Revêtements et groupes d'homotopie supérieures

Contents

1 Revêtements

1.1 Premières définitions

Définition 1.1.1. Une application continue $p : E \to B$ est un **revêtement de** B si tout point $b \in B$ admet $U \in \mathcal{V}(b)$ ouvert tel que $p^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouverts $U_i, i \in I$ avec $p|_{U_i} : U_i \to U$ est un homéomorphisme. On dira que le revêtement est CALCA si E et B sont connexes par arcs et localement connexe par arcs.

Remarque 1.1.2. De manière équivalente, un revêtement $p : E \to B$ est la donnée pour tout $b \in B$ d'un ouvert $U \in \mathcal{V}(b)$, d'un espace discret F_b et d'un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(U) \to U \times F_b$ tel que $\pi_1 \circ \Phi = p|_{p^{-1}(U)}$ où $\pi_1 : U \times F \to U$ est la projection sur la première composante.

Remarque 1.1.3. Tout espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

Vocabulaire: p s'appele **la projection**, $p^{-1}(b)$ **la fibre au-dessus de** b, E **l'espace total**, B **la base**. L'ouvert U s'appelle **ouvert trivialisant**. Les ouverts U_i s'appellent **les feuillets au-dessus de** U.

Remarque 1.1.4. a) Si U est trivialisant alors tout ouvert $V \subset U$ est trivialisant.
b) Si $Y \subset p^{-1}(U)$ est connexe alors $\exists i, Y \subset U_i$.

Démonstration. Pour a), comme $p^{-1}(V) \subset p^{-1}(U) = \cup_i U_i$ on a $p^{-1}(V) = \cup_i p^{-1}(V) \cap U_i$ est bien une union disjointe d'ouverts chaque feuillet étant homéomorphe à V.

Pour b) on écrit $Y = \cup_{i \in I} Y \cap U_i$ et $Y \cap U_i$ est un ouvert de Y. Comme Y est connexe il existe $i \in I$ tel que $Y \cap U_i = Y$. $\square$

Exemple 1.1.5. Si F est discret alors $X \times F \to X$ est un revêtement.
$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ est un revêtement.

Lemme 1.1.6. *Si la base B du revêtement est connexe alors toutes les fibres sont homéomorphes et $p : E \to B$ est surjective.*

Démonstration. Soit $b_0 \in B$ et F_0 la fibre au-dessus de b_0. On note $\Omega_0 = \{b \in B \mid p^{-1}(b) \cong F_0\}$.
Ω_0 est ouvert: pour $b \in \Omega_0$, il existe $U \in \mathcal{V}(b)$ ouvert trivialisant tel que $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à $U \times F_0$. Tout $b' \in U$ a pour ouvert trivialisant U et donc $F_{b'} \cong F_0$. Donc $U \subset \Omega_0$.
Ω_0 est fermé: soit $b \notin \Omega_0$ et U un ouvert trivialisant de b. On a donc $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à $U \times F_b$ et $F_b \ncong F_0$. Il en sera de même pour n'importe quel $b' \notin U$. Donc $U \subset {}^c\Omega_0$. Comme B est connexe, Ω_0 est soit vide, soit B tout entier. Pour $e \in E$, en posant $b_0 = p(e)$ on a $\Omega_0 \neq \emptyset$ donc $\Omega_0 = B$. Ce qui prouve que toutes les fibres sont homéomorphes et que p est surjective. □

Définition 1.1.7. Soient $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to B$ deux revêtements. Un *morphisme de revêtements* de p_1 vers p_2 est une application continue $f : E_1 \to E_2$ telle que $p_2 f = p_1$. On note $\mathrm{Hom}(p_1, p_2)$ l'ensemble des morphismes de p_1 vers p_2.

Remarque 1.1.8. Soit B un espace topologique. La définition ci-dessus fournit une catégorie que l'on notera $\mathcal{R}(B)$ (la catégorie dont les objets sont les revêtements $p : E \to B$, et les morphismes sont explicités ci-dessus). Un isomorphisme dans $\mathrm{Hom}(p, p)$ est appelé **automorphisme** du revêtement p. On notera $\mathrm{Aut}(p)$ ou $A(p)$ le groupe des automorphismes de p.

1.2 Exemples fondamentaux de revêtements

Proposition 1.2.1. *Soit E un espace topologique, G un groupe agissant sur E par homéomorphisme. On suppose que l'action est totalement discutinue: pour tout $x \in E$, il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $g \in G$, $gU \cap U \neq \emptyset \Rightarrow g = e$. Alors $\pi : E \to E/G$ est un revêtement de fibre Gb au-dessus de $[b]$.*

Démonstration. Voir TD □

Exemple 1.2.2. $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translation. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.
$\mathbb{Z}^n$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par translations. $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est homéomorphe à $(\mathbb{S}^1)^n$ (le tore de dimension n).
$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{S}^1$ par action antipodale. $\mathbb{S}^1/G$ est homéormorphe à $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ (lui-même homéomorphe à $\mathbb{S}^1$). Le revêtement considéré est l'application $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ qui à z associe z^2. C'est un revêtement à deux feuillets. De même l'application continue $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ qui à z associe z^n est un revêtement à n feuilets.

1.3 Relèvements des applications

Soit $p : E \to B$ un revêtement de B.

On se pose la question de savoir si $f : Y \to B$ continue se **relève** en une application $\tilde{f} : Y \to E$, c'est-à dire telle que $p\tilde{f} = f$.

Lemme 1.3.1. *Soient f_0, f_1 deux relèvements de f. Si Y est connexe alors $W = \{y \in Y | f_0(y) = f_1(y)\}$ est soit vide soit Y. En particulier deux relèvements de f qui coincident en un point sont égaux.*

Démonstration. Montrons que W est un ouvert dans Y. Soit $y \in W$, U un ouvert trivialisant de $f(y)$, et U_i le feuillet de U contenant $f_0(y) = f_1(y)$. On a $y \in V = f_0^{-1}(U_i) \cap f_1^{-1}(U_i)$. V est ouvert dans Y et $V \subset W$: en effet pour $z \in V$ on a $pf_0(z) = pf_1(z) = f(z)$ et p réalise un homéomorphisme $U_i \to U$ donc est injective sur U_i, donc $f_0(z) = f_1(z)$. Donc V est un ouvert de W qui contient y.

Montrons que W est fermé dans Y ou de manière équivalente que $Y \setminus W$ est ouvert dans Y. Soit $y \in Y$ tel que $f_0(y) \neq f_1(y)$, et U un ouvert trivialisant de $f(y)$. Il existe i, j tel que $f_0(y) \in U_i$ et $f_1(y) \in U_j$. De plus $i \neq j$ car sinon cela contredirait le fait que p est un homéomorphisme de U_i sur U. Alors $f_0(U_i)^{-1} \cap f_1(U_j)^{-1}$ est un ouvert de $Y \setminus W$ contenant y.

Conclusion W est vide ou $W = Y$. Si deux relèvements de f coincident en un point alors $W \neq \emptyset$ et donc les deux relèvements sont égaux. □

1.3.1 Relèvements des chemins

Théorème 1.3.2. *On fixe $e_0 \in E, b_0 \in B, p(e_0) = b_0$. Tout chemin de B de source b_0 se relève de manière unique en un chemin de E de source e_0.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts de B par des ouverts trivialisants. Soit $\alpha : [0,1] \to B$ un chemin de source b_0. En utilisant le nombre de Lebesgue du recouvrement $(\alpha^{-1}(U_i))_{i\in I}$ de l'espace métrique compact $[0,1]$, il existe $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tel que pour tout k on a $\alpha([t_k, t_{k+1}]) \subset U_{j_k}$ pour un certain $j_k \in I$. On construit alors un relèvement $\tilde{\alpha}$ de α par récurrence sur k.

Initialisation, $k = 0$. On impose $\tilde{\alpha}(0) = e_0$. Soit V_0 le feuillet au-dessus de U_{j_0} contenant e_0. Comme $p : V_0 \to U_{j_0}$ est un homéomorphisme, on définit $\tilde{\alpha} : [t_0, t_1] \to V_0 \subset E$ comme la composée $p^{-1} \circ \alpha$. Elle est bien définie car $\alpha([t_0, t_1]) \subset U_{j_0}$.

Hérédité. On suppose construit $\tilde{\alpha} : [0, t_k] \to E$ continue telle que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. On a alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \{t_k\} \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d] & V_k \arrow[d, "p"] \\ {[t_k, t_{k+1}]} \arrow[r, "\alpha"'] & U_{j_k} \end{tikzcd}$$

où V_k est le feuillet au dessus de U_{j_k} contenant $\tilde{\alpha}(t_k)$, homéomorphe à U_{j_k} via p. On définit ainsi $\tilde{\alpha} : [t_k, t_{k+1}] \to V_k \subset E$ comme la composée $p^{-1} \circ \alpha$. Elle coïncide avec $\tilde{\alpha} : [0, t_k] \to E$ précédemment définie sur $\{t_k\}$, donc cela fournit une application continue $\tilde{\alpha} : [0, t_{k+1}] \to E$ qui vérifie $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

L'hypothèse de récurrence permet de conclure que l'on construit bien un relèvement de α de source e_0. Par le Lemme 1.3.1 on en déduit que $\tilde{\alpha}$ est unique. □

1.3.2 Relèvements des homotopies

Théorème 1.3.3. *On fixe $\tilde{f} : Y \to E$ et $H : Y \times [0,1] \to B$ continues telles que $H(y, 0) = p\tilde{f}(y)$. On suppose Y localement connexe.*

Il existe un unique relèvement $\tilde{H} : Y \times [0,1] \to E$ de H tel que $\tilde{H}(y, 0) = \tilde{f}(y)$.

Démonstration. Pour $y \in Y$, on pose $f_y(t) = H(y,t)$. C'est un chemin dans B, donc il admet un unique relèvement $\tilde{f}_y$ vérifiant $\tilde{f}_y(0) = \tilde{f}(y)$. De plus $p \circ \tilde{f}_y(t) = H(y,t)$. On aimerait poser $\tilde{H}(y,t) = \tilde{f}_y(t)$, mais il faut montrer que cette fonction est continue sur $Y \times [0,1]$. Fixons $(y,t) \in Y \times [0,1]$, et $U_{y,t}$ un ouvert trivialisant de $H(y,t)$. Comme H est continue, il existe $V_{y,t}$ voisinage de y et $W_{y,t}$ voisinage de t tel que $H(V_{y,t} \times W_{y,t}) \subset U_{y,t}$. Pour t parcourant $[0,1]$, les $W_{y,t}$ recouvrent $[0,1]$ donc on peut trouver $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ tel que $[t_i, t_{i+1}] \subset W_{y,t'_i}$ pour un certain t'_i. On choisit $V_y \subset \cap_{i=0}^{N-1} V_{y,t'_i}$ un voisinage ouvert connexe de y (Y est localement connexe). Pour tout i on a $H(V_y \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_{y,t'_i}$. Comme précédemment, on peut construire par récurrence sur i un relèvement $\hat{H} : V_y \times [0,1] \to E$ de H vérifiant pour tout $z \in V_y$, $\hat{H}(z,0) = \tilde{f}(z)$. Le chemin $\hat{H}(z,t)$ est un relèvement du chemin $H(z,t)$ dont la source coincide avec celle du chemin $\tilde{f}_z(t)$. Donc $\tilde{f}_z(t)$ coincide avec $\hat{H}$ sur $V_y \times [0,1]$, qui est continue sur $V_y \times [0,1]$. Conclusion: l'application $\tilde{H}(y,t) = \tilde{f}_y(t)$ est continue sur $Y \times [0,1]$ et vérifie les conditions du théorème. □

Corollaire 1.3.4. *Soient g_0, g_1 deux chemins de même source dans E tel que pg_0 et pg_1 sont homotopes à extrémités fixées; alors g_0 et g_1 sont homotopes à extrémités fixées dans E.*

En particuler l'application $p_* : \pi_1(E,x) \to \pi_1(B,p(x))$ est injective.

Démonstration. Soit $H : [0,1] \times [0,1] \to B$ une homotopie à extrémités fixées entre pg_0 et pg_1. On applique le théorème précédent en choisissant $\tilde{f} = g_0 \colon [0,1] \to E$. Cela fournit $\tilde{H} \colon [0,1] \times [0,1] \to E$ tel que $p \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}(t,0) = g_0(t)$. Le chemin $\tilde{H}(0,s)$ relève le chemin constant $c_{pg_0(0)}$ et vérifie $\tilde{H}(0,0) = g_0(0)$ donc c'est le chemine constant de valeur $g_0(0)$. On a alors $\tilde{H}(t,1)$ relève le chemin pg_1 et $\tilde{H}(0,1) = g_0(0) = g_1(0)$. Par unicité on a $\tilde{H}(t,1) = g_1(t)$. Enfin le chemin $\tilde{H}(1,s)$ relève le chemin constant de valeur $pg_0(1)$ et vérifie $\tilde{H}(1,0) = g_0(1)$ don c'est le chemin constant de valeur $g_0(1)$. Conclusion $g_1(1) = \tilde{H}(1,1) = g_0(1)$ et $\tilde{H}$ est une homotopie à extrémités fixées entre le chemin g_0 et le chemin g_1. Soient γ, γ' deux lacets de E basés en x, tel que $[p\gamma] = [p\gamma']$. On en déduit immédiatement $[\gamma] = [\gamma']$. □

Remarque 1.3.5. On rappelle que le groupoïde fondamental $\Pi(X)$ d'un espace topologique X est un catégorie dont les objets sont les points de X et dont l'ensemble des morphismes de x à y est donné par $\Pi(X)(x,y) = \{f : [0,1] \to X \mid f(0) = x, f(1) = y\}/\simeq_{\{0,1\}}$. Le théorème précédent montre que si $p : E \to B$ est un revêtement, le foncteur $p_* : \Pi(E) \to \Pi(B)$ vérifie que pour tous $x, y \in E$ l'application sur les morphismes $\Pi(E)(x,y) \to \Pi(B)(p(x),p(y))$ est injective.

1.3.3 Relèvements des applications

Théorème 1.3.6. *Soit $p : E \to B$ un revêtement tel que $p(e_0) = b_0$. Soit $f : Y \to B$ continue telle que $f(y_0) = b_0$. Si Y est CALCA, alors f admet un relèvement $\tilde{f}$ (unique avec $\tilde{f}(y_0) = e_0$) ssi $f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subset p_*(\pi_1(E,e_0))$.*

Démonstration. Démonstration faite en cours, ou voir les notes de l'année dernière. □

Exemple 1.3.7. Soit Y un espace CALCA. $f : Y \to \mathbb{S}^1$ admet un relèvement $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$ si et seulement si $f_*(\pi_1(Y,y_0)) = 0$. Si $Y = \mathbb{S}^1$ on a f admet un relèvement si et seulement f est homotope à une application constante. Si $Y = \mathbb{S}^n$ toute application f admet un relèvement.

1.4 Monodromie des revêtements

On se fixe $p : E \to B$ un revêtement, $b \in B$, $x \in E, p(x) = b$ et γ un lacet de B basé en b. On note $\tilde{\gamma}_x$ l'unique chemin de source x qui relève γ.

Théorème 1.4.1. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(b) \times \pi_1(B,b) & \to & p^{-1}(b) \\ (x,[\gamma]) & \mapsto & \tilde{\gamma}_x(1) \end{array}$$

est bien définie, est une action de groupe (à droite) et est appelée **monodromie du revêtement sur la fibre $p^{-1}(b)$**.

Théorème 1.4.2. *1. $Stab(x) = p_*(\pi_1(E,x)) \subset \pi_1(B,b)$.*

2. *Si E est connexe par arcs*
   (a) *L'action de monodromie est transitive, en particulier $p^{-1}(b)$ est en bijection avec $\pi_1(B,b)/p_*(\pi_1(E,x))$.*
   (b) *Les groupes $p_*(\pi_1(E,x))$ pour $x \in p^{-1}(b)$ forment une classe de conjugaison dans $\pi_1(B,b)$.*

Corollaire 1.4.3. *Si $p : E \to B$ est un revêtement, si E est connexe par arcs et B simplement connexe alors p est un homéomorphisme.*

Démonstration. B étant connexe par arcs les fibres sont toutes de même cardinal et $p^{-1}(b)$ est en bijection avec $\{x\}$, donc toutes les fibres sont de cardinal 1. p est donc injective et surjective. De plus pour tout $x \in E$ en prenant U un ouvert trivialisant de $p(x)$ on trouve U_i voisinage de x tel que $p : U_i \to U$ est un homéomorphisme. On en déduit que p est ouverte. □

1.5 Revêtement universel

Définition 1.5.1. Un revêtement universel est un revêtement CALCA d'espace total simplement connexe.

Proposition 1.5.2. *Soit $p_u : \tilde{X} \to B$ un revêtement universel et $p : E \to B$ un revêtement. Soit $b_0 \in B$ et $x_0 \in E, \tilde{y}_0 \in \tilde{X}$ dans la fibre au dessus de b_0. Il existe un unique $f \in Hom(p_u, p)$ tel que $f(\tilde{y}_0) = x_0$. En particulier, un revêtement universel est unique à isomorphisme près.*

Définition 1.5.3. Un espace B est semi-localement simplement connexe si $\forall b \in B$ il existe $U \in \mathcal{V}(b)$ tel que $\pi_1(U,b) \to \pi_1(B,b)$ soit triviale.

Théorème 1.5.4. *Soit B un espace CALCA. B admet un revêtement universel ssi B est semi-localement simplement connexe.*

Démonstration. On a vu en cours que la condition semi-localement simplement connexe est nécessaire. On démontre ici qu'elle est suffisante.
On suppose que B est semi-localement simplement connexe et on fixe $b_0 \in B$. La démonstration de l'existence d'un revêtement universel se fait en plusieurs étapes.

Etape 1-Construction de l'ensemble E et de la projection $p\colon E \to B$. On définit l'ensemble

$$E = \{\gamma : [0,1] \to B \mid \gamma(0) = b_0\}/\simeq_{\{0,1\}},$$

et $p\colon E \to B$ l'application qui à $[\gamma]$ associe $\gamma(1)$, qui est bien définie.

Etape 2–Topologie sur E. On définit $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts U de B tels que U est connexe par arcs et tel qu'il existe $b \in U$ satisfaisant $\pi_1(U,b) \to \pi_1(B,b)$ est nulle (constante égale à l'élément neutre). Montrons que $\mathcal{U}$ est une base de la topologie de B. Soit $b \in B$ et V un voisinage de b. Comme B est semi-localement simplement connexe, il existe W un voisinage de b tel que $\pi_1(W,b) \to \pi_1(B,b)$ est nulle. Comme B est localement connexe par arcs, il existe $U \subset V \cap W$ ouvert connexe par arcs et voisinage de b. On a alors $\pi_1(U,b) \to \pi_1(B,b)$ est nulle. Donc $U \in \mathcal{U}$ et $U \subset V$.

Soit $x = [\gamma] \in E$ et $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de $p(x) = \gamma(1)$. On pose

$$U_x = \{[\gamma * \beta] \in E \mid \beta : [0,1] \to U \text{ et } \beta(0) = p(x)\}.$$

La topologie sur E est la topologie engendrée par l'ensemble $\mathcal{V}$ de tous les U_x.

Montrons quelques lemmes utiles pour la suite.

Lemme 1.5.5. *Soit $x = [\gamma] \in E$ et $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de $p(x)$. Si $V \in \mathcal{U}$ est un voisinage de $p(x)$ inclus dans U alors $V_x \subset U_x$.*

Démonstration. La démonstration est évidente. □

Lemme 1.5.6. *On a $U_x = U_y \iff x \in U_y \iff y \in U_x$*

Démonstration. On remarque que $x = [\gamma] \in U_x$ car U étant un voisinage de $p(x) = \gamma(1)$, on a $x = [\gamma * c_{p(x)}]$ avec $c_{p(x)}$ est un chemin à valeurs dans U. Ainsi $U_x = U_y \Rightarrow x \in U_y$. Si $y \in U_x$, alors $y = [\gamma * \beta]$ avec $\beta : [0,1] \to U$ vérifiant $\beta(0) = p(x)$ et $\beta(1) = p(y)$, donc $x = [\gamma * \beta * \bar{\beta}]$ et $\bar{\beta} : [0,1] \to U$, donc $x \in U_y$. On a donc montré la deuxième équivalence. Supposons $y \in U_x$, avec $y = [\gamma * \beta]$ et prenons $z \in U_x$, alors $z = [\gamma * \rho] = [\gamma * \beta * \bar{\beta} * \rho]$, et ρ et $\bar{\beta}$ sont à valeurs dans U, donc $z \in U_y$. Conclusion $y \in U_x \Rightarrow U_x \subset U_y$ et $y \in U_x \Rightarrow x \in U_y \Rightarrow U_y \subset U_x$. Le lemme est démontré. □

Lemme 1.5.7. *Soient U_x et V_y dans $\mathcal{V}$. Soit $z \in U_x \cap V_y$ alors il existe $W_z \in \mathcal{V}$ tel que $z \in W_z \subset U_x \cap V_y$. En particulier $\mathcal{V}$ est une base pour la topologie engendrée par $\mathcal{V}$.*

Démonstration. On pose $x = [\gamma]$, $y = [\rho]$ et $z = [\gamma * \alpha] = [\rho * \beta]$ où α est un chemin de $p(x)$ à $p(z)$ dans U et β un chemin de $p(y)$ à $p(z)$ dans V. On choisit W dans $\mathcal{U}$ un voisinage de $p(z)$ inclus dans $U \cap V$ (possible car $\mathcal{U}$ est un base pour la topologie de B). On a alors $W_z \subset U_z = U_x$ et $W_z \subset V_z = V_y$ par le lemme 1.5.6, donc $W_z \subset U_x \cap U_y$. Par définition de la topologie engendrée, tout ouvert O s'écrit comme union quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{V}$. Soit $x \in O$, il existe une famille finie U_{i,x_i} d'éléments de $\mathcal{V}$ tel que $x \in \cap_i U_{i,x_i}$. Donc il existe $W_x \in \mathcal{V}$ tel que $x \in W_x \subset O$. □

Etape 3. L'application p est continue. Soit $a \in B$ et $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de a. On a

$$p^{-1}(U) = \cup_{\gamma:\,[0,1]\to B, \gamma(0)=b_0, \gamma(1)=a}\; U_{[\gamma]}.$$

En effet, si $x = [\gamma * \beta] \in U_{[\gamma]}$ alors $p(x) \in U$. Réciproquement si $x = [\alpha] \in p^{-1}(U)$, alors $p(x) \in U$ et comme U est connexe par arcs, il existe $\beta : [0,1] \to U$ tel que $\beta(0) = a$ et $\beta(1) = p(x)$. Donc $x = [\alpha * \bar{\beta} * \beta] \in U_{[\alpha * \bar{\beta}]}$. Donc $p^{-1}(U)$ est un ouvert de E.

Etape 4. L'application p est un revêtement. Soit $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de a. Le lemme 1.5.6 et l'étape précédente permet de dire que $p^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouverts du type $U_{[\gamma]}$ où γ est un chemin dans B de b_0 à a. Il reste à montrer que $p : U_{[\gamma]} \to U$ est bijective et ouverte. Soit $c \in U$, connexe par arcs, donc il existe α un chemin de a vers c. On a donc $c = p([\gamma * \alpha])$, donc l'application est surjective. Supposons $c = p([\gamma * \alpha]) = p([\gamma * \beta])$ où α et β sont des chemins dans U de a à c. Le lacet $\alpha * \bar{\beta}$ basé en a dans U est homotope (à extrémités fixées) au lacet constant c_a, car $\pi_1(U, a) \to \pi_1(B, a)$ est nulle. Ainsi $[\alpha * \bar{\beta}] = [c_a]$ ce qui implique $[\alpha] = [\beta]$ et $[\gamma * \alpha] = [\gamma * \beta]$, donc p est injective. Montrons que p est ouverte. Soit $V_y \in \mathcal{V}$ avec $V_y \subset U_{[\gamma]}$. Pour tout $z \in V_y$ on a $p(z) \in V$ donc $p(V_y) = V$ et l'application est ouverte.

Etape 5. E est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $x = [\gamma] \in E$. On note $\gamma_s = [0,1] \to B$ le chemin défini par $\gamma_s(t) = \gamma(st)$. On a $\gamma = \gamma_1$ et $\gamma_0 = c_{b_0}$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \rho : \quad & [0,1] \longrightarrow E \\ & s \longmapsto [\gamma_s] = [t \mapsto \gamma(st)]. \end{aligned}$$

Si l'on montre que ρ est continue, alors ρ est une homotopie entre $[c_{b_0}]$ et $[\gamma]$ ce qui démontre que E est connexe par arcs. Remarquons que pour $s \in [0,1]$, $p(\rho(s)) = \gamma(s)$ donc $p \circ \rho = \gamma$. Fixons $s_0 \in [0,1]$, $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de $\gamma(s_0)$. On a

$$p^{-1}(U) = \sqcup_{\alpha:[0,1]\to B}\, U_{[\alpha]}$$

avec $\alpha(0) = b_0$ et $\alpha(1) = \gamma(s_0)$. On a $\rho(s_0) = [\gamma_{s_0}] \in U_{[\gamma_{s_0}]}$. Comme γ est continue (en s_0), il existe $\epsilon > 0$ et $V =]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[\cap[0,1]$ tel que $\gamma(V) \subset U$ et $\gamma(V) \in \mathcal{U}$. Par ailleurs $p : U_{[\gamma_{s_0}]} \to U$ est un homéomorphisme. On pose $\tilde{\gamma} : V \to U_{[\gamma_{s_0}]} \subset E$ l'application définie par $\tilde{\gamma} = p^{-1} \circ \gamma$. Fixons $s \in V$. Le chemin $\alpha \colon t \mapsto \gamma((1-t)s_0 + ts)$ est à valeurs dans $\gamma(V) \subset U$ et on a $[\gamma_{s_0} * \alpha] = [\gamma_s]$. Donc pour tout $s \in V$ on a $\rho(s) \in U_{[\gamma_{s_0}]}$. De plus $(p \circ \rho)(s) = \gamma(s) = (p \circ \tilde{\gamma})(s)$. Comme p est injective sur $U_{[\gamma_{s_0}]}$, on en déduit que $\rho(s) = \tilde{\gamma}(s)$ continue sur V. Donc ρ est continue.
E est localement connexe par arcs, car tout $x = [\gamma]$ in E admet un voisinnage U_x homéomorphe à U connexe par arcs.

Etape 6. E est simplement connexe. Considérons $\alpha : [0,1] \to E$ un lacet basé en $[c_{b_0}]$. Alors $p \circ \alpha$ est un lacet basé en b_0. Notons $\tilde{\alpha} \colon [0,1] \to E$ l'application (continue d'après l'étape précédente) qui à s associe $[t \mapsto (p \circ \alpha)(st)]$. On a $p \circ \tilde{\alpha} = p \circ \alpha$ et $\tilde{\alpha}(0) = [c_{b_0}] = \alpha(0)$. Donc $\tilde{\alpha} = \alpha$, par unicité des relèvements des chemins. En particulier $\tilde{\alpha}(1) = [c_{b_0}] = [t \mapsto p(\alpha(t))]$. Comme $E \to B$ est un revêtement, le morphisme de groupes $p_* \colon \pi_1(E, [c_{b_0}]) \to \pi_1(B, b_0)$ est injectif, et on vient de montrer que $p_*([\alpha]) = [c_{b_0}]$ donc α est homotope au lacet constant (dans E), donc $\pi_1(E, [c_{b_0}])$ est réduit à l'élément neutre. $\square$

1.6 Automorphismes de revêtements

Remarque essentielle: $f \in \mathrm{Hom}(p_1, p_2)$ est un relèvement de p_1 au-dessus de p_2, car on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ E_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p_1"'] & B \end{tikzcd}$$

Ainsi si E_1 est connexe et si $f, g \in \mathrm{Hom}(p_1, p_2)$ sont tels que $f(x) = g(x)$ pour un certain $x \in E_1$ alors $f = g$.

Lemme 1.6.1. *La donnée de $f \in \mathrm{Hom}(p_1, p_2)$ et de $b \in B$, induit une application*

$$\begin{array}{rccc} f_b : & p_1^{-1}(b) & \to & p_2^{-1}(b) \\ & \tilde{x}_1 & \mapsto & f(\tilde{x}_1) \end{array}$$

invariante sous l'action de $\pi_1(B, b)$.

Démonstration. Soit γ un lacet de B basé en b. On choisit un relèvement $\tilde{\gamma}_2$ de γ pour p_2 de source $f(\tilde{x}_1)$ et $\tilde{\gamma}_1$ un relèvement de γ pour p_1 de source $\tilde{x}_1$. On a alors $f \circ \tilde{\gamma}_1$ est un relèvement pour p_2 de γ de même source que $\tilde{\gamma}_2$ donc ils sont homotopes à extrémités fixées. En particulier $f(\tilde{\gamma}_1(1)) = \tilde{\gamma}_2(1)$ ce qui se traduit par

$$f(\tilde{x}_1 \cdot [\gamma]) = f(\tilde{x}_1) \cdot [\gamma].$$

$\square$

On note $\mathrm{Hom}_{\pi_1(B,b)}(p_1^{-1}(b), p_2^{-1}(b))$ l'ensemble des morphismes invariants sous l'action par monodromie.

Théorème 1.6.2. *Soient p_1, p_2 des revêtements CALCA de base B et $b \in B$. L'application*

$$\begin{array}{cccc} r_b : & Hom(p_1, p_2) & \to & Hom_{\pi_1(B,b)}(p_1^{-1}(b), p_2^{-1}(b)) \\ & f & \mapsto & f_b \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. On rappelle que l'action par monodromie est transitive car E_1 et E_2 sont connexes par arcs. Montrons que r_b est bijective. Fixons $x_1 \in E_1$, tel que $p_1(x_1) = b$. Par transitivité de l'action par monodromie, tout $h : p_1^{-1}(b) \to p_2^{-1}(b)$ invariant par l'action de monodromie est entièrement déterminé par sa valeur $h(x_1)$. De plus p_1 admet un unique relèvement $\tilde{p}_1$ par rapport à p_2 tel que $\tilde{p}_1(x_1) = h(x_1)$ si et seulement si $(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_1)) \subset (p_2)_*(\pi_1(E_2, h(x_1)))$. Soit γ_1 un lacet de E_1 basé en x_1. Remarquons que

$$h(x_1) = h(x_1 \cdot [p_1 \circ \gamma_1]) = h(x_1) \cdot [p_1 \circ \gamma_1],$$

donc $[pi \circ \gamma_1]$ est dans le stablilisateur de $h(x_1)$ sous l'action par monodromie. Ainsi, il existe un lacet γ_2 de E_2 tel que $[p_2 \circ \gamma_2] = [p_1 \circ \gamma_1]$. Les conditions sont ainsi réunies pour prouver l'existence et l'unicité d'un relèvement f de p_1 tel que $f(x_1) = h(x_1)$. Ceci implique qu'il existe un unique f tel que $r_b(f) = h$. □

Corollaire 1.6.3. *Si p est un revêtement CALCA, l'application induite*

$$A(p) \to \mathrm{Aut}_{\pi_1(B,b)}(p^{-1}(b))$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. On a f est un automorphisme de revêtement si et seulement si $r_b(f)$ est bijective. Il suffit de montrer que $r_b(f \circ g) = r_b(f) \circ r_b(g)$ ce qui est évident. □

1.7 Revêtements Galoisiens

Théorème 1.7.1. *Soit $p \colon E \to B$ un revêtement CALCA. On dit que p est* **galoisien** *s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivants*

1. *$\exists x \in E$ tel que $p_*(\pi_1(E, x))$ est distingué dans $\pi_1(B, p(x))$.*
2. *$\forall x \in E, p_*(\pi_1(E, x))$ est distingué dans $\pi_1(B, p(x))$.*
3. *Le groupe $A(p)$ agit sur $p^{-1}(b)$ de manière transitive.*

Démonstration. Clairement (2) $\Rightarrow$ (1). Montrons (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons $p_*(\pi_1(E, x))$ distingué dans $\pi_1(B, p(x))$. Fixons $y \in E$. Comme E est connexe par arcs, il existe un isomorphisme Φ_γ entre $\pi_1(E, x)$ et $\pi_1(E, y)$, dépendant de la classe d'homotopie d'un chemin de x à y dans E. Alors $\Phi_{p \circ \gamma}$ est un isomorphisme entre $\pi_1(B, p(x))$ et $\pi_1(B, p(y))$ envoyant isomorphiquement $p_*(\pi_1(E, x))$ sur $p_*(\pi_1(E, y))$. On en déduit que $p_*(\pi_1(E, y))$ est distingué dans $\pi_1(B, p(y))$. En particulier on peut traduire la condition (2) par la condition (2′): pour tous $x, y \in p^{-1}(b)$, $p_*(\pi_1(E, x)) = p_*(\pi_1(E, y))$. Le Théorème 1.3.6 nous dit que cette condition est équivalente à l'existence de $f \in A(p)$ tel que $f(x) = y$, c'est-a-dire (2′) $\Leftrightarrow$ (3). □

Remarque 1.7.2. Dans le cas d'un revêtement Galoisien on a $p^{-1}(b)$ est en bijection avec $A(p)$ et est en bijection avec $\pi_1(B, b)/p_*(\pi_1(E, x))$, pour tout $x \in p^{-1}(b)$.

Proposition 1.7.3. *Soit $p : E \to B$ un revêtement galoisien, $b_0 \in B$ et $x_0 \in E$ tel que $p(x_0) = b_0$. L'action par monodromie induit un isomorphisme*

$$\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0)) \to A(p)$$

Démonstration. On note $\mu : \pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0)) \to p^{-1}(b_0)$ l'application qui à $\widehat{[\gamma]}$, où $\widehat{z}$ désigne la classe de $z \in \pi_1(B, b_0)$ modulo le sous-groupe distingué $p_*(\pi_1(E, x_0))$, associe le point $x_0 \cdot [\gamma] \in p^{-1}(b)$. On a vu que pour E CALCA, μ est bijective. Notons $h_0 \colon : p^{-1}(b_0) \to A(p)$ l'application qui à x associe l'unique automorphisme f_x tel que $f_x(x_0) = x$. On rappelle que si $x = x_0 \cdot [\gamma]$ alors $f_x(x_0) = x_0 \cdot [\gamma]$ et pour tout $y = x_0 \cdot [u]$ on a $f_x(y) = f(x_0) \cdot [u] = x_0 \cdot [\gamma * u]$. L'application composée

$$\Phi : \pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0)) \to A(p)$$

associe à $\widehat{[\gamma]}$ l'unique élément de $A(p)$ tel que $\Phi(\widehat{[\gamma]})(x_0 \cdot [u]) = x_0 \cdot [\gamma * u]$. Notons $f = \Phi(\widehat{[\gamma]})$ et $g = \Phi(\widehat{[\alpha]})$ alors $(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0)) = f(x_0 \cdot [\alpha]) = x_0 \cdot [\gamma * \alpha]$. Donc $f \circ g = \Phi(\widehat{[\gamma * \alpha]})$. L'application Φ est donc un isomorphisme de groupes. □

Exemple 1.7.4. Le revêtement $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ est Galoisien, donc $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ est isomorphe à $A(p)$. Or, pour $n \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto n + t$ est un automorphisme de ce revêtement et c'est l'unique automorphisme qui envoie 0 sur n. Donc $A(p)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et il en est de même pour $\mathbb{S}^1$.

Proposition 1.7.5. *Soit E un espace CALCA et G agissant sur E par homéomorphisme et de façon totalement discontinue. Alors $q : E \to E/G$ est un revêtement Galoisien et le groupe $A(q)$ est isomorphe à G. De plus le groupe G est isomorphe à $\pi_1(E/G, q(x))/q_*(\pi_1(E, x))$, pour tout $x \in E$.*

Démonstration. On sait déjà que c'est un revêtement CALCA. Il faut voir qu'il est Galoisien. Pour ce faire, nous montrons que $A(q)$ agit transitivement sur les fibres. Nous contruisons un isomorphisme de groupes $\rho : G \to A(q)$ qui à g associe l'automorphisme de revêtement donné par $\rho(g)(x) = g \cdot x$. L'application ρ est clairement un morphisme de groupes. Montons que ρ est un isomorphisme de groupes. Comme G agit sur E de façon totalement discontinue, ρ est injective. Soit $f \in A(q)$ et $x_0 \in E$. Posons $\bar{x}_0 = q(x_0)$. On a $f(x_0) \in q^{-1}(\bar{x}_0)$ donc il existe $g \in G$ tel que $f(x_0) = g \cdot x_0$, c'est-à-dire $f(x_0) = \rho(g)(x_0)$. Comme f et $\rho(g)$ sont deux relèvements de q et coincident en un point on a $f(x) = \rho(g)(x), \forall x \in E$. Comme G agit transitivement sur les fibres, il en va de même pour $A(q)$. Le revêtement est donc Galoisien. On a montré que le groupe G est isomorphe au groupe $A(q)$, lui-même isomorphe à $\pi_1(E/G, q(x))/q_*(\pi_1(E, x))$. □

Exemple 1.7.6.

1. $\mathbb{Z}^n$ opère sur $\mathbb{R}^n$ par translations, par homéomorphisme et de façon totalement discontinue. Cela donne le revêtement CALCA $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ et $A(q)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. On retrouve le calcul du groupe fondamental du tore et donc de $\mathbb{S}^1$.

2. $q_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ qui à $z \mapsto z^n$ est un revêtement. Le groupe des racines n-ième de l'unité $\mathcal{U}_n$ agit sur $\mathbb{S}^1$ par multiplication et on a q_n surjective induit un homéomorphisme $\pi : \mathbb{S}^1/\mathcal{U}_n \to \mathbb{S}^1$

   Note: $\mathbb{S}^1$ quasi-compact, $\mathbb{S}^1/\mathcal{U}_n$ aussi et $\mathbb{S}^1$ séparé implique $\bar{q}_n$ homéomorphisme. La composition $\pi^{-1}q_n$ est la projection.

   Donc q_n est un revêtement CALCA, Galoisien et $A(q_n)$ est isomorphe à $\mathcal{U}_n$.

3. Pour $n \geq 2$, $S^n \to P_n(\mathbb{R})$ est un revêtement Galoisien: $P_n(\mathbb{R}) = S^n/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit librement et proprement sur S^n. On retrouve $\pi_1(P_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Rappel du TD:

Proposition 1.7.7. *Si G discret opère proprement et librement sur X localement compact et séparé alors il agit de façon totalement discontinue sur X.*

Théorème 1.7.8. *Si p est un revêtement Galoisien, alors $A(p)$ agit par homéomorphisme de façon totalement discontinue sur E et l'application induite $\overline{p} : E/A(p) \to X$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. La démonstration a été ébauchée en cours. □

En conclusion, tout revêtement Galoisien est de type $E \to E/G$ avec G discret agit par homéomorphisme de façon totalement discontinue sur E.

1.8 Classification des revêtements

Théorème 1.8.1 (Classification des revêtements)**.** *Soit B un espace CALCA admettant un revêtement universel, et $b \in B$. On a une bijection entre les classes d'isomorphismes de revêtements CALCA au-dessus de B et les classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(B, b)$.*

Démonstration. Vue en cours. □

2 Groupes d'homotopies supérieures

2.1 Premières définitions

Cette partie donne un petit aperçu d'autres invariants, basés sur la même idée que le groupe fondamental. En effet on peut décrire le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie, relativement à un point, d'applications $f : (\mathbb{S}^1, p_0) \to (X, x_0)$. On peut ainsi généraliser:

Définition 2.1.1. Soit $p_0 \in \mathbb{S}^k$, par exemple $p_0 = (1, 0 \dots, 0)$ et (X, x) un espace topologique pointé. On note

$$\pi_k(X, x) := \{f : (\mathbb{S}^k, p_0) \to (X, x) \text{ continue }\}/ \simeq_{\{p_0\}}$$

Remarque 2.1.2. Comme les paires $(\mathbb{S}^k, x_0)$ et $(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ sont homotopiquement équivalentes on peut remplacer dans la définition de $\pi_k(X, x_0)$ la paire $(\mathbb{S}^k, x_0)$ par la paire $(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$, mais aussi par la paire $(I^k, \partial I^k)$. Cette dernière présentation permet de construire la structure de groupe sur $\pi_k(X, x)$.

2.2 Loi de groupe

Définition 2.2.1. Soient $f, g : (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ deux applications continues de paires. Pour $1 \leq i \leq k$ on définit

$$f *_i g := \begin{cases} f(t_1, \dots, t_{i-1}, 2t_i, \dots, t_k) & \text{si } 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2}, \\ g(t_1, \dots, t_{i-1}, 2t_i - 1, \dots, t_k) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1. \end{cases}$$

On a vu que pour $f, g, h : (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$, les applications $(f *_i g) *_i h$ et $f *_i (g *_i h)$ sont homotopes relativement à ∂I^k, ce qui permet de définir une loi de composition interne, associative sur $\pi_k(X, x_0)$ et de démontrer que cette loi est une loi de groupe, comme on l'a fait pour le groupe fondamental.

Proposition 2.2.2. *Soit $k \geq 2$. Pour tous $1 \leq i, j \leq k$ et tous $f, g, f', g' : (I^k, \partial I^k) \to (X, x_0)$ on a*

$$(f *_i g) *_j (f' *_i *g') \simeq_{\partial I^k} (f *_j f') *_i (g *_j g')$$

Ainsi $\pi_k(X, x_0)$ est un groupe abélien pour $k \geq 2$.

Démonstration. La première partie se démontre en constuisant des homotopies explicites sur un carré. La deuxième partie est une conséquence du principe d'Eckmann-Hilton vu en TD (feuille de TD4, exo 1). □

2.3 Fonctorialité

Proposition 2.3.1. *Soit $k \geq 2$. Les groupes abéliens $\pi_k(X, x)$ s'agencent en un foncteur $\pi_k : \mathrm{Top}_* \to \mathcal{A}b$ qui à (X, x) associe $\pi_k(X, x)$ et qui à $f : (X, x) \to (Y, y)$ associe $\pi_k(f) : \pi_k(X, x_0) \to (Y, y_0)$ défini par $\pi_k(f)[\rho] = [f \circ \rho]$. Par ailleurs si $f \simeq_{\partial I^k} g$ alors $\pi_k(f) = \pi_k(g)$. Si f est une équivalence d'homotopie alors $\pi_k(f)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. La démonstration de la première partie ne pose pas de difficulté.

La deuxième partie se démontre en démontrant tout d'abord que si $f \simeq g : X \to Y$ alors il existe un isomorphisme $\Phi : \pi_k(Y, f(x_0)) \to \pi_k(Y, g(x_0))$ tel que $\Phi \circ \pi_k(f) = \pi_k(g)$, comme dans le cas fait pour le groupe fondamental. Si l'homotopie est relative au bord, alors on peut choisir $\Phi = Id$. □

2.4 Exemples

On a vu dans l'exemple 1.3.7 que si Y est simplement connexe, CALCA, alors tout $f : (Y, y_0) \to (\mathbb{S}^1, 1)$ se relève en $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\mathbb{R}, 0)$, en particulier f est homotope relativement à y_0 à une application constante. Ainsi, pour $n \geq 2$ on a $\pi_n(\mathbb{S}^1, 1) = 0$.

Plus d'exemple dans Hatcher, notamment

Proposition 2.4.1. $\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0$ *pour* $k < n$ *et* $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$.

Un peu de culture générale. Si on se donne un entier $n \geq 1$ et un groupe G (abélien si $n \geq 2$), il existe un espace topologique $K(G, n)$ tel que $\pi_n(K(G, n)) = G$ et $\pi_k(K(G, n)) = \{e\}$ pour $k \neq n$. Un tel espace est appelé espace d'Eilenberg-MacLane.