d'un chemin $\gamma : [0, 1] \to X$ modulo $\simeq_{\{0,1\}}$ est notée $[\gamma]$.

Remarque 2.1.2. Attention, si deux chemins sont homotopes alors ce sont deux applications homotopes, mais la réciproque n'est pas vraie, car comme $[0, 1]$ est contractile on peut montrer que tout application $f : [0, 1] \to X$ est homotope à une application constante! Donc l'homotopie à extrémités fixées est importante ici.

Définition 2.1.3. Soient α, β des chemins

1. $\bar{\alpha}$ est le chemin défini par $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$; (inverse d'un chemin)
2. Si $\alpha(1) = \beta(0)$ on note $\alpha * \beta$ le chemin défini par $(\alpha * \beta)(t) = \alpha(2t)$ si $t \leq \frac{1}{2}$ et $\beta(2t - 1)$ sinon.
3. On note c_x le chemin constant égal à x.

Proposition 2.1.4. *Soient $x, y \in X$. On note*

$$F_{x,y} := \{\gamma : [0, 1] \to X | \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}/ \simeq_{\{0,1\}}$$

1. *$F_{x,y} \to F_{y,x}, [\alpha] \mapsto [\bar{\alpha}]$ est bien définie, on note $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$.*
2. *$m : F_{x,y} \times F_{y,z} \to F_{x,z}, ([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha * \beta]$ est bien définie. On note ce produit $[\alpha][\beta]$.*

3. m est associative.

4. Pour tout $\alpha \in F_{x,y}$, on a: $[\alpha][c_y] = [\alpha] = [c_x][\alpha]$, $[\alpha][\bar{\alpha}] = [c_x]$, $[\bar{\alpha}][\alpha] = [c_y]$.

Démonstration. démonstration faite en cours. □

Remarque 2.1.5. Bien que l'opération $*$ ne soit pas associative, on a cependant montré la chose suivante: pour tous α, β, γ chemins tels que $\alpha(1) = \beta(0)$ et $\beta(1) = \gamma(0)$, le chemin $(\alpha * \beta) * \gamma$ est homotope, à extrémités fixées, au chemin $\alpha * (\beta * \gamma)$ et on note sa classe $[\alpha][\beta][\gamma]$. Afin de faciliter les calculs on notera $\alpha * \beta * \gamma$ un représentant de cette classe. En particulier on a $[\alpha][\beta][\gamma] = [\alpha * \beta * \gamma]$.

Corollaire 2.1.6. *$\pi_1(X, x_0) = F_{x_0,x_0}$ est un groupe appelé le groupe fondamental de X basé en x_0.*

Remarque 2.1.7. On peut aussi construire à partir des données précédentes une catégorie notée $\Pi_1(X)$ dont les objets sont les points de X et les morphismes de x à y sont les éléments de $F_{x,y}$. La composition est donnée par la concaténation des chemins et l'identité de $F_{x,x}$ est donnée par la classe du chemin constant. Cette catégorie est un groupoïde (tous les morphismes sont des isomorphismes). On l'appelle le **groupoïde fondamental de** X.

2.2 Propriétés du groupe fondamental

Comme on l'a vu, plus qu'un groupe, on a défini une famille de groupes $\pi_1(X, x)$ pour tout $x \in X$. La proposition suivante exprime la relation entre ces groupes. Plus précisément s'il existe un chemin de x à y alors les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes. C'est ce que l'on appelle le changement de point base.

Proposition 2.2.1. *Soit γ un chemin de de x à y dans X. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\gamma : & \pi_1(X, x) & \to & \pi_1(X, y) \\ & [\alpha] & \mapsto & [\bar{\gamma}][\alpha][\gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes. De plus cet isomorphisme est indépendant du choix de la classe du chemin γ. Plus précisément si $[\gamma] = [\gamma'] \in F_{x,y}$ alors $\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma'}$.

Démonstration. La proposition 2.1.4 implique que l'application Φ_γ est bien définie: si $[\alpha] = [\alpha'] \in F_{x,x}$ alors $(\bar{\gamma} * \alpha) * \gamma$ est homotope relativement aux extrimités à $(\bar{\gamma} * \alpha') * \gamma$.
$\Phi_\gamma([\alpha][\beta]) = \Phi_\gamma([\alpha * \beta]) = [\bar{\gamma} * \alpha * \beta * \gamma]$. Or $[\gamma * \bar{\gamma}] = [c_x]$ donc $[\bar{\gamma} * \alpha * \beta * \gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma} * \beta * \gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma][\bar{\gamma} * \beta * \gamma] = \Phi_\gamma([\alpha])\Phi_\gamma([\beta])$.
Enfin, si $[\gamma] = [\gamma'] \in F_{x,y}$ alors $[\bar{\gamma}] = [\bar{\gamma'}] \in F_{y,x}$ et donc $\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma'}$. □

Ainsi si X est connexe par arcs, tous ses groupes sont isomorphes (mais l'isomorphisme n'est pas canonique!) On notera cependant $\pi_1(X)$ n'importe lequel de ces groupes isomorphes.

La proposition suivante permet de définir un foncteur $\pi_1 : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Gr}$, de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégories des groupes.

Proposition 2.2.2. *Soit $\varphi : X \to Y$ continue et $x_0 \in X$. Alors φ induit un morphisme de groupes $\varphi_* := \pi_1(\varphi) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$. De plus $\pi_1(id_X) = id_{\pi_1(X)}$ et $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.*

Corollaire 2.2.3. *$\pi_1((X \times Y), (x_0, y_0))$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\pi_1((X \times Y), (x_0, y_0))$ vérifie la bonne propriété universelle. □

Théorème 2.2.4. *Si $\varphi : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie alors φ_* est un isomorphisme de groupes. En particulier, si X est contractile, $\pi_1(X, x) = \{e\}$.*

Pour démontrer ce théorème on montre le lemme suivant:

Lemme 2.2.5. *Soient $\varphi, \psi : X \to Y$ deux applications homotopes. Alors, $\forall x \in X$, il existe un isomorphisme de groupes $\chi : \pi_1(Y, \psi(x)) \to \pi_1(Y, \varphi(x))$ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[rr, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & & \pi_1(Y,\varphi(x)) \\
& \pi_1(Y,\psi(x)) \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

Si φ et ψ sont homotopes rel $\{x\}$ alors $\varphi_* = \psi_*$.

Démonstration. On note I l'intervalle $[0, 1]$. Soit $H : X \times I \to Y$ une homotopie de ψ à φ. On note $\gamma : I \to Y$ qui à t associe $H(x, t)$ le chemin de $\psi(x)$ à $\varphi(x)$. On définit $\chi([\alpha]) := [\bar{\gamma}][\alpha][\gamma]$. Montrons que $\chi \circ \psi_* = \phi_*$. Soit β un lacet de X basé en x. Posons $G : I \times I \to Y, (s, t) \mapsto H(\beta(s), 1 - t)$, et $L : I \times I \to I \times I$ définie par

$$L(a,r) = \begin{cases} (0, 3a), & 0 \le a \le \frac{r}{3} \\ (\frac{3a-r}{3-2r}, r), & \frac{r}{3} \le a \le 1 - \frac{r}{3} \\ (1, 3-3a), & 1 - \frac{r}{3} \le a \le 1 \end{cases}$$

Enfin, montrons que $\tilde{G} = G \circ L$ est une homotopie entre $\varphi \circ \beta$ et $\bar{\gamma} * (\psi \circ \beta) * \gamma$ relativement à $\{0, 1\}$. On a

$$\tilde{G}(0,r) = G(0,0) = H(x,1) = \phi(x), \tilde{G}(1,r) = G(1,0) = H(x,1) = \phi(x)$$

donc l'homotopie est relative à $\{0, 1\}$; de plus $\tilde{G}(a, 0) = G(a, 0) = H(\beta(a), 1) = (\phi \circ \beta)(a)$ et

$$\tilde{G}(a,1) = \begin{cases} H(x, 1-3a) = \bar{\gamma}(3a) & 0 \le a \le \frac{1}{3} \\ (\varphi \circ \beta)(3a-1), & \frac{1}{3} \le a \le \frac{2}{3} \\ \gamma(3a-2), & \frac{2}{3} \le a \le 1 \end{cases}$$

d'où le résultat. Si φ et ψ sont homotopes rel $\{x\}$ alors γ est le chemin constant. □

Démonstration du théorème: $\varphi : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie donc il existe $\psi : Y \to X$ telle que $\psi \circ \varphi \simeq id_X$ et $\varphi \circ \psi \simeq id_Y$. Par le lemme précedent cela implique que $\psi_* \circ \varphi_*$ est un isomorphisme donc que ψ_* est surjective et φ_* est injective. En inversant les roles de φ et ψ on obtient que φ_* est un isomorphisme de groupes.

Proposition 2.2.6. *Si A est un retract de X et $a \in A$ alors $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ est injective.*

Démonstration. Il existe $r : X \to A$ tel que $ri = id_A$ donc $r_* \circ i_* = id_{\pi_1(A,a)}$. En particulier i_* est injective. □

Définition 2.2.7. X est **simplement connexe** s'il est connexe par arcs ($\pi_0(X) = \{*\}$) et si $\pi_1(X, x) = \{1\}$.

Exemple 2.2.8. On a vu que tout espace topologique contractile est simplement connexe. On va voir, grâce au petit théorème de Van Kampen que $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe pour $n \ge 2$.

2.3 Le groupe fondamental du cercle

2.3.1 Théorème fondamental

Théorème 2.3.1. *Le groupe $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On note $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2i\pi t}$. On verra plus tard que cette application est un revêtement. Pour tout $f : X \to \mathbb{S}^1$ continue, un **relèvement de** f (par rapport à exp) est une application continue $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ telle que $\exp \circ \hat{f} = f$.

La théorie des revêtements permet de démontrer le lemme suivant

Lemme 2.3.2. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{S}^1$ un chemin de $\mathbb{S}^1$ vérifiant $\gamma(0) = x_0 = e^{2i\pi t_0}$. Il existe un relèvement $\hat{\gamma}$ de γ. De plus $\hat{\gamma}$ est unique si l'on impose $\hat{\gamma}(0) = t_0$.*

Si γ est un lacet, alors nécessairement il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\hat{\gamma}(1) = t_0 + n$. Cet entier n s'appelle le degré du lacet γ, noté $\deg(\gamma)$. On peut montrer que cet entier n est indépendant du choix de t_0 (ou du relèvement $\hat{\gamma}$ de γ). C'est-à-dire: quelque soit $\hat{\gamma}$ un relèvement de γ on a $\hat{\gamma}(1) - \hat{\gamma}(0) = \deg(\gamma)$.

Le lemme suivant sera démontré dans le chapitre revêtements:

Lemme 2.3.3 (Relèvement des homotopies)**.** *Soient γ_1, γ_2 deux lacets de $\mathbb{S}^1$ basés en x_0 et homotopes à extrémités fixées via $H : I \times I \to \mathbb{S}^1$. Il existe un relèvement $\hat{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ de H qui est unique si l'on impose $\hat{H}(0,0) = t_0$.*

Corollaire 2.3.4. *Soient γ_1, γ_2 deux lacets de $\mathbb{S}^1$ basés en x_0. On a:*

$$\deg(\gamma_1) = \deg(\gamma_2) \iff [\gamma_1] = [\gamma_2] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0).$$

Démonstration. Soit $H : I \times I \to \mathbb{S}^1$ une homotopie de lacets (à extrémités fixés) de γ_1 à γ_2. Et $\hat{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ le relèvement de H vérifiant $\hat{H}(0,0) = t_0$.

Le chemin $t \mapsto \hat{H}(t,0)$ est un relèvement du chemin $t \mapsto H(t,0) = \gamma_1(t)$. Donc par définition du degré du lacet γ_1 on a $\hat{H}(1,0) = t_0 + \deg\gamma_1$.

Le chemin $s \mapsto \hat{H}(0,s)$ est un relèvement du chemin $s \mapsto H(0,s) = x_0$. Or le chemin constant t_0 relève le chemin constant x_0 et comme $\hat{H}(0,0) = t_0$ par unicité on en déduit que $\hat{H}(0,s) = t_0$ pour tout s. En particulier $\hat{H}(0,1) = t_0$.

Le chemin $t \mapsto \hat{H}(t,1)$ est un relèvement du chemin $t \mapsto H(t,1) = \gamma_2(t)$. Donc par définition du degré du lacet γ_2 on a $\hat{H}(1,1) = \hat{H}(0,1) + \deg\gamma_2 = t_0 + \deg\gamma_2$.

Le chemin $s \mapsto \hat{H}(1,s)$ est un relèvement du chemin $s \mapsto H(1,s) = x_0$. Or le chemin constant $t_0 + \deg\gamma_1$ relève le chemin constant x_0 et comme $\hat{H}(1,0) = t_0 + \deg\gamma_1$ par unicité on en déduit que $\hat{H}(1,s) = t_0 + \deg\gamma_1$ pour tout s. En particulier $\hat{H}(1,1) = t_0 + \deg\gamma_1$. Conclusion $\deg\gamma_1 = \deg\gamma_2$.

Réciproquement, considérons les relèvements $\hat{\gamma}_1$ de γ_1 et $\hat{\gamma}_2$ de γ_2 tels que $\hat{\gamma}_1(0) = \hat{\gamma}_2(0) = t_0$ où $\exp(t_0) = x_0$. Soit $\hat{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ l'homotopie de $\hat{\gamma}_1$ à $\hat{\gamma}_2$ définie par $\hat{H}(s,t) = (1-t)\hat{\gamma}_1(s) + t\hat{\gamma}_2(s)$. Comme pour tout t on a $\hat{H}(0,t) = t_0$ et $\hat{H}(1,t) = t_0 + \deg\gamma_1 = t_0 + \deg\gamma_2$, On vérifie aisément que $H = \exp \circ \hat{H}$ est une homotopie à extrémiés fixées entre γ_1 et γ_2. $\square$

On a donc que l'application $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \to \mathbb{Z}$ est bien définie et injective. Elle est surjective car le lacet $I \to \mathbb{S}^1$ qui à t associe $x_0 e^{2i\pi nt}$ est de degré n. En effet un relèvement de ce lacet est donné par l'application continue $I \to \mathbb{R}$ qui à t associe $t_0 + nt$.

Il faut montrer que c'est un morphisme de groupes. Soient γ_1 et γ_2 deux lacets basés en x_0, $\hat{\gamma}_1$ (resp. $\hat{\gamma}_2$) un relèvement de γ_1 (resp. γ_2) vérifiant $\hat{\gamma}_1(0) = \hat{\gamma}_2(0) = t_0$. Alors le chemin dans

$\mathbb{R}$ défini par

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} \hat{\gamma}_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \hat{\gamma}_1(1) - t_0 + \hat{\gamma}_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est un relèvement de $\gamma_1 * \gamma_2$ de degré $\hat{\gamma}_1(1) - t_0 + \hat{\gamma}_2(1) - \hat{\gamma}_1(0) = \deg(\gamma_1) + \deg(\gamma_2)$. □

2.3.2 Applications

Théorème 2.3.5 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme à coefficients complexes, de degré ≥ 1 admet une racine complexe.*

Démonstration. Démonstration vue en cours. On pourra aussi se référer au livre de Félix-Tanré cité plus haut. □

Les deux théorèmes suivants seront vus en TD (feuille TD 4)

Théorème 2.3.6 (Théorème de Brouwer)**.** *Toute application continue $D^2 \to D^2$ admet un point fixe.*

Théorème 2.3.7 (Théorème de Borsuk-Ulam)**.** *Pour toute application continue $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$, il existe $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

2.4 Groupe fondamental des sphères

Théorème 2.4.1. $\pi_1(S^n) = \{1\}, n \geq 2$.

La démonstration a été faite en cours en utilisant la proposition ci-dessous:

Proposition 2.4.2 (Petit théorème de Van Kampen)**.** *Soit X un espace topologique connexe par arcs et $X = U_1 \cup U_2$ avec U_1, U_2 des ouverts simplement connexes tel que $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs. Alors X est simplement connexe.*

Proposition 2.4.3. $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}, x_0) = \mathbb{Z}$ *si* $n = 2$ *et* 0 *si* $n > 2$. *Dans le cas $n = 1$ on a $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ a deux composantes connexes par arcs, chacune est contractile.*

Corollaire 2.4.4. $\mathbb{R}^2$ *n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ si $n \neq 2$. Plus généralement, un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ pour $n \neq 2$.*

3 Le théorème de Van Kampen

3.1 Coproduits et pushout dans la catégorie des groupes

3.1.1 Produit libre de groupes

Définition 3.1.1. Soient G_1 et G_2 deux groupes. L'élément neutre du groupe G_i est noté e_i. On considère l'ensemble $X = G_1 \setminus \{e_1\} \sqcup G_2 \setminus \{e_2\}$. Un **mot alterné** de longueur p est une séquence $(a_1, \ldots, a_p)$ avec $a_k \in X$ vérifiant les deux conditions suivantes: pour tout $1 \leq k \leq p-1$ on a $a_k \in G_1 \Rightarrow a_{k+1} \in G_2$ et $a_k \in G_2 \Rightarrow a_{k+1} \in G_1$. L'ensemble $G_1 * G_2$ est l'ensemble de tous les mots alternés. En particulier il contient le mot $\emptyset$ que l'on note e par la suite.

Proposition 3.1.2. *On définit une loi binaire sur $G_1 * G_2$, par récurrence sur le longueur des mots alternés de la manière suivante: soient $v = (a_1, \dots, a_p)$ et $w = (b_1, \dots b_q)$ deux mots alternés.*

$$e \cdot v = v \cdot e = v,$$

$$v \cdot w = \begin{cases} (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q) & \text{si } a_p \in G_1, b_1 \in G_2 \text{ ou } a_p \in G_2, b_1 \in G_1 \\ (a_1, \dots, a_{p-1}, a_p \cdot b_1, b_2, \dots, b_q) & \text{si } a_p \in G_1, b_1 \in G_1 \text{ et } a_p \cdot b_1 \neq e_1 \\ (a_1, \dots, a_{p-1}, a_p \cdot b_1, b_2, \dots, b_q) & \text{si } a_p \in G_2, b_1 \in G_2 \text{ et } a_p \cdot b_1 \neq e_2 \\ (a_1, \dots, a_{p-1}) \cdot (b_2, \dots, b_q) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $(G_1 * G_2, \cdot, e)$ est un groupe et l'inverse du mot alterné $v = (a_1, \dots, a_p)$ est le mot alterné $(a_p^{-1}, a_{p-1}^{-1}, \dots, a_1^{-1})$. Ce groupe est appelé **produit libre de** G_1 **et** G_2 *et c'est le coproduit de G_1 et G_2 dans la catégorie des groupes.*

Remarque 3.1.3.
1. Pour tous groupes G_1, G_2 et G_3 on a un isomorphisme entre $G_1 * (G_2 * G_3)$ et $(G_1 * G_2) * G_n$.
2. En identifiant $\mathbb{Z}$ au goupe multiplicatif $\{t^k, k \in \mathbb{Z}\}$ les éléments de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ sont représentés par des mots alternés en puissance de t_1 et t_2 (oú t_1 et t_2 sont deux variables). Par exemple $x = t_1^3 t_2^{-1} t_1^{-3}$ représente le mot alterné $(t_1^3, t_2^{-1}, t_1^{-3})$ et $y = t_1^3 t_2^5$ représente le mot alterné (t_1^3, t_2^5). On a

   $$x \cdot y = t_1^3 t_2^4 \text{ et } y \cdot x = t_1^3 t_2^5 t_1^3 t_2^{-1} t_1^{-3}$$

   Ce groupe n'est donc pas commutatif.

Proposition 3.1.4. *Le groupe $\mathbb{Z}^{*n}$ est le* **groupe libre engendré par** n **éléments**, *que l'on note $< t_1, \dots, t_n >$. Il vérifie la propriété universelle suivante: pour tout groupe G, pour tous $x_1, \dots, x_n$ éléments de G, il existe un unique morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{Z}^{*n} \to G$ tel que $\varphi(t_i) = x_i, \ \forall 1 \leq i \leq n$.*

3.1.2 Somme amalgamée

On rappelle que si G est un groupe et $A = \{a_i\}_{i \in I}$ est une famille d'éléments de G, le **sous-groupe distingué de** G **engendré par la famille** A est le plus petit sous groupe normal N_A de G qui contient les éléments a_i pour tout $i \in I$. Une description de N_A est donnée par

$$N_A = \{(g_1 a_{i_1}^{\pm 1} g_1^{-1}) \dots (g_r a_{i_r}^{\pm 1} g_r^{-1}), g_k \in G, i_k \in I, 1 \leq k \leq r, r \in \mathbb{N}\}.$$

Le groupe quotient G/N_A vérifie la propriété universelle suivante:

Pour tout groupe H et tout morphisme de groupes $\varphi : G \to H$ vérifiant $\varphi(a_i) = e_H, \ \forall i \in I$, il existe un unique morphisme de groupes $\bar{\varphi} : G/N_A \to H$ tel que $\bar{\varphi}\pi = \varphi$ oú $\pi : G \to G/N_A$ est la projection canonique. On notera $N_A := \langle a_i, i \in I \rangle$.

Remarque 3.1.5. On utiliisera la notation $g \equiv h$ $[A]$ pour dire que $\bar{g} = \bar{h}$ dans G/N_A. On remarque que pour tout $n \in N_A, g, h \in G$ on a $gnh \equiv gh$ $[A]$.

Théorème 3.1.6. *Considérons un diagramme de groupes de la forme*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & G_1 \\ G_2 & \end{tikzcd}$$

Posons $N(H)$ le sous groupe normal de $G_1 * G_2$ engendré par les éléments de la forme $\varphi_1(h) \cdot \varphi_2(h)^{-1}$. La somme amalgamée de G_1 et G_2 au dessus de H le long de φ_1 et φ_2 est isomorphe au groupe

$$G_1 * G_2/N(H)$$

Démonstration. Démonstration faite en cours. □

Remarque 3.1.7. Remarquons que si $\varphi_1(h) \neq e_1$ et $\varphi_2(h) \neq e_2$ alors $\varphi_1(h) \cdot \varphi_2(h)^{-1}$ est le mot alterné $(\varphi_1(h), \varphi_2(h)^{-1})$. Pour tout $h \in H$ on a $\varphi_1(h) \equiv \varphi_2(h)\ [N(H]$.

3.2 Le théorème de Seifert Van Kampen

Théorème 3.2.1. *Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement d'ouverts U et V avec $U \cap V, U$ et V connexes par arcs. Soit $x_0 \in U \cap V$. On a un isomorphisme de groupes*

$$\pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

Démonstration. Voir les notes manuscrites. □

3.3 Applications

Définition 3.3.1. Un espace pointé (X, x_0) est **correctement pointé** s'il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$, ouvert et $H : V \times I \to V$ une homotopie de l'identité à c_{x_0} rel $\{x_0\}$. Autrement dit $\{x_0\}$ est un rétracte par déformation forte de V.

Remarque 3.3.2. Tout espace cellulaire est correctement pointé.

Proposition 3.3.3. *Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques correctement pointés et connexes par arcs. On a $\pi_1(X \vee Y, x_0 = y_0)$ est isomorphe à $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$.*

Démonstration. On note V_{x_0} (respectivement V_{y_0}) un voisinage ouvert de x_0 (resp. y_0) qui se rétracte par déformation forte sur x_0 (resp/ y_0). On note $U_1 = V_{x_0} \vee Y$ et $U_2 = X \vee V_{y_0}$. U_1 et U_2 sont deux ouverts connexes par arcs qui recouvrent $X \vee Y$. On a $U_1 \simeq Y$ et $U_2 \simeq X$ (où $\simeq$ est le signe pour désigner deux espaces homotopiquement équivalents). De plus $U_1 \cap U_2 = V_{x_0} \vee V_{y_0}$ est connexe par arcs et contractile. On en déduit le résultat. □

Corollaire 3.3.4. $\pi_1(\mathbb{S}^1)^{\vee n}) = \mathbb{Z}^{*n}$.

Proposition 3.3.5. *Soit X un espace connexe par arcs et $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ une application continue. On note x_0 l'image du pole nord par f. Soit $Y = X \cup_f e^n$.*

1. *Si $n \geq 3$ l'injection canonique $X \to Y$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux basés en x_0.*
2. *Si $n = 2$, f définit un élément $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0)/ < [f] >$.*
3. *Si $n = 1$ et (X, x_0) est correctement pointé alors $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0) * \mathbb{Z}$.*

Démonstration. On note $\mathbb{D}^n_1 = \{x \in \mathbb{D}^n \mid ||x|| < \frac{1}{2}\}$ et $A^n = \{x \in \mathbb{D}^n \mid ||x|| > \frac{1}{4}\}$. On note $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ l'application d'attachement, $\phi : \mathbb{D}^n \to Y$ l'application caractéristique et $i : X \to Y$ l'inclusion. On pose $U = \phi(\mathbb{D}^n_1)$ et $V = i(X) \cup \phi(A^n)$. Ce sont deux ouverts de Y, qui le recouvrent et qui sont connexes par arcs. De plus U est contractile. On note $x_0 = f(p_0)$ où p_0 est un point de $\mathbb{S}^{n-1}$. On note $y_0 = i(x_0)$. En restreignant $i : X \to Y$ à V, on a $i : X \to V$ est un retract par déformation forte. Plus précisément pour $i(x) \in i(X)$ on

défnit $H(i(x),t) = i(x)$ et pour $y \in \phi(A^n)$, on définit $H(y,t) = f((1-t)y + t\frac{y}{||y||})$. On pose $r : V \to X$ définie par $r(i(x) = x$ et $r(y) = f(y/||y||)$. Ainsi $ri = id_X$ et ir est homotope à l'identity de V via l'homotopie H. En particulier, i induit un isomorphisme entre $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(V, y_0)$, d'isomorphisme inverse r^*. Par ailleurs $U \cap V$ est homéomorphe à l'ensemble $\{x \in \mathbb{D}^n \mid \frac{1}{4} < ||x|| < \frac{1}{2}\}$, qui est homotopiquement équivalent à $\mathbb{S}^{n-1}$.
On applique le théorème de Van Kampen à l'espace topologique $Y = U \cup V$. Enfin on note z_0 un point de $U \cap V$.

- Pour $n \geq 3$, on a $\pi_1(Y, z_0)$ est isomorphe à $\pi_1(V, z_0)$, car $U \cap V$ est simplement connexe. Cet isomorphisme est donné par l'application $j : V \to Y$. En particulier on peut toujours choisir un chemin α dans V qui rejoint z_0 à y_0, qui est aussi un chemin dans Y. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V, z_0) \arrow[r, "\Phi_\alpha"] \arrow[d, "j^*"'] & \pi_1(V, y_0) \arrow[d, "j^*"'] \\ \pi_1(Y, z_0) \arrow[r, "\Phi_\alpha"] & \pi_1(Y, y_0) \end{tikzcd}$$

  où Φ_α est l'application qui à $[u]$ associe $[\bar{\alpha} * u * \alpha]$. Donc j induit un isomorphisme $\pi_1(V, y_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Donc $i : X \to Y$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux basés en x_0 et y_0.

- Pour $n \geq 2$, l'application d'attachement $f : \mathbb{S}^1 \to X$, est un lacet de X basé en x_0. On note $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ la classe de ce lacet. Considérons maintenant le lacet $\gamma : [0,1] \to U \cap V$ qui à t associe $\frac{3}{8}e^{2i\pi t}$. On note $z_0 = \gamma(0)$. La classe de ce lacet engendre $\pi_1(U \cap V, z_0)$ (qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$). Par Van Kampen, on a $\pi_1(Y, z_0)$ est isomorphe à $\pi_1(V, z_0)/\langle[\gamma]\rangle$. Montrons que le morphisme $i_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ est donné par le quotient $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)/\langle[f]\rangle$. Pour ce faire, il suffit de constater que $r\gamma : [0,1] \to X$ associe à t, le lacet $f(e^{2i\pi t})$ basé en x_0. Ainsi l'isomorphisme de groupes $r^* : \pi_1(V, z_0) \to \pi_1(X, x_0)$ envoie le générateur $[\gamma]$ de $\pi_1(U \cap V)$ sur la classe du lacet $[f]$ de X basé en x_0. Le diagramme suivant dont les flèches horizontales sont des isomorphismes, induit que $\pi_1(Y, y_0) = \pi_1(X, x_0)/\langle[f]\rangle$.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V, z_0) \arrow[r, "r^*"] \arrow[d, "j^*"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "i^*"] \arrow[dr, "i^*"'] & \pi_1(V, y_0) \arrow[d, "j^*"] \\ \pi_1(Y, z_0) \arrow[rr, "\Phi_\alpha"'] & & \pi_1(Y, y_0) \end{tikzcd}$$

  ce qui implique le résultat voulu.

- Pour $n = 1$, Y est obtenu à partir de X en ajoutant une 1-cellule. L'application d'attachement $f : \mathbb{S}^0 \to X$ étant homotope à l'application constante à un point de X (car X est connexe par arcs) on en déduit que Y est homotopiquement équivalent à $X \vee \mathbb{S}^1$. Or X est correctement pointé d'où le résultat.

□

Définition 3.3.6. Un groupe G est dit **finiment engendré** s'il existe un morphisme surjectif $\varphi : \langle a_1, \ldots, a_n >= \mathbb{Z}^{*n} \to G$. Les éléments $\varphi(a_i)$ sont appelés générateurs de G. Si $Ker\varphi = \langle r_1, \ldots, r_m \rangle$ est le sous-groupe normal de $\mathbb{Z}^{*n}$ engendré par un nombre fini d'éléments, on dit que G est finiment présenté, ou de **présentation finie**. On note alors $G = \langle a_1, \ldots, a_n; r_1, \ldots, r_m \rangle$.

Corollaire 3.3.7. *Tout groupe finiment présenté est le groupe fondamental d'un espace topologique.*

Démonstration. Soit $G = \langle a_1, \ldots, a_n; r_1, \ldots, r_m \rangle$ On commence par construire $X = \vee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$ de groupe fondamental $\mathbb{Z}^{*n}$. Chaque mot r_i en l'alphabet $\{a_1^{\pm}, \ldots, a_n^{\pm}\}$ définit un lacet, noté également r_i, dans X par concaténation de lacets de type $a_i : \mathbb{S}^1 \to \vee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$ correspondant à l'inclusion sur la i-ième composante, où $\bar{a}_i$. Cela permet de construire Y comme pushout du diagramme

$$\begin{tikzcd} \sqcup_{i=1}^m \mathbb{S}^1 \arrow[r, "\sqcup r_i"] \arrow[d] & X \\ \sqcup_{i=1}^m \mathbb{D}^2 & \end{tikzcd}$$

Par le théorème précédent, le groupe fondamental de Y est G. □

3.4 Exemples, calculs de groupes fondamentaux d'espaces particuliers

Pour les espaces projectifs (réels et complexes) on se réfère à l'exercice 2 de la feuille de TD2.

Théorème 3.4.1. *1.* $\pi_1(\mathbb{R}P_1) = \mathbb{Z}$ *et* $\pi_1(\mathbb{R}P_n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *pour* $n \geq 2$.

2. $\mathbb{C}P_n$ *est simplement connexe pour* $n \geq 1$.

3. $\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, *où* $\mathbb{T}$ *désigne le tore.*