ENS-DMA | 18 mars 2025

Année universitaire 2024-2025 | Durée : 2 heures

Partiel de topologie algébrique

documents autorisés :une feuille A4 recto-verso manuscrite

Notation du sujet.

— *Soit X un espace topologique et $x \in X$. $\mathcal{V}(x)$ désigne l'ensemble des voisinages de x.*

— *Une base $\mathcal{B}$ pour (la topologie de) X est un ensemble d'ouverts tels que pour tout $x \in X$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $U \in \mathcal{V}(x)$ et $U \subset V$.*

— *On dit qu'un espace topologique est localement connexe par arcs, si X admet une base d'ouverts connexes par arcs.*

— *Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues et $A \subset X$. On note $f \simeq_A g$ si f est homotope à g relativement à A.*

— *I désigne l'intervalle $[0,1]$ et $\partial I = \{0,1\}$ son bord.*

— *On dit qu'un morphisme de groupes $\varphi : G \to H$ est trivial si pour tout $g \in G$ on a $\varphi(g) = e_H$.*

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (localement petite). On considère le diagramme suivant dans $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "v_1"'] & B_1 \arrow[d, "w_1"] \\ A_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "v_2"'] & B_2 \arrow[d, "w_2"] \\ A_3 \arrow[r, "h_3"] & B_3 \end{tikzcd}$$

On suppose que le diagramme du bas (A_2, A_3, B_2, B_3) est cartésien, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété universelle suivante : pour tous $\alpha_3 : X \to A_3$ et $\beta_2 : X \to B_2$ morphismes dans $\mathcal{C}$ vérifiant $h_3 \circ \alpha_3 = w_2 \circ \beta_2$, il existe un unique morphisme $\alpha_2 : X \to A_2$ tel que $v_2 \circ \alpha_2 = \alpha_3$ et $h_2 \circ \alpha_2 = \beta_2$.

Montrer que le diagramme du haut (A_1, A_2, B_1, B_2) est cartésien si et seulement si la diagramme total (A_1, A_3, B_1, B_3) est cartésien.

Exercice 2. Dans cet exercice l'espace topologique $\mathbb{S}^1$ est vu comme l'ensemble des nombres complexes z de module 1. On note p_0 le complexe $p_0 = 1$.
Soient $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ deux applications continues. On note $\hat{f} : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ l'application qui à t, associe $\hat{f}(t) = f(e^{2i\pi t})$.
On a vu en cours que le degré de l'application f est le degré du lacet $\gamma = \hat{f}$ et que celui-ci est obtenu en calculant $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ où $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une application continue vérifiant $e^{2i\pi\tilde{\gamma}(t)} = \gamma(t)$.

Calculer, en fonction des degrés de f et g, le degré de l'application h définie par

$$h(z) = \begin{cases} f(z^4), & \text{si } Re(z) \geq 0, \\ \frac{f(p_0)}{g(p_0)} g(z^4), & \text{si } Re(z) \leq 0. \end{cases}$$

Exercice 3. Soit B un espace topologique localement connexe par arcs et vérifiant la propriété suivante :

$$\forall b \in B,\ \exists U \in \mathcal{V}(b),\ \pi_1(U,b) \to \pi_1(B,b) \text{ est triviale.}$$

On fixe $b_0 \in B$. On pose

$$E = \{\gamma : [0,1] \to B \mid \gamma(0) = b_0\}/\simeq_{\partial I},$$

et $p\colon E \to B$ l'application qui à $[\gamma] \in E$ associe $\gamma(1)$.

1. On définit $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts U de B tels que U est connexe par arcs et tel qu'il existe $b \in U$ tel que $\pi_1(U,b) \to \pi_1(B,b)$ est triviale. Montrer que $\mathcal{U}$ est une base de la topologie de B.
2. On définit une topologie sur E comme suit. Soit $x = [\gamma] \in E$ et $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de $p(x) = \gamma(1)$. On pose

   $$U_x = \{[\gamma * \beta] \in E \mid \beta : [0,1] \to U \text{ et } \beta(0) = p(x)\}.$$

   La topologie sur E est la topologie engendrée par l'ensemble $\mathcal{W}$ de tous les U_x.
   (a) Soient $x, y \in E$. Montrer que $U_x = U_y \iff x \in U_y \iff y \in U_x$.
   (b) Soient U_x et V_y dans $\mathcal{W}$. Soit $z \in U_x \cap V_y$. Montrer qu'il existe $W_z \in \mathcal{W}$ tel que $z \in W_z \subset U_x \cap V_y$. En déduire que $\mathcal{W}$ est une base pour la topologie engendrée par $\mathcal{W}$.
3. On s'intéresse dans cette question à l'application $p : E \to B$.
   (a) Soit $b \in B$ et $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de b. Montrer que

   $$p^{-1}(U) = \cup_{\gamma\colon [0,1]\to B, \gamma(0)=b_0, \gamma(1)=b}\ U_{[\gamma]}$$

   et que l'union est disjointe.
   (b) Montrer que p est continue et que sa restriction $p : U_{[\gamma]} \to U$ est un homéomorphisme.
   (c) Soient $f : [0,1] \to B$ et $f_0, f_1 : [0,1] \to E$ des applications continues telles que $p \circ f_0 = p \circ f_1$. En utilisant la question précédente, montrer que

   $$\{x \in [0,1] \mid f_0(x) = f_1(x)\}$$

   est ouvert et fermé dans $[0,1]$. En déduire que s'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f_0(x) = f_1(x)$ alors pour tout $x \in [0,1]$ on a $f_0(x) = f_1(x)$.
4. On fixe $\gamma : [0,1] \to B$ un chemin avec $\gamma(0) = b_0$. On admet dans un premier temps que l'application

   $$F_\gamma\colon \quad \begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow E \\ s &\longmapsto [\gamma_s] = [t \mapsto \gamma(st)]. \end{aligned}$$

   est continue.
   (a) Montrer que E est connexe par arcs.
   (b) Montrer que l'application $p_* : \pi_1(E, [c_{b_0}]) \to \pi_1(B, b_0)$ (induite par $p : E \to B$) est triviale.
5. Montrer que F_γ est continue.