ENS-DMA 19 mars 2024
Année universitaire 2023-2024 Durée : 2 heures

Eléments de correction du partiel de topologie algébrique

Dans tout le sujet on note $\mathbb{S}^n$ la sphère de dimension n. On identifiera $\mathbb{S}^1$ au sous-ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ de module 1.
Le sujet est constitué de 3 exercices indépendants traitant respectivement de catégories, CW-complexes et topologie.

Exercice 1 (Catégories)**.** Dans cet exercice les deux questions sont indépendantes.
Pour une catégorie $\mathcal{C}$ on note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ l'ensemble des morphismes dans $\mathcal{C}$ de X vers Y. On note 1_X le morphisme identité de X vers X.

1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un isomorphisme s'il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ tel que $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$. Pour tout objet Z de $\mathcal{C}$ on note $f_Z^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ l'application qui à u associe $u \circ f$. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si pour tout objet Z de $\mathcal{C}$, l'application f_Z^* est une bijection.
2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A un objet de $\mathcal{C}$. On définit la catégorie $A\backslash\mathcal{C}$, donc les objets sont les paires (X,f) où X est un objet de $\mathcal{C}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)$. Par définition un élément de $\mathrm{Hom}_{A\backslash\mathcal{C}}((X,f),(Y,g))$ est la donnée d'un morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ tel que $\varphi \circ f = g$.
On suppose que $\mathcal{C}$ admet des colimites (coproduit, pushout en particulier) et des produits. Exprimer le coproduit de (X,f) et (Y,g) en fonction de colimites dans $\mathcal{C}$. Exprimer le produit de (X,f) et (Y,g) en fonction des limites dans $\mathcal{C}$. Justifier votre résultat.

Eléments de réponse.

1. Si f est un isomorphisme d'inverse g alors f_Z^* est une bijection d'inverse g_Z^*. Réciproquement, pour $Z = X$, il existe $u \in \mathcal{C}(Y,X)$ tel que $u \circ f = 1_X$. On a alors $f_Y^*(f \circ u) = f \circ u \circ f = f = f_Y^*(1_Y)$. Comme f_Y^* est bijective, elle est injective, ce qui induit $f \circ u = 1_Y$ et f est un isomorphisme.
2. Pour le coproduit : $(X,f) \sqcup (Y,g) = (X \cup_A Y, i_X \circ f)$ où $i_X : X \to X \cup_A Y$. On a $(X,f) \times (Y,g) = (X \times Y, (f,g))$. On montre que cela vérifie les bonnes propriétés universelles.

Exercice 2 (*CW*-complexes)**.** *On rappelle le résultat du cours suivant. Si (X, A) est une paire qui vérifie la propriété d'extension des homotopies (par exemple si A est un sous-CW-complexe de X) et A est contractile alors la projection $q : X \to X/A$ est une équivalence d'homotopie.*

Dans cet exercice, on considère le tétraèdre régulier Δ dans $\mathbb{R}^3$ représenté par l'enveloppe convexe des points $e_0 = (0,0,0), e_1 = (0,0,1), e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (1,1,1)$. On note Δ_1 le sous-espace topologique de Δ constitué de ses arêtes, Δ_2 le sous-espace topologique constitué de ses faces. Et on note $\Delta_2' = \Delta_1 \cup F$ où F est une face du tétraèdre.

1. Dans un premier temps on s'intéresse aux types d'homotopie des espaces en jeu.
   (a) Donner une structure de CW-complexe sur Δ de telle manière que les inclusions $\Delta_1 \subset \Delta_2' \subset \Delta_2 \subset \Delta$ soient des inclusions de sous-CW-complexes.
   (b) Montrer que Δ_1 et Δ_2' sont homotopiquement équivalents à des bouquets de cercles $\mathbb{S}^1$ dont on déterminera le nombre.
2. Soit Y un espace simplement connexe, et y_0 un point de Y.
   (a) Montrer que toute application continue $g : \Delta_1 \to Y$ est homotope à l'application constante c_{y_0}. (*Indication : on pourra utiliser que Δ_1 a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles*)
   (b) Soit $f : \Delta_2 \to Y$ une application continue. Montrer que f est homotope à une application continue $h : \Delta_2 \to Y$ telle que $h(\Delta_1) = \{y_0\}$.
3. (Question Bonus) Décrire le noyau du morphisme de groupes $\pi_1(\Delta_1, e_0) \to \pi_1(\Delta_2', e_0)$ induit par l'inclusion canonique $\Delta_1 \hookrightarrow \Delta_2'$.

Solution de l'exercice

On rappelle que dans un CW-complexe, une i-cellule est l'image de l'intérieur de la boule de dimension i par l'application caractéristique. En particulier elle est ouverte. une 0-cellule est un point. Par définition un sous CW-complexe d'un CW-complexe X est un sous espace topologique fermé qui est union de cellules. On a montré en cours, que pour tout CW-complexe X, son i-skelette (union des cellules de dimension $\leq i$ est) est un sous-CW-complexe de X.

1. (a) On munit Δ d'une structure de CW-complexe comme suit : il y a quatre 0-cellules, les points e_i pour $0 \leq i \leq 3$; six 1-cellules données par les intervalles $]e_i, e_j[$ pour $0 \leq i < j \leq 3$; 4 2-cellules données par l'intérieur des enveloppes convexes des points e_i, e_j, e_k pour $0 \leq i < j < k \leq 3$ et 1 3-cellule. Son 1-squelette est alors Δ_1, et son 2 squelette est Δ_2. Ainsi les inclusions $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta$ sont des inclusions de sous-CW-complexes.
   On choisit une face F par exemple l'enveloppe convexe de $\{e_0, e_1, e_2\}$. On a donc $\Delta_1 \subset \Delta_1 \cup F = \Delta_2' \subset \Delta_2$ sont des inclusions de sous CW-complexes. En effet Δ_1 est le 1-squelette de Δ_2' et Δ_2' est fermé dans Δ_2, union de toutes les cellules de dimension 0 et 1 et d'une cellule de dimension 2.
   (b) Le CW-complexe A constitué des points $\{e_i, 0 \leq i \leq 3\}$ et des arêtes $[e_0, e_i]$ pour $1 \leq i \leq 3$ est un sous CW-complexe de Δ_1, contractile, donc la projection $\Delta_1 \to \Delta_1/A$ est une équivalence d'homotopie. Il est assez clair que Δ_1/A est homéomorphe à un bouquet de 3 cercles, chacun indéxé par une arête $[e_i, e_j]$ avec $1 \leq i < j \leq 3$.
   Sans perte de généralités, on peut supposer que F est l'enveloppe convexe de $\{e_0, e_1, e_2\}$. Notons $F' = F \cup [e_0, e_3]$. Il est clair que F' est un sous CW-complexe de Δ_2', et que F' est contractile. Donc $\Delta_2' \to \Delta_2'/F'$ est une équivalence d'homotopie et Δ_2'/F' est homéomorphe à un bouquet de 2 cercles, indexé par les arêtes $[e_1, e_2]$ et $[e_2, e_3]$.

2. Soit Y un espace simplement connexe, et y_0 un point de Y.

   (a) Montrons tout d'abord que toute application continue $g\colon \vee_{i=1}^{3} \mathbb{S}^1 \to Y$ est homotope à l'application constante c_{y_0}. Notons p_0 le point d'attachement des 3 cercles et $z_0 = g(p_0)$. L'application g continue est entièrement déterminée par ses composantes $g_i\colon \mathbb{S}^1 \to Y$ satisfaisant $g_i(p_0) = x_0$. Chaque application g_i détermine un lacet $[0,1] \to Y$ basé en z_0. Y étant simplement connexe, ce lacet est homotope au lacet constant c_{z_0} à extrémités fixées. Ainsi il existe $H_i\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to Y$ tel que $H_i(x,0) = g_i(x), H_i(x,1) = z_0$ et $H_i(p_0,t) = z_0$. Cette dernière condition fournit une application continue $H\colon \vee_{i=1}^{3} \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to Y$, qui est une homotopie de g à l'application constante c_{z_0}. Y étant connexe par arcs, choisissons $\gamma : [0,1] \to Y$ un chemin reliant z_0 à y_0. On défnit $K\colon \vee_{i=1}^{3} \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to Y$ par $K(x,t) = \gamma(t)$. Cette application est continue et fournit une homotopie de c_{z_0} à c_{y_0}. Conclusion : toute application continue $g\colon \vee_{i=1}^{3} \mathbb{S}^1 \to Y$ est homotope à l'application constante c_{y_0}.

   Comme Δ_1 est homotopiquement équivalent à un bouquet de 3 cercles, il existe $u\colon \Delta_1 \to \vee_{i=1}^{3}\mathbb{S}^1$ et $v\colon \vee_{i=1}^{3} \mathbb{S}^1 \to \Delta_1$ tels que $u \circ v \simeq \mathrm{id}$ et $v \circ u \simeq \mathrm{id}$. Pour $f\colon \Delta_1 \to Y$ continue, on a $f \circ v \simeq c_{y_0}$ et donc $f \simeq f \circ v \circ u \simeq c_{y_0} \circ u = c_{y_0}$.

   (b) Soit $f\colon \Delta_2 \to Y$ une application continue. Posons $g\colon \Delta_1 \to Y$ la restriction de f à Δ_1. Par la question précédente, il existe une homotopie $H\colon \Delta_1 \times I \to Y$ de g vers c_{y_0}. Comme Δ_1 est un sous-CW-complexe de Δ_2 l'inclusion $\Delta_1 \to \Delta_2$ vérifie la propriété d'extension des homotopies. Donc il existe une homotopie $\tilde{H}\colon \Delta_2 \times I \to Y$ vérifiant $\tilde{H}(x,0) = f(x)$, pour tout $x \in \Delta_2$ et $\tilde{H}(a,t) = H(a,t), \forall a \in \Delta_1, t \in I$. En particulier, si l'on pose $h = \tilde{H}(x,1)$ on obtient : h est homotope à f et $h(\Delta_1) = y_0$.

3. On a $\pi_1(\Delta_1, e_0) \cong \mathbb{Z}^{*3}$ et $\pi_1(\Delta_2', e_0) \cong \mathbb{Z}^{*2}$, d'après les questions précédentes.

   Notons $\gamma_{13} : [0,1] \to \Delta_1$ (resp. γ_{12}, γ_{23}) le lacet obtenu par concaténation des chemins $e_0 \to e_1 \to e_3 \to e_0$ (resp. $e_0 \to e_1 \to e_2 \to e_0$, $e_0 \to e_2 \to e_3 \to e_0$). Les classes de ces 3 lacets engendrent le groupe libre $\pi_1(\Delta_1, e_0)$. Le groupe libre $\pi_1(\Delta_2', e_0)$ est, quant à lui, engendré par $u = [\gamma_{13}]$ et $v = [\gamma_{23}]$. Le morphisme de groupes $\varphi\colon \pi_1(\Delta_1, e_0) \to \pi_1(\Delta_2', e_0)$ envoie $[\gamma_{13}]$ sur u et $[\gamma_{23}]$ sur v et $[\gamma_{12}]$ sur la classe du lacet constant c_{e_0}, donc sur l'élément neutre du groupe. Ainsi $[\gamma_{12}] \subset \mathrm{Ker}\varphi$. Donc H, le sous-groupe normal de $\pi_1(\Delta_1, e_0)$ engendré par $[\gamma_{12}]$ est inclus dans $\mathrm{Ker}\varphi$.

   Réciproquement, supposons $\varphi(x) = e$. Posons $G_1 = \mathbb{Z}[\gamma_{13}] * \mathbb{Z}[\gamma_{23}]$ et $G_2 = \mathbb{Z}[\gamma_{12}]$. Supposons $x = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1})$ un élément de $G_1 * G_2$ avec $a_i \in G_2$ pour i pair. On a alors, $\varphi(x) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_3) \ldots \varphi(a_{2n+1}) = e = \varphi(a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n+1})$, ce qui implique que dans G_1 (et par suite dans $G_1 * G_2$), $a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n+1} = e$. On peut donc écrire x sous la forme

   $$x = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_1^{-1}) \cdot ((a_1 a_3) \cdot a_4 \cdot (a_1 a_3)^{-1}) \cdot \ldots \cdot ((a_1 \ldots a_{2n-1}) \cdot a_{2n} \cdot (a_1 \ldots a_{2n-1})^{-1}).$$

   Donc $x \in H$. Supposons $x = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$, avec $a_i \in G_2$ pour i pair., alors $a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1} = e$ et x s'écrit sous la forme précédente. Le raisonnement est exactement le même si l'on suppose $a_i \in G_2$ pour i impair.

   Remarque : Le noyau de φ, n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$. C'est le sous-groupe normal engendré par l'élément $[\gamma_{12}]$ qui est bien plus gros que le sous-groupe engendré par un élément. Par exemple il n'est pas abélien. Il suffit de prendre $u, v \in G_1$ tels que $u \neq v$ alors $(u, [\gamma_{12}], u^{-1}v, [\gamma_{12}], v^{-1}) \neq (v, [\gamma_{12}], v^{-1}u, [\gamma_{12}], u^{-1}) \in G_1 * G_2$.

Exercice 3 (Topologie)**.** *On rappelle des notions et résultats utiles du cours de topologie. On a démontré dans le cours que si K est un espace topologique compact alors la projection $p_X : X \times K \to X$ est fermée.*

On rappelle qu'un espace topologique X est dit localement compact s'il est séparé et si tout point x de X admet un voisinage compact.

Soient X et Y deux espaces topologiques. On note $\mathrm{Top}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y. On se propose d'étudier une topologie sur $\mathrm{Top}(X, Y)$ appelée la topologie compacte-ouverte. Pour K compact de X et U ouvert de Y on note

$$\mathcal{W}(K, U) = \{f \in \mathrm{Top}(X, Y) | f(K) \subset U\}$$

On note Y^X l'espace topologique dont l'ensemble sous-jacent est $\mathrm{Top}(X, Y)$ et la topologie est la topologie engendrée par $\mathcal{W}(K, U)$.

1. Montrer que, si X est localement compact, alors l'application d'évaluation $\mathrm{ev} : Y^X \times X \to Y$, qui à (f, x) associe $f(x)$ est continue. *Par la suite on s'appuiera sur ce résultat pour éviter des démonstrations trop fastidieuses.*
2. Soit $f : X \times Y \to Z$ une application continue. On définit $\tilde{f} : X \to Z^Y$ par $\tilde{f}(x)(y) = f(x, y)$. Montrer que $\tilde{f}$ est continue.
3. Réciproquement, à toute application continue $\tilde{f} : X \to Z^Y$, on associe une application $f : X \times Y \to Z$ définie par $f(x, y) = \tilde{f}(x)(y)$. Montrer que si Y est localement compact alors f est continue.
4. On suppose X et Y localement compacts et l'on considère l'application $\varphi : Z^{X\times Y} \to (Z^Y)^X$ qui à f associe $\tilde{f}$ et son inverse φ^{-1} qui à $\tilde{f}$ associe f. Montrer que φ est un homéomorphisme.
5. On note I l'intervalle $[0, 1]$. Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$. On définit l'espace topologique $P_{x_0}(X)$ comme étant le sous espace topologique de X^I des applications continues $f : I \to X$ tel que $f(0) = x_0$.
   (a) Montrer que $P_{x_0}(X)$ est contractile.
   (b) Montrer que l'application $p : P_{x_0}(X) \to X$ qui à γ associe $\gamma(1)$ est continue. On note $\Omega(X, x_0) = p^{-1}(x_0)$.
   (c) Calculer les composantes connexes par arcs de $\Omega(X, x_0)$.
   (d) (*Question Bonus*) On note γ_0 le chemin constant égal a x_0. Montrer que $\pi_1(\Omega(x, x_0), \gamma_0)$ est un groupe abélien.

Solution.

Attention !

Le principal problème rencontré est la notion de topologie engendrée par un ensemble S de parties de X, noté $\mathcal{T}_S$. Par définition c'est la plus petite topologie sur X contenant S. Malheureusement, la plupart du temps, si l'on prend S quelconque, il n'y a aucune raison pour que S soit une base de la topologie de X. On rappelle qu'une base pour la topologie est un ensemble S vérifiant les conditions équivalentes suivantes

— Tout ouvert de $\mathcal{T}_S$ est union (quelconque) d'éléments de S.

— Pour tout $x \in X$ pour tout voisinage V de x il existe $U \in S$ tel que $x \in U \subset V$.

En particulier l'intersection de deux élements d'une base est union d'éléments de la base.

En général, (lorsque S n'est pas une base pour la topologie $\mathcal{T}_S$), tout ouvert de $\mathcal{T}_S$ s'écrit comme union quelconque d'intersection finie d'éléments de S. **Malheureusement dans ce cas là** on n'a pas que pour tout point x de X et pour tout voisinage V de x, il existe $U \in S$ tel que $x \in U \subset V$. **Ainsi**, tout raisonnement utilisant ce fait non avéré n'est pas correct.

En revanche, il est clair que pour montrer que $f : Y \to X$ est continue il est suffisant de montrer que pour tout $U \in S$ on a $f^{-1}(U)$ est un ouvert de Y.

1. Soit $U \subset Y$ un ouvert. On a $\mathrm{ev}^{-1}(U) = \{(f,x) \mid f(x) \in U\}$. Montrons que c'est un ouvert de $Y^X \times X$ en montrant que c'est un voisinage de chacun de ses points. On fixe un couple (f_0, x_0) tel que $f_0(x_0) \in U$. f_0 est continue donc il existe un voisinage compact K de x_0, (existe car X est localement compact) tel que $f_0(K) \subset U$. On a alors $f_0 \in \mathcal{W}(K,U)$, donc $\mathcal{W}(K,U) \times K$ est un voisinage de (f_0, x_0) et $\mathrm{ev}(\mathcal{W}(K,U) \times K) \subset U$.
2. Il suffit de montrer que $A = \tilde{f}^{-1}(\mathcal{W}(K,U))$ est un ouvert de X, pour K compact de Y et U ouvert de Z. On a
$$A = \tilde{f}^{-1}(\mathcal{W}(K,U)) = \{x \in X \mid \tilde{f}(x) \in \mathcal{W}(K,U)\} = \{x \in X \mid f(x,K) \subset U\}$$
Montrons que $X \setminus A$ est fermé. On a, pour tout $z \in X$
$$z \notin A \Leftrightarrow \exists k \in K, f(z,k) \notin U \Leftrightarrow z \in p_X(f^{-1}(Z \setminus U) \cap (X \times K))$$
où $p_X : X \times K \to X$. On montre (résultat du cours) que si K est compact la projection p_X est fermée (voir la dem du lemme 1.3.9 du cours sur les CW-complexes). Comme $f^{-1}(Z \setminus U) \cap (X \times K)$ est un fermé de $X \times K$ on en déduit que $X \setminus A$ est fermé dans X donc que A est ouvert dans X.
Attention une démonstration utilisant qu'un voisinage d'un point dans Z^Y est du type $\mathcal{W}(K,U)$ n'est pas correcte.
3. On a $f = \mathrm{ev} \circ (\tilde{f} \times \mathrm{id}_Y) : X \times Y \to Z^Y \times Y \to Z$ et comme Y est localement compact on en déduit que f est continue.
Autre méthode (plus longue) : soit $(x_0, y_0) \in X \times Y$ et V un voisinage ouvert de $f(x_0, y_0)$ dans Z. Comme $\tilde{f}(x_0) : Y \to Z$ est continue, $\tilde{f}(x_0)^{-1}(V)$ est un ouvert de Y contenant y_0. Par locale compacité de Y, il existe un voisinage compact K de y_0 avec $K \subset \tilde{f}(x_0)^{-1}(V)$. Ainsi $\tilde{f}(x_0)(K) \subset V$ donc $\tilde{f}(x_0) \in \mathcal{W}(K,V) \subset Z^Y$. Comme $\tilde{f}$ est continue, on a $U := \tilde{f}^{-1}(\mathcal{W}(K,V))$ est un ouvert de X contenant x_0. Alors pour tout $x \in U, y \in K$ on a $f(x,y) = \tilde{f}(x)(y) \in V$. Comme $(x_0, y_0) \in U \times K$ on en déduit que $U \times K$ est un voisinage de (x_0, y_0) qui est inclus dans $f^{-1}(V)$. Donc f est continue.
4. Il est clair que φ est bien définie et bijective, par ce qui a été vu précédemment.

   Montrons que φ est continue. On a montré précédememnt que si Y est localement compact, une application $f : X \times Y \to Z$ est continue si et seulement si $\tilde{f} : X \to Z^Y$ est continue. On va appliquer ceci à φ et à φ^{-1}.

   Comme X est localement compact, $\varphi : Z^{X \times Y} \to (Z^Y)^X$ est continue si et seulement si l'application adjointe $Z^{X \times Y} \times X \to Z^Y$ est continue. Comme Y est localement compact, cette dernière application est continue si et seulement si son application adjointe $\hat{\varphi} : Z^{X \times Y} \times X \times Y \to Z$ est continue. Remarquons que $\hat{\varphi}(f,x,y) = f(x,y)$ est l'application évaluation, donc elle est continue puisque $X \times Y$ est localement compact.
   Attention si on veut montrer que φ est continue de manière directe, c'est très délicat : on veut montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{W}(K,U))$ est un ouvert de $Z^{X \times Y}$ avec U ouvert de Z^Y. Cependant U n'est pas nécessairement de la forme $\mathcal{W}(K',V)$. Il faut l'écrire comme union quelconque

d'intersection finie d'éléments de cette forme. On a bien $\mathcal{W}(K,U_1)\cup\mathcal{W}(K,U_2) \subset \mathcal{W}(K,U_1\cup U_2)$ mais l'égalité n'est pas vérifiée ! Dans l'ensemble, peu de démonstrations de ce type là ont abouti.

Montrons que φ^{-1} est continue :

Comme $X \times Y$ est localement compact, $\varphi^{-1} : (Z^Y)^X \to Z^{X\times Y}$ est continue si et seulement si l'application adjointe $(Z^Y)^X \times X \times Y \to Z$ est continue. Or cette dernière application est la composé de ev $\times Y$: $((Z^Y)^X \times X) \times Y \to Z^Y \times Y$ suivi de l'évaluation. Donc la composée de deux évaluations, l'une en X et l'autre en Y. Comme X et Y sont localement compacts, on en déduit qu'elle est continue.

5. (a) Il faut construire une application continue $P_{x_0}(X) \times I \to P_{x_0}(X)$ qui soit une homotopie entre une application constante et l'identité. On commence par définir une application $H : X^I \times I \to X^I$ en posant $H(f,t)(u) = f(ut)$. On vérifie que H est continue en vérifiant que l'application adjointe $X^I \times I^2 \to X$ qui à (f,s,t) associe $f(st)$ est continue, car c'est l'évaluation sur I composée avec l'application $I^2 \to I$ qui à (s,t) associe st. H est continue et se restreint à $H : P_{x_0}(X) \times I \to P_{x_0}(X)$: en effet si $f(0) = x_0$ alors $H(f,s)(0) = f(0) = x_0$. Donc $P_{x_0}(X)$ est contractile.

   (b) Pour tout $U \subset X$ ouvert, $p^{-1}(U) = \mathcal{W}(\{1\},U) \cap P_{x_0}(X) = \{f \in P_{x_0}(X) \mid f(1) \in U\}$ ouvert dans $P_{x_0}(X)$ car $\{1\}$ est un compact de $[0,1]$.

   (c) On a $f,g \in \Omega(X,x_0)$ sont dans la même composante connexe par arcs si et seulement si il existe $\gamma : I \to \Omega(X,x_0)$ tel que $\gamma(0) = f, \gamma(1) = g$. Comme γ est la restriction d'une application continue $\gamma : I \to X^I$, l'existence de γ équivaut à l'existence $H : I^2 \to X$ continue tel que $H(0,t) = f(t)$, $H(1,t) = g(t)$ et $H(s,0) = H(s,1) = x_0$. Conclusion f et g sont dans la même composante connexe par arcs de $\Omega(X,x_0)$ si et seulement si $[f] = [g] \in \pi_1(X,x_0)$. Les composantes connexes par arcs de $\Omega(X,x_0)$ sont donc identifiées avec les éléments du groupe fondamental de X basé en x_0.

   (d) (*Question Bonus*) On verra dans le cours que $\pi_1(\Omega(X,x_0),\gamma_0)$ est isomorphe au groupe $\pi_2(X,x_0)$ qui est un groupe abélien.