DMA-ENS

2023/2024

Topologie Générale

L'objectif de ces notes est de présenter les préréquis de topologie générale nécessaires pour le cours de topologie algébrique. Ces prérequis ont été vu dans le cours de première année Topologie Générale et Calcul Différentiel et nous renvoyons à ces notes, sous la mention voir Def xxx ou Prop xxx dans le cours CD.

Contents

1 Premières définitions

1.1 Espaces topologiques et applications continues

On définit ici ce que l'on appelle une catégorie, que l'on notera $\mathcal{T}op$. Les objets de cette catégorie sont les espaces topologiques (voir définition 1.1.1) et les morphismes de la catégorie sont les applications continues (voir définition 1.1.3). Les isomorphismes de cette catégorie sont les homéomorphismes (voir définition 1.1.6). Les espaces métriques sont des cas particuliers d'espaces topologiques (voir Remarque 1.1.4).

Définition 1.1.1. Soit X un ensemble. On appelle **topologie** sur X la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X vérifiant

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.
2. Pour tout famille $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de $\mathcal{O}$, $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$.
3. Pour tout famille finie $(U_j)_{1\leq j\leq N}$ d'éléments de $\mathcal{O}$, $\cap_{j=1}^{N} U_j \in \mathcal{O}$.

Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés **ouverts**. Le complémentaire d'un ouvert dans X est appelé **fermé**. Un couple $(X, \mathcal{O})$ tel que $\mathcal{O}$ vérifie les trois propriétés ci-dessus est appelé **espace topologique**

voir def 117 du cours CD

Exemple 1.1.2. $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ *est appelé* **topologie grossière** *(c'est la topologie la moins fine sur* X*.* $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ *est appelé* **topologie discrète** *(c'est la topologie la plus fine sur* X*). Si* $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ *on dit que* $\mathcal{O}_1$ *est moins fine que* $\mathcal{O}_2$*.*

Définition 1.1.3. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est **continue** si pour tout $U \in \mathcal{O}_Y$ on a $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$.

Dans le cours CD, ceci est un théorème et la définition de continuité correspond à notre Théorème 1.3.10

Remarque 1.1.4. Si (E, d) est un espace métrique, la **topologie induite par la métrique** (ou **topologie métrique**) est définie de la manière suivante: U est ouvert si et seulement si $\forall x \in U, \exists \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \subset U$. La définition ci-dessus coincide avec la définition de continuité entre espaces métriques.

Remarque 1.1.5. On a les assertions suivantes:

1. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace discret alors toute application $f : X \to Y$ est continue.
2. Si $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est la topologie grossière alors toute application $f : X \to Y$ est continue.
3. La composée de deux fonctions continues est continue.
4. $id : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ est continue ssi $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ si et seulement si $\mathcal{O}_1$ est plus fine que $\mathcal{O}_2$.

Définition 1.1.6. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est un **homéomorphisme** si f est continue, bijective et f^{-1} est continue. Deux espaces topologiques sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme $f : X \to Y$. On note $X \approx Y$.

Remarque 1.1.7. Des exemples d'espaces homéomorphes: la boule $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| < 1\}$ et le cube de dimension n (ouvert) dans $\mathbb{R}^n$. L'application continue $\mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ qui à x associe $\frac{x}{1-||x||}$ est un homéomorphisme, de réciproque $y \to \frac{y}{1+||y||}$.

Voir def 1.3.10 de cours CD

1.2 Topologie induite sur un sous-ensemble

Définition 1.2.1. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset X$. On appelle **topologie induite par** $(X, \mathcal{O})$ **sur** A la topologie la moins fine sur $(A, \mathcal{O}_A)$ rendant l'injection canonique $i : A \to X$ continue.

Proposition 1.2.2. *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique et* $A \subset X$*. On a* $\mathcal{O}_A = \{U \cap A, U \in \mathcal{O}\}$*. L'espace* $(A, \mathcal{O}_A)$*.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\mathcal{O}_A$ déifnit une topologie sur A, que l'injection canonique $i : (A, \mathcal{O}_A) \to (X, \mathcal{O})$ est continue et que si il existe une autre topologie $\mathcal{O}'_A$ sur A telle que $i : (A, \mathcal{O}'_A) \to (X, \mathcal{O})$ est continue alors $\mathcal{O}_A \subset \mathcal{O}'_A$. Toutes ces vérifications sont immédiates. □

Appelée aussi Topologie trace dans la def 1.6.1 du cours CD

1.3 Voisinages, bases de voisinages, ouverts et voisinages

La notion de voisinage et de base de voisinages est très importante, notamment elle permet de définir des propriétés locales (connexité locale, compacité locale, etc...).

Définition 1.3.1. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit que $V \subset X$ est **un voisinage de** x s'il existe $U \in \mathcal{O}$ tel que $x \in U \subset V$. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

voir def 131 du cours CD

Remarque 1.3.2. De manière générale, si A est une partie de X on notera $\mathcal{V}(A) = \{U | U \in \mathcal{V}(x), x \in A\}$. On remarque aussi que tout ouvert est un voisinage de chacun de ses points. La réciproque est vraie et démontrée dans la proposition suivante.

Proposition 1.3.3. *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique.* $U \subset X$ *est un ouvert de* X *si et seulement si* U *est voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration. Il est clair que si U est ouvert alors il est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement si $U \subset X$ est voisinage de chacun de ses points, en notant U_x un ouvert contenant x et inclus dans U on a $U = \cup_x U_x$ donc U est ouvert. □

Définition 1.3.4. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique.

1. Un ensemble $\mathcal{B}$ d'ouverts de X forme une **base pour la topologie** si tout ouvert est union de parties de $\mathcal{B}$. De manière équivalente:

   (1) $$\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists U \in \mathcal{B}, x \in U \subset V.$$

2. Soit $x \in X$. Un ensemble $\mathcal{B}_x$ de parties de X forme une **base de voisinages de** x si:
   (a) $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}(x)$.
   (b) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists U \in \mathcal{B}_x$, $U \subset V$.

Remarque 1.3.5. L'équivalence dans 1. se montre de la manière suivante. Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, et $x \in U \subset V$ où U est un ouvert, $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $U = \cup_i U_i$ avec $U_i \in \mathcal{B}$. Il suffit de prendre un U_i contenant x. Réciproquement soit U un ouvert et $x \in U$, et soit $x \in V_x \subset U$ avec $V_x \in \mathcal{B}$. On a $U = \cup_{x \in U} V_x$ est donc union d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple 1.3.6. Si X est un espace métrique $\{B(x, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de voisinages de x.

Proposition 1.3.7. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie $\mathcal{O}$ si et seulement si $\forall x \in X$, le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{B}$ qui contiennent x est une base de voisinages de x.*

Démonstration. Notons $\mathcal{B}_x$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{B}$ qui contiennent x. Supposons $\mathcal{B}$ est une base de la topologie $\mathcal{O}$. Comme $V \in \mathcal{B}_x$ est un ouvert de $\mathcal{O}$ c'est un voisinage de x, donc $\mathcal{B}_x$ vérifie la condition (a). Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, Il existe un ouvert $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subset V$ et donc $U \in \mathcal{B}_x$, donc la condition (b) est vérifiée.
Réciproquement supposons que $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinage de x, pour tout $x \in X$. Alors $B \in \mathcal{B}$ est voisinage de chacun de ses points, car pour tout $x \in B$ on a $B \in \mathcal{B}_x$. Donc B est ouvert. La condition (b) implique que la condition (1). $\square$

La proposition suivante est utile pour construire une topologie sur un ensemble X:

Proposition 1.3.8. *Soit X une ensemble et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble de partie de X. L'ensemble $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie $\mathcal{O}$ sur X si:*

1. $X = \cup_{U \in \mathcal{B}} U$
2. *Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{B}$ est une union d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Si $\mathcal{B}$ vérifie ces deux propriétés, l'ensemble $\mathcal{O}$ constitué de toutes les unions d'éléments de $\mathcal{B}$ forme une topologie sur X. Cette topologie est unique car c'est la topologie la moins fine (le plus petite) contenant $\mathcal{B}$.

Voir aussi 1.4.3 du cours CD où la deuxième condition est remplacée par: $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, et $x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ avec $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Démonstration. Il suffit de voir que $\mathcal{O}$ est une topologie, il est clair que $\emptyset \in \mathcal{O}$ (union vide d'éléments de $\mathcal{B}$) et que $X \in \mathcal{O}$. Une union quelconque d'éléments de $\mathcal{O}$ est dans $\mathcal{O}$ par définition. Si l'on prend une intersection de deux unions on a, par distributivité,

$$(\cup_{i \in I} U_i) \cap (\cup_{j \in J} V_j) = \cup_{i,j} U_i \cap V_j \in \mathcal{O}$$

Par définition de base, $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de la topologie $\mathcal{O}$. $\square$

Définition 1.3.9. Soit $x_0 \in X$ et $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques. On dit que f est **continue en** x_0 si pour tout voisinage V de $f(x_0)$ on a $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0.

Théorème 1.3.10. *$f : X \to Y$ est continue si et seulement si f est continue en x pour tout $x \in X$.*

Démonstration. exo $\square$

1.4 Adhérence, intérieur, frontière

Définition 1.4.1. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset X$.

- Un point $x \in X$ est **adhérent à** A si tout voisinage de x rencontre A ($\forall U \in \mathcal{V}(x), U \cap A \neq \emptyset$). L'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$.

- A est **dense dans** X si $\overline{A} = X$.
- **L'intérieur de A**, noté $\overset{\circ}{A}$ est l'ensemble des points $x \in A$ tel que $A \in \mathcal{V}(x)$.
- La partie $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ est appelée **Frontière de** A, notée aussi ∂A. C'est un fermé de X.

Voir def 121 du cours CD
La démonstration de la proposition suivante est laissée en exo.

Proposition 1.4.2. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, c'est l'intersection de tous les femés de X contenant A. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A c'est l'union de tous les ouverts inclus dans A. On a: l'adhérence du complémentaire de A est le complémentaire de l'intérieur de A. L'intérieur du complémentaire de A est le complémentaire de l'adhérence de A. ∂A est l'ensemble des point adhérents à A et à son complémentaire.*

2 Compacité

Dans cette partie, on notera par abus de notation X pour un espace topologique $(X, \mathcal{O})$. Si besoin on précisera la topologie.

2.1 Espaces séparés, espaces quasi-compacts, espaces compacts

Pour la partie quasi-compact, compact voir Section 2.1 cours CD

Définition 2.1.1. Un espace topologique X est **séparé** si pour tous points $x, y \in X$ avec $x \neq y$ il existe $U \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{V}(x')$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

C'est le sens de Haussdorf, voir section 1.5 du cours CD pour plus de détails

Proposition 2.1.2. *Dans un espace séparé, les singletons sont fermés. Tout sous-espace de X séparé est séparé, pour la topologie induite. Tout espace métrique est séparé.*

Démonstration. Pour $x \in X$, la propriété de séparabilité induit que $X \setminus \{x\}$ est voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert. Les deux autres propriétés sont assez immédiates. □

Définition 2.1.3. Un espace topologique K est **quasi-compact** si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue). Un espace topologique est **compact** s'il est à la fois quasi-compact et séparé. Une partie K d'un espace topologique X est **quasi-compacte** si elle est quasi-compacte pour la topologie induite. En particulier pour toute famille $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'ouverts de X telle que $K \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ il existe une partie finie $A \subset \Lambda$ telle que $K \subset \cup_{\lambda \in A} U_\lambda$

Remarque 2.1.4. *La propriété de Borel-Lebesgue peut s'exprimer aussi à l'aide de fermés. X est quasi-compact si et seulement si, pour toute famille $\mathcal{F}$ de fermés de X si $\cap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ il existe une sous-famille finie $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ tel que $\cap_{F \in \mathcal{G}} F = \emptyset$.*

Proposition 2.1.5. *Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie métrique les compacts sont les fermés bornés.*

Ex 2.1.4 du cours CD

2.2 Propriétés fondamentales

Proposition 2.2.1. *Soient X, Y espaces topologiques*

1. *X quasi-compact, $A \subset X$ fermé $\Rightarrow$ A quasi-compact. X compact, $A \subset X$ fermé $\Rightarrow$ A compact.*
2. *X séparé, $K \subset X$ quasi-compact $\Rightarrow$ K fermé*
3. *$f : X \to Y$ continue, $K \subset X$ quasi-compact $\Rightarrow$ $f(K)$ quasi-compact.*
4. *$f : X \to Y$ continue, X compact, Y séparé alors $f(X)$ est une partie compacte de Y.*

Démonstration. Les propriétés 1) et 2) ont été démontrées dans Théorème 2.1.6 du cours CD. Pour 3): on considère $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'ouverts de Y telle que $f(K) \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. On a alors

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(\cup_\lambda U_\lambda) = \cup_\lambda f^{-1}(U_\lambda)$$

Comme K est quasi-compact, il existe une famille finie $A \subset \Lambda$ tel que $K \subset \cup_{\lambda\in A} f^{-1}(U_\lambda) = f^{-1}(\cup_{\lambda\in A} U_\lambda)$. En particulier

$$f(K) \subset f(f^{-1}(\cup_{\lambda\in A} U_\lambda)) \subset \cup_{\lambda\in A} U_\lambda.$$

Voir aussi Théorème 2.1.9 du cours CD □

Le corollaire suivant est un outil fondamental pour montrer qu'une application continue, bijective est un homéomorphisme. (voir Théorème 2.1.10 du cours CD)

Corollaire 2.2.2. *$f : X \to Y$ continue, bijective, X quasi-compact et Y séparé alors f est un homéomorphisme.*

Enfin le lemme de Lebesgue est un outil fondamental dont on se servira tout au long du cours.
(voir Théorème 2.3.2 du cours CD)

Théorème 2.2.3. *Soit (X, d) un espace métrique, compact. Soit $\{O_i, i \in I\}$ une famille d'ouverts de X qui recouvre X. Il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$ il existe $i_x \in I$ tel que $B(x, r) \subset O_{i_x}$. On dit que r est le (un)* **nombre de Lebesgue** *du recouvrement $\{O_i, i \in I\}$.*

2.3 Espaces localement compacts

Définition 2.3.1. Un espace topologique X est **localement (quasi)-compact**, si tout point $x \in X$ admet un voisinage quasi-compact.

Proposition 2.3.2. *Un espace topologique X séparé est localement (quasi)-compact si et seulement si il admet une base de voisinages compacts.*

Démonstration. Voir Lemme 2.4.3 du cours CD. □

Exercice. Tout espace localement compact séparé est compact. le produit fini d'espaces localement compact est compact. Si X est localement compact et $Y \subset X$ alors Y est localement compact ssi il existe F_1, F_2 deux fermés de X tels que $Y = F_1 \setminus F_2$. En particulier tout ouvert (resp. fermé) d'un espace localement compact est localement compact.

3 Topologie engendrée, topologie produit

Voir aussi section 1.6 du cours CD

3.1 Topologie engendrée, topologie initiale

Définition 3.1.1. Soit X un ensemble et $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$. La **topologie engendrée par** Σ est la topologie sur X la moins fine contenant Σ.

Remarque 3.1.2. La topologie engendrée par Σ est l'intersection de toutes les topologies contant Σ. U est ouvert dans la topologie engendrée par Σ si et seulement si il existe un ensemble I et un ensemble fini J et des éléments $X_{ij} \in \Sigma, i \in I, j \in J$ tels que $U = \cup_{i \in I} \cap_{j \in J} X_{ij}$.

Définition 3.1.3. Soient X un ensemble, $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ une famille d'applications. La **topologie engendrée par la famille** $(f_i)_{i \in I}$ **sur** X est la topologie engendrée par $\Sigma = \{f_i^{-1}(U) | i \in I, U \in \mathcal{O}_i\}$. On l'appelle aussi topologie initiale sur X.

Proposition 3.1.4. *La topologie engendrée par la famille des applications $f_i : X \to Y_i$ est la topologie la moins fine rendant toutes les applications f_i continues. $g : Z \to X$ est continue si et seulement si $f_i g : Z \to Y_i$ est continue pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ une topologie sur X telle que pour tout $i \in I$ l'application $f_i : X \to Y_i$ est continue. Pour tout $U \in Y_i$ on a donc $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}$. Donc $\Sigma = \{f_i^{-1}(U) | i \in I, U \in \mathcal{O}_i\} \subset \mathcal{O}$. Si g est continue alors $f_i g$ est continue par composition. Réciproquement supposons que pour tout i on a $f_i g : Z \to Y_i$ est continue. Soit U un ouvert de X. Si $U = f_i^{-1}(V)$ pour V ouvert de Y_i alors $g^{-1}(U) = (f_i g)^{-1}(V)$ est un ouvert de Z. Mais tout ouvert de X est de la forme $U = \cup_{i \in I} \cap_{j \in J} X_{ij}$ avec $X_{ij} \in \Sigma$ donc $g^{-1}(U) = \cup_i \cap_j g^{-1}(X_{ij})$ est un ouvert de Z. □

3.2 Application: topologie produit

Définition 3.2.1. Soient $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'espace topologique. Soit $X = \prod X_i$ et $\pi_i : X \to X_i$ la projection canonique. La **topologie produit** sur X est la topologie engendrée par les projections.

Remarque 3.2.2. Une base pour la topologie produit est donc donnée par $\prod_i U_i$ avec $U_i \in \mathcal{O}_i$ et $U_i = X_i$ sauf pour $i \in J$ avec $J \subset I$ un sous-ensemble fini. (voir Def 1.6.5 du cours CD).

Proposition 3.2.3. *Le produit de deux espaces quasi-compacts (séparés) est quasi-compact (séparé).*

Remarque 3.2.4. Le fait que le produit quelconque d'espaces quasi-compact est quasi-compact est le théorème de Tychonoff.

3.3 Topologie finale

Définition 3.3.1. Soient Y un ensemble, $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ une famille d'applications. La **topologie finale engendrée par la famille** $(f_i)_{i \in I}$ **sur** Y est la topologie la plus fine rendant toutes les applications f_i continue.

Proposition 3.3.2. *La topologie finale $\mathcal{O}_Y$ engendrée par la famille des applications $f_i : X_i \to Y$ est l'ensemble $\mathcal{O}_Y = \{U \subset Y, \forall i \in I, f_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i\}$. De plus: $g : Y \to Z$ est continue si et seulement si $g f_i : X_i \to Z$ est continue pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{P}(Y)$ tel que pour tout $i \in I$, $f_i^{-1}(U)$ est un ouvert de X_i. Comme $\mathcal{O} = \{\emptyset, U, Y\}$ est une topologie sur Y on en déduit que toutes les applications $f_i : X_i \to (Y, \mathcal{O})$ sont continues. Par définition de $\mathcal{O}_Y$ on a $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_Y$ donc $U \in \mathcal{O}_Y$. On vérifie aisément que $\mathcal{O}_Y$ est bien une topologie.

Si g est continue alors gf_i est continue par composition. Réciproquement supposons que pour tout i on a $gf_i : X_i \to Z$ est continue. Soit U un ouvert de Z. Si $(gf_i)^{-1}(U) = f_i^{-1}(g^{-1}(U))$ est un ouvert de X_i, par définition de la topologie finale, on en déduit que $g^{-1}(U)$ est un ouvert de Y. Donc g est continue. □

Remarque 3.3.3. *Ainsi la topologie finale est plus aisée à manipuler que la topologie initiale, car on a accès directement aux ouverts (il n'y a pas besoin de prendre une topologie engendrée par....).*

Exemple 3.3.4. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques. L'union disjointe des ensembles X et Y notée $X \sqcup Y$, est muni de la topologie finale engendrée par les inclusions $X \to X \sqcup Y$ et $Y \to X \sqcup Y$. Ainsi les ouverts de $X \sqcup Y$ sont de la forme $U \sqcup V$ avec U ouvert de X et V ouvert de Y.

4 Topologie quotient

4.1 Définitions

Définition 4.1.1. Soit X un espace topologique, Y un ensemble et $q : X \to Y$ une application surjective. La **topologie quotient sur** Y, est la topologie finale par rapport à q: les ouverts de Y sont les parties U de Y telles que $q^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

Exemple 4.1.2. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X on munit l'ensemble $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. Si $A \subset X$ est une partie de X, on note X/A l'espace quotient obtenu par la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x = y$ ou $x, y \in A$.

4.2 Espaces quotients séparés

Définition 4.2.1. Le **graphe d'une relation d'équivalence** $\mathcal{R}$ **sur** X est le sous-ensemble de $X \times X$ défini par $\Gamma_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in X \times X | \; x\mathcal{R}y\}$.

On énonce ici des propriétés de l'exercice 2, feuille de tD0

Proposition 4.2.2. *Si $X/\mathcal{R}$ est séparé alors $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$.*
Si $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$ et $q : X \to X/\mathcal{R}$ est ouverte alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.

Proposition 4.2.3. *X séparé et A compact $\Rightarrow X/A$ séparé.*

Démonstration. Si $x \in X \setminus A$ alors $\mathcal{R}x = \{x\}$ est compact. Si $x \in A$ alors $\mathcal{R}x = A$ est compact. Si F est fermé dans X et $F \cap A = \emptyset$ alors $\mathcal{R}F = F$ est donc fermé. Et si $F \cap A \neq \emptyset$ alors $\mathcal{R}F = F \cup A$ est aussi fermé. La proposition précédente implique que X/A est séparé. □

5 Connexité et connexité par arcs

Voir section 4 du cours CD

5.1 Connexité

Définition 5.1.1. Soit X un espace topologique. On dit que X est **connexe** si l'une ou l'autre de ces propositions équivalentes est vérifiée:

1. Les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X.
2. Il n'existe pas de partition $X = U \cup V$ avec U, V ouverts non vides.
3. Il n'existe pas de partition $X = U \cup V$ avec U, V fermés non vides.
4. Toute application continue $f : X \to Y$ avec Y espace discret est constante.
5. Toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète est constante.

Soit $A \subset X$ une partie d'un espace topologique. On dit que A est connexe si A est connexe pour la topologie induite.

Définition 5.1.2. Soit X un espace topologique et $x \in X$. La composante connexe de x est le plus grand connexe qui contient x. Un espace est **totalement discontinu** si toutes ses composantes connexes sont des singletons.

Remarque 5.1.3. Pour démontrer l'existence de "la" composante connexe, on introduit une relation d'équivalence sur X. On dit que $x \sim y$ s'il existe un connexe $C \subset X$ contenant à la fois x et y. On vérifie que la relation est réflexive ($\{x\}$ est un espace connexe), symétrique et transitive (voir 2) de la proposition ci-dessous). Posons $C_x = \{y \in X | y \sim x\}$ et montrons que $C_x = \cup_{x \in C} C$ avec C connexe. En effet si C est connexe contenant x alors $C \subset C_x$. De plus si $y \in C_x$ alors il existe C connexe qui contient à la fois x et y. Donc C_x est connexe (par 2) de la proposition ci-dessous) et c'est le plus grand qui contient x.

Proposition 5.1.4. *1. L'image d'un connexe par une application continue est connexe.*

2. Une union de connexe dont l'intersection deux à deux est non vide est connexe.

3. Soient $A, B \subset X$ tel que $A \subset B \subset \overline{A}$. Si A est connexe alors B est connexe.

4. Les composantes connexes sont fermées dans X et forment une partition de X.

Démonstration. exo $\square$

Exemple d'un espace dont les composantes connexes ne sont pas ouvertes: $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}$.

5.2 Locale connexité

Voir aussi Exo1, feuille TD0

Définition 5.2.1. Un espace X est **localement connexe** si tout $x \in X$ admet une base $\mathcal{B}_x$ de voisinages connexes: $\mathcal{B}_x \in \mathcal{V}(x)$, $\forall U \in \mathcal{B}_x$, U est connexe et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $U \in \mathcal{B}_x$, $U \subset V$.

Proposition 5.2.2. *X est localement connexe si et seulement si toute composante connexe d'un ouvert U de X est un ouvert de X.*

Démonstration. Supposons que X est localement connexe. Fixons U un ouvert de X, B une composante connexe de U et $x \in B$. Il existe un voisinage connexe V_x de X contenu dans U. Donc $V_x \subset B$, ce qui implique que B est voisinage de chacun de ses points.

Réciproquement, sous l'hypothèse que toute composante connexe d'un ouvert U de X est un ouvert de X, montrons que X est localement connexe. Fixons $x \in X$ et $V \in \mathcal{V}(x)$. Il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$. On décompose U en composantes connexes (ouvertes par hypothèse), donc il existe un connexe ouvert tel que $x \in U_x \subset U \subset V$. Ce qui nous fournit une base d'ouverts connexes de voisinage de x. □

5.3 Connexité par arcs

Définition 5.3.1. Un **chemin de** X est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$. Un chemin de X reliant x à y est un chemin γ tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. On dit que X est connexe par arcs si pour tous $x, y \in X$, il existe un chemin de X reliant x à y.

Proposition 5.3.2. *Si X est connexe par arcs alors X est connexe.*

Démonstration. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une application continue $f : X \to \{0,1\}$ non constante; donc il existe $x, y \in X$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. Comme X est connexe par arcs, il existe $\gamma : [0,1] \to X$ continue avec $\gamma(0) = x; \gamma(1) = y$. Ceci implique que $f \circ \gamma$ est non constante, or $[0,1]$ est connexe. C'est absurde. □

Proposition 5.3.3. *La relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe un chemin de X reliant x à y est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées composantes connexes par arcs de X. La composante connexe par arcs contenant x est le plus grand connexe par arcs de X qui contient x.*

La dem sera vu en cours