ENS-DMA <br> 19 mars 2024
Année universitaire 2023-2024 <br> Durée : 2 heures

# Partiel de topologie algébrique

*Dans tout le sujet on note $\mathbb{S}^n$ la sphère de dimension $n$. On identifiera $\mathbb{S}^1$ au sous-ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ de module 1.*
*Le sujet est constitué de 3 exercices indépendants traitant respectivement de catégories, $CW$-complexes et topologie.*

**Exercice 1** (Catégories)**.** Dans cet exercice les deux questions sont indépendantes.
Pour une catégorie $\mathcal{C}$ on note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ l'ensemble des morphismes dans $\mathcal{C}$ de $X$ vers $Y$. On note $1_X$ le morphisme identité de $X$ vers $X$.

1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un isomorphisme s'il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ tel que $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$. Pour tout objet $Z$ de $\mathcal{C}$ on note $f_Z^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ l'application qui à $u$ associe $u \circ f$. Montrer que $f$ est un isomorphisme si et seulement si pour tout objet $Z$ de $\mathcal{C}$, l'application $f_Z^*$ est une bijection.
2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $A$ un objet de $\mathcal{C}$. On définit la catégorie $A\backslash\mathcal{C}$, donc les objets sont les paires $(X,f)$ où $X$ est un objet de $\mathcal{C}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)$. Par définition un élément de $\mathrm{Hom}_{A\backslash\mathcal{C}}((X,f),(Y,g))$ est la donnée d'un morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ tel que $\varphi \circ f = g$.
On suppose que $\mathcal{C}$ admet des colimites (coproduit, pushout en particulier) et des produits. Exprimer le coproduit de $(X,f)$ et $(Y,g)$ en fonction de colimites dans $\mathcal{C}$. Exprimer le produit de $(X,f)$ et $(Y,g)$ en fonction des limites dans $\mathcal{C}$. Justifier votre résultat.

**Exercice 2** ($CW$-complexes)**.** *On rappelle le résultat du cours suivant. Si $(X,A)$ est une paire qui vérifie la propriété d'extension des homotopies (par exemple si $A$ est un sous-$CW$-complexe de $X$) et $A$ est contractile alors la projection $q : X \to X/A$ est une équivalence d'homotopie.*

Dans cet exercice, on considère le tétraèdre régulier $\Delta$ dans $\mathbb{R}^3$ représenté par l'enveloppe convexe des points $e_0 = (0,0,0), e_1 = (0,0,1), e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (1,1,1)$. On note $\Delta_1$ le sous-espace topologique de $\Delta$ constitué de ses arêtes, $\Delta_2$ le sous-espace topologique constitué de ses faces. Et on note $\Delta_2' = \Delta_1 \cup F$ où $F$ est une face du tétraèdre.

1. Dans un premier temps on s'intéresse aux types d'homotopie des espaces en jeu.
   (a) Donner une structure de $CW$-complexe sur $\Delta$ de telle manière que les inclusions $\Delta_1 \subset \Delta_2' \subset \Delta_2 \subset \Delta$ soient des inclusions de sous-$CW$-complexes.
   (b) Montrer que $\Delta_1$ et $\Delta_2'$ sont homotopiquement équivalents à des bouquets de cercles $\mathbb{S}^1$ dont on déterminera le nombre.
2. Soit $Y$ un espace simplement connexe, et $y_0$ un point de $Y$.
   (a) Montrer que toute application continue $g : \Delta_1 \to Y$ est homotope à l'application constante $c_{y_0}$. (*Indication : on pourra utiliser que $\Delta_1$ a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles*)
   (b) Soit $f : \Delta_2 \to Y$ une application continue. Montrer que $f$ est homotope à une application continue $h : \Delta_2 \to Y$ telle que $h(\Delta_1) = \{y_0\}$.
3. (Question Bonus) Décrire le noyau du morphisme de groupes $\pi_1(\Delta_1, e_0) \to \pi_1(\Delta_2', e_0)$ induit par l'inclusion canonique $\Delta_1 \hookrightarrow \Delta_2'$.

**Exercice 3** (Topologie). *On rappelle des notions et résultats utiles du cours de topologie. On a démontré dans le cours que si $K$ est un espace topologique compact alors la projection $p_X : X \times K \to X$ est fermée.*

*On rappelle qu'un espace topologique $X$ est dit localement compact s'il est séparé et si tout point $x$ de $X$ admet un voisinage compact.*

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. On note $\mathrm{Top}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de $X$ dans $Y$. On se propose d'étudier une topologie sur $\mathrm{Top}(X, Y)$ appelée la topologie compacte-ouverte. Pour $K$ compact de $X$ et $U$ ouvert de $Y$ on note

$$\mathcal{W}(K, U) = \{f \in \mathrm{Top}(X, Y) | f(K) \subset U\}$$

On note $Y^X$ l'espace topologique dont l'ensemble sous-jacent est $\mathrm{Top}(X, Y)$ et la topologie est la topologie engendrée par $\mathcal{W}(K, U)$.

1. Montrer que si $X$ est localement compact, alors l'application d'évaluation $\mathrm{ev} : Y^X \times X \to Y$, qui à $(f, x)$ associe $f(x)$ est continue. *Par la suite on s'appuiera sur ce résultat pour éviter des démonstrations trop fastidieuses.*
2. Soit $f : X \times Y \to Z$ une application continue. On définit $\tilde{f} : X \to Z^Y$ par $\tilde{f}(x)(y) = f(x, y)$. Montrer que $\tilde{f}$ est continue.
3. Réciproquement, à toute application continue $\tilde{f} : X \to Z^Y$, on associe une application $f : X \times Y \to Z$ définie par $f(x, y) = \tilde{f}(x)(y)$. Montrer que si $Y$ est localement compact, alors $f$ est continue.
4. On suppose $X$ et $Y$ localement compacts et l'on considère l'application $\varphi : Z^{X\times Y} \to (Z^Y)^X$ qui à $f$ associe $\tilde{f}$ et son inverse $\varphi^{-1}$ qui à $\tilde{f}$ associe $f$. Montrer que $\varphi$ est un homéomorphisme.
5. On note $I$ l'intervalle $[0, 1]$. Soit $X$ un espace topologique et $x_0 \in X$. On définit l'espace topologique $P_{x_0}(X)$ comme étant le sous-espace topologique de $X^I$ formé des applications continues $f : I \to X$ vérifiant $f(0) = x_0$.
   (a) Montrer que $P_{x_0}(X)$ est contractile.
   (b) Montrer que l'application $p : P_{x_0}(X) \to X$ qui à $\gamma$ associe $\gamma(1)$ est continue. On note $\Omega(X, x_0) = p^{-1}(x_0)$.
   (c) Calculer les composantes connexes par arcs de $\Omega(X, x_0)$.
   (d) (Question Bonus) On note $\gamma_0$ le chemin constant égal a $x_0$. Montrer que $\pi_1(\Omega(X, x_0), \gamma_0)$ est un groupe abélien.