CW-complexes

On résume ici les notions vues dans la partie CW-complexe.

1 Le langage des catégories

1.1 Catégories et foncteurs

Définition 1.1.1. Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est la donnée:

1. D'une classe d'objet notée $Ob(\mathcal{C})$
2. Pour tous $c, c' \in Ob(\mathcal{C})$, d'une classe de morphismes (ou flèches) notée $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$
3. Pour tout $c \in Ob(\mathcal{C})$, d'un élément noté $\mathrm{id}_c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c)$.

et d'opérations dites de composition, pour tous $c, c', c'' \in Ob(\mathcal{C})$

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c', c'') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c'')$$

vérifiant pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c', c''), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d, c)$:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h);\ \mathrm{id}_{c''} \circ f = f;\ f \circ \mathrm{id}_{c'} = f.$$

Définition 1.1.2. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Un foncteur (covariant) de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, noté $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est la donnée

1. Pour tout $c \in Ob(\mathcal{C})$, d'un objet, noté $F(c) \in Ob(\mathcal{C}')$.
2. Pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$, d'un morphisme noté $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(c), F(c')$

vérifiant les conditions suivantes: pour tout $c \in Ob(\mathcal{C})$, pour tous $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c', c'')$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$:

- $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}$
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

On définit la catégorie **Ens** (ensembles et applications), **Top** (espaces topologiques et applications continues), on pourra considérer la catégorie $\mathbf{Top}_*$ (espaces topologiques pointés et applications continues pointées), **Gp** (groupes et morphismes de groupes), **Ab** (groupes abéliens et morphismes de groupes).

On verra des invariants comme des foncteurs. Exemple: l'ensemble des composantes connexes par arcs définit un foncteur $\pi_0 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$, le groupe fondamental définit un foncteur $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Gp}$, le i-ième groupe d'homologie définit un foncteur $H_i : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$.

Définition 1.1.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$ est un **isomorphisme** s'il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c', c)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_c$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{c'}$.

Par exemple dans **Ens** les isomorphismes sont les bijections, dans **Top** les isomorphismes sont les homéomorphismes, dans **Gp** les isomorphismes sont les isomorphismes de groupes.

Définition 1.1.4. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ deux foncteurs. Une **transformation naturelle** τ de F à G (notée $\tau : F \Rightarrow G$) est la donnée, pour tout $c \in Ob(\mathcal{C})$, d'une flèche $\tau_c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(c), G(c))$ telle que, pour toute flèche $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(c) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(c') \arrow[r, "\tau_{c'}"] & G(c') \end{tikzcd}$$

Autrement dit $G(f) \circ \tau_c = \tau_{c'} \circ F(f)$.

Définition 1.1.5. Une catégorie $\mathcal{C}$ est **localement petite** si pour tous $c, c' \in Ob(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$ est un ensemble. On dit que $\mathcal{C}$ est **petite** si elle est localement petite et $Ob(\mathcal{C})$ est un ensemble.

Toutes les catégories que nous considérerons dans ce cours sont localement petites, mais en général pas petites.

1.2 Notions de limites et colimites dans une catégorie

On se donne $F : I \to \mathcal{C}$ un foncteur où I est une petite catégorie, et F s'appelle un **diagramme dans** $\mathcal{C}$.

On considérera principalement, pour I, les catégories suivantes

1. La catégorie discrète $\{1\}, \{2\}$ (deux objets, les seuls morphismes sont les identités).
2. La catégorie ayant trois objets $\{0\}, \{1\}, \{2\}$ et les seuls morphismes non triviaux ($\neq id$) sont $0 \to 1$ et $0 \to 2$. Un foncteur de cette catégorie dans $\mathcal{C}$ consiste en la donnée d'un diagramme dans $\mathcal{C}$ de type

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A_1 \\ A_2 & \end{tikzcd}$$

3. La catégorie $\mathbb{N}$ où les objets sont en bijection avec $\mathbb{N}$ et

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{N}}(i, j) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } i \leq j \\ \emptyset & \text{sinon .} \end{cases}$$

   Un foncteur de cette catégorie dans $\mathcal{C}$ consiste en la donnée d'une famille d'objets $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de morphismes $\varphi_n : X_n \to X_{n+1}, n \geq 0$.

Définition 1.2.1. Une **colimite** de F est un **cocone**, c'est-à-dire, la donnée d'un objet c de $\mathcal{C}$ et, pour tout $i \in Ob(I)$, d'un morphisme $\alpha_i : F(i) \to c$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), c)$, vérifiant:

$$\forall f \in \mathrm{Hom}_I(i, j),\ \ \alpha_j \circ F(f) = \alpha_i,$$

universel: si (d, β_i) est un autre cocone, alors il existe un unique morphisme $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ tel que pour tout $i \in I$, $g \circ \alpha_i = \beta_i$. On note alors $c = \mathrm{colim}_I F$.

Proposition 1.2.2. *Si* $\mathrm{colim}_I F$ *existe alors elle est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Supposons que l'on ait deux colimites (c, α) et (c', α'). Par universalité de (c, α) il existe un unique morphisme $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$ tel que pour tout $i \in I$, $g \circ \alpha_i = \alpha'_i$. Par universalité de (c', α') il existe un unique morphisme $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c', c)$ tel que pour tout $i \in I$, $g' \circ \alpha'_i = \alpha_i$. Donc $g \circ g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c', c')$ vérifie $(g \circ g') \circ \alpha'_i = \alpha'_i$ pour tout i. Or (c', α'_i) étant un cocone universel, il n'y a qu'un seul morphisme qui vérifie ces conditions, c'est $\mathrm{id}_{c'}$. On en déduit $g \circ g' = \mathrm{id}_{c'}$ et par symétrie $g' \circ g = \mathrm{id}_c$. Donc g est un isomorphisme et (c, φ) et (c', φ') sont isomorphes. □

Définition 1.2.3. La colimite pour un diagramme de type (1) s'appelle **coproduit** ou **somme**, pour un diagramme de type (2) on parle de **pushout** ou **somme amalgamée**. Un diagramme dans $\mathcal{C}$ de type

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A_1 \arrow[d] \\ A_2 \arrow[r] & C \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

où C est la somme amalgamée de A_1 et A_2 au-dessus de A_0 s'appelle un **carré cocartésien**.

Exemple 1.2.4. Dans **Ens** les colimites $\mathrm{colim}_I\, F$ existent pour I de type (1). Pour A_1, A_2 deux ensembles on note $A_1 \sqcup A_2$ l'union disjointe de ces deux ensembles. Cette union disjointe peut-être décrite comme le sous ensemble de $(A_1 \cup A_2) \times \{1, 2\}$ constitué des couples $(a, 1)$, pour $a \in A_1$ et $(b, 2)$ pour $b \in A_2$. L'application $i_j : A_j \to A_1 \sqcup A_2$ qui à a associe (a, j), permet de définir un cocone pour F. On a alors: pour tout X ensemble et $\beta_j : A_j \to X$ deux applications, il existe une unique application $g : A_1 \sqcup A_2 \to X$ telle que $g \circ i_1 = f_1$ et $g \circ i_2 = f_2$. Pour construire g, on n'a pas le choix:

$$g(a, 1) = f_1(a), a \in A_1,\ \ g(b, 2) = f_2(b), b \in A_2,$$

ce qui prouve l'existence et l'unicité de g et montre que $A_1 \sqcup A_2$ vérifie la propriété universelle.

Dans **Ens** les colimites $\mathrm{colim}_I\, F$ existent pour I de type (2). Considérons un diagramme de type

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A_1 \\ A_2 & \end{tikzcd}$$

Notons $C = A_1 \sqcup A_2 / \mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(f(a), 1)\mathcal{R}(f(a), 2)$ pour tout $a \in A_0$. On note $\varphi_i : A_i \to C$ l'application qui à $a \in A_i$ associe la classe de (a, i) dans C. Montrons que (C, φ) est la colimite du diagramme. Il est clair que $\varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ g$. Donc (C, φ) est un cocone. Soit X un ensemble et $h_i : A_i \to X$ deux applications vérifiant $h_1 \circ f = h_2 \circ g$. Par propriété universelle du coproduit (union disjointe), il existe une unique application $\psi : A_1 \sqcup A_2 \to C$ telle que $\psi \circ i_j = h_j$, pour $j \in \{1, 2\}$. Plus précisément $\psi(a, 1) = h_1(a)$ et $\psi(b, 2) = h_2(b)$. En particulier, pour tout $a \in A_0$, on a $\psi(f(a), 1) = h_1(f(a)) = h_2(g(a)) = \psi(g(a), 2)$. Donc ψ passe au quotient par la relation $\mathcal{R}$ et il existe une unique application $\overline{\psi} : C \to X$ telle que $\overline{\psi} \circ \varphi_j = h_j$. Conclusion: (C, φ) est la colimite du diagramme.

Dans **Ens** les colimites $\mathrm{colim}_I\, F$ existent pour I de type (3): dans ce cas là si les $\varphi_n : X_n, \to X_{n+1}$ sont des inclusions d'ensemble on parle de (co)limite inductive, et la colimite est $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. De manière générale toutes les colimites existent dans **Ens**.

Définition 1.2.5. Une **limite** de F est un **cone**, c'est-à-dire, la donnée d'un objet c de $\mathcal{C}$ et, pour tout $i \in Ob(I)$, d'un morphisme $\beta_i : c \to F(i)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, F(i))$, vérifiant: $\forall f : i \to j$ morphisme de I, $F(f) \circ \beta_j = \beta_i$, **universel**: si (c', β'_i) est un autre cone, alors il existe un unique morphisme $g : c' \to c$ tel que pour tout $i \in I$, $\beta_i \circ g = \beta'_i$. On note alors $c = \lim_I F$.

Proposition 1.2.6. *Si* $\lim_I F$ *existe alors elle est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Même démonstration que pour les colimites □

Définition 1.2.7. La limite pour un diagramme de type (1) s'appelle **produit**, pour un diagramme de type

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[d, "f"] \\ B_2 \arrow[r, "g"'] & B_0 \end{tikzcd}$$

on parle de **pullback** ou **produit fibré**.

Exemple 1.2.8. Dans **Ens** les limites $\lim_I F$ existent pour I de type (1) (c'est le produit de deux ensembles). Le produit fibré du diagramme ci-dessus est

$$B_1 \times_{B_0} B_2 = \{(a, b) | a \in B_1, b \in B_2 \text{ et } f(a) = g(b)\}$$

2 Colimites dans la catégorie Top

On utilisera les notations suivantes: $\mathbb{D}^n$ ou $\mathbb{B}^n$ sera la boule fermée de dimension n dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ la sphère unité. On rappelle que $\mathbb{D}^n$ est homéomorphe au cube $I^n = [0, 1]^n$ de dimension n.

2.1 Topologie finale par rapport à une famille

On rappelle les notions de topologie finale (voir résumé topologie générale).

Exemple 2.1.1. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X on munit l'ensemble $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient (finale par rapport à l'application quotient $q : X \to X/\mathcal{R}$).
Par exemple si $f : X \to Y$ est continue surjective, on définit la relation $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$ alors f se factorise en $f = \tilde{f} \circ q$ et $\tilde{f}$ est continue et bijective. Mais ce n'est pas nécessairement un homéomorphisme. Y peut être muni d'une topologie moins fine que la topologie quotient $X/\mathcal{R}$.
Si $A \subset X$ on note X/A l'espace topologique $X/\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient avec

$$x\mathcal{R}y \iff x = y \text{ ou } x, y \in A.$$

On note $q : X \to X/A$. On a, pour tout $U \subset X$

$$q^{-1}(q(U)) = \begin{cases} U, & \text{si } U \cap A = \emptyset, \\ U \cup A, & \text{si } U \cap A \neq \emptyset. \end{cases}$$

En particulier, si A est fermé (resp ouvert) alors $q : X \to X/A$ est fermée (resp. ouverte).

Proposition 2.1.2. *Les colimites ci-dessus existent dans* **Top** *et sont obtenues à l'aide des colimites dans les ensembles, munis de la topologie finale. En particulier le coproduit* $X \sqcup Y$ *de deux espaces topologiques* X *et* Y *est l'ensemble* $X \sqcup Y$ *muni de la topologie finale par rapport aux inclusions: les ouverts de* $X \sqcup Y$ *sont de la forme* $U \sqcup V$ *avec* U *ouvert de* X *et* V *ouvert de* Y.

On s'intéressera par la suite à la colimite dans **Top** d'un diagramme de type 2. Avec les notations de l'exemple 1.2.4, pour A_0, A_1 et A_2 des espaces topologiques, l'ensemble $C = A_1 \sqcup A_2/\mathcal{R}$ est muni de la topologie finale par rapport aux applications φ_i (donc qui sont continues). Il reste à montrer que c'est la colimite dans **Top** du diagramme. En suivant ce qui a été fait dans l'exemple 1.2.4, on a bien (C, φ) est un cocone. Soit X un espace topologique et $h_i : A_i \to X$ deux applications continues vérifiant $h_1 \circ f = h_2 \circ g$. On a vu qu'il existe une unique application d'ensemble $\overline{\psi} : C \to X$ telle que $\overline{\psi} \circ \varphi_j = h_j$. L'application $\overline{\psi}$ est une application continue, par caractérisation de la topologie finale, puisque pour $j \in \{1, 2\}$, on a $\overline{\psi} \circ \varphi_j = h_j$ est continue. Conclusion: (C, φ) est la colimite du diagramme dans **Top**.

Globalement, fin du cours du mardi 4 février 2025. On a aussi vu la définition 2.2.8

Lemme 2.1.3. *Considérons le diagramme suivant dans une catégorie $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & E \arrow[d, "w"] \\ C \arrow[r, "h"'] & D \arrow[r, "k"'] & F \end{tikzcd}$$

Si les carrés intérieurs sont cocartésiens, alors il en est de même du carré extérieur.

Démonstration. Fixons $\alpha : E \to Z$ et $\beta : C \to Z$ deux morphismes dans $\mathcal{C}$ tels que que $\alpha \circ g \circ f = \beta \circ u$. Come le carré de gauche est cocartésien, il existe un unique morphisme dans $\mathcal{C}$ $\gamma : D \to Z$ tel que $\gamma \circ h = \beta$ et $\gamma \circ v = \alpha \circ g$. Comme le carré de droite est cocartésien, il existe un unique morphisme dans $\mathcal{C}$, $\gamma' : F \to Z$ tel que $\gamma' \circ k = \gamma$ et $\gamma' \circ w = \alpha$. On a alors $\gamma' \circ k \circ h = \gamma \circ h = \beta$ et $\gamma' \circ w = \alpha$, et c'est l'unique morphisme de $\mathcal{C}$ vérifiant cela. $\square$

2.2 Cas particulier: recollement d'espaces topologiques, adjonctions cellulaires, bouquets

Soient X, Y des espaces topologiques et $A \subset Y$, muni de la topologie induite. On considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

On a vu que la colimite dans **Top** de ce diagramme existe, elle est notée $X \cup_\varphi Y$, et s'appelle pushout ou recollement le long de φ. On a alors le carré cocartésien suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"'] & X \arrow[d, "j_X"] \\ Y \arrow[r, "\phi"] & X \cup_\varphi Y \end{tikzcd}$$

L'application ϕ s'appelle le **morphisme caractéristique du recollement**.

Proposition 2.2.1. *Dans $X \sqcup Y$ les classes des éléments pour la relation d'équivalence engendrée par $a\mathcal{R}\varphi(a)$, pour tout $a \in A$ sont de la forme:*

$$\mathrm{cl}(x) = \{x\} \sqcup \varphi^{-1}(x), x \in X;\ \mathrm{cl}(y) = \{y\}, y \in Y \setminus A;\ \mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(\varphi(a)), a \in A$$

Ainsi, on a une bijection entre $X\cup_\varphi Y$ et $X\sqcup(Y\setminus A)$. La projection canonique $q : X\sqcup Y \to X\cup_\varphi Y$ vérifie $q(x) = x, \forall x \in X$, $q(a) = \varphi(a), \forall a \in A$ et $q(y) = y, \forall y \in Y \setminus A$.
De plus, si A est fermé dans Y alors

- *j_X réalise un homéomorphisme de X sur son image*
- *ϕ restreint à $Y \setminus A$ réalise un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. On note $i_X : X \to X \sqcup Y$ l'injection canonique, qui est ouverte et fermée. On a $j_X = q\circ i_X$ est continue et injective, donc bijective sur son image. Montrons que si A est fermée dans Y alors j_X est fermée. Soit W un fermé de X. On a $i_X(W) = W = W \sqcup \emptyset$ est fermé dans $X \sqcup Y$. Montrons que $j_X(W) = q(W)$ est fermé dans $X \cup_\varphi Y$. Or $q^{-1}(q(W)) = W \sqcup \varphi^{-1}(W)$ et $\varphi^{-1}(W)$ est fermé dans A lui même fermé dans Y donc $q^{-1}(q(W))$ est fermé dans $X \sqcup Y$. Conclusion $j_X(W)$ est fermé dans $X \cup_\varphi Y$, donc j_X est fermée, d'où l'homéomorphisme.
L'application $\phi = q\circ i_Y$ restreinte à $Y\setminus A$ est continue et injective. Montrons qu'elle est ouverte. Soit U un ouvert de $Y \setminus A$. Comme A est fermé dans Y, U est donc un ouvert de Y. On a $q^{-1}(q(U)) = U \subset X\sqcup Y$ est ouvert donc $q(U) = \phi(U)$ est ouvert dans $X\cup_\varphi Y$. Donc ϕ restreinte à $Y \setminus A$ est ouverte, d'où l'homéomorphisme. □

Remarque 2.2.2. Le résultat reste valable si A est ouvert dans Y.

Définition 2.2.3. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques. Le **bouquet** $X \vee Y$ est l'espace topologique obtenu en prenant $A = \{*\}$ et les deux applications $A \to X$ et $A \to Y$ envoyant $*$ sur les points bases. Il est naturellement pointé par $\{x_0 = y_0\}$.

Proposition 2.2.4. *Le bouquet de deux espaces correspond au coproduit dans la catégorie des espaces topologiques pointés.*

Démonstration. exo □

Proposition 2.2.5. *Pour $A \subset Y$ non vide, le carré suivant est cocartésien:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\iota"'] & \{*\} \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "q"] & Y/A \end{tikzcd}$$

Proposition 2.2.6. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $A \subset X$, $B \subset Y$ des sous-espaces non vides. Les espaces $(X \sqcup Y)/(A \sqcup B)$ et $X/A \vee Y/B$ sont homéomorphes.*

Démonstration. Comme A et B sont non vide, on peut considérer les points $\{A\}$ et $\{B\}$ de X/A et Y/B respectivement. Notons $\tilde{q}$ l'application continue obtenue par composition: $X \sqcup Y \to X/A \sqcup Y/B \to X/A \vee Y/B$. Alors le diagramme suivant est cocartésien

$$\begin{tikzcd} A \sqcup B \arrow[r] \arrow[d] & \{*\} \arrow[d, "\{A\}=\{B\}"] \\ X \sqcup Y \arrow[r, "\tilde{q}"] & X/A \vee Y/B \end{tikzcd}$$

En effet si $f : X \sqcup Y \to Z$ est continue et vérifie, il existe $z_0 \in Z$ tel que pour tout $a \in A \sqcup B$, $f(a) = z_0$. Il existe une unique application continue $\tilde{f} = X/A\vee Y/B \to Z$ telle que $\tilde{f}\circ\tilde{q} = f$. □

Proposition 2.2.7. *Soit $A \subset Y$ un sous-espace non vide de Y et $\varphi : A \to X$ une application constante, alors $X \cup_\varphi Y$ est homéomorphe à $X \vee Y/A$ (où l'on a identifié le point $x_0 = \varphi(A)$ avec le point $\{A\} \in Y/A$).*

Démonstration. On considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \{*\} \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "\{A\}"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "q"'] & Y/A \arrow[r] & X \vee Y/A \end{tikzcd}$$

où la composée des applications du haut correspond à l'application constante φ. Les deux carrés intérieurs sont cocartésiens, donc le carré extérieur l'est, par le lemme 2.1.3. $\square$

Définition 2.2.8. Pour $n \geq 1$, $Y = \mathbb{D}^n$, $A = \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$ et $\varphi : A \to X$, le recollement $X \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ s'appelle **attachement cellulaire**. Comme $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n$ est fermé, la proposition 2.2.1 s'applique.

Proposition 2.2.9. *Si $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ est une application constante alors $X \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ est homéomorphe à $X \vee \mathbb{S}^n$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 2.2.7 et le résultat du TD: $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$. $\square$

3 CW-complexes

3.1 Premières définitions

Définition 3.1.1. Un **CW complexe** (ou espace cellulaire) X est un espace topologique muni de sous-espaces $X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X$ vérifiant les propriétés suivantes

1. X_0 est un ensemble de points (la topologie induite sur X_0 est discrète).
2. Pour tout $n \geq 1$, il existe un ensemble d'indices I_n et pour tout $\alpha \in I_n$ des applications $\varphi_\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1}$ tel que le diagramme suivant soit un carré cocartésien (un pushout)

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup\limits_{\alpha \in I_n} \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\bigsqcup\limits_{\alpha \in I_n} \varphi_\alpha"] \arrow[d, "\bigsqcup\limits_{\alpha \in I_n} \iota"'] & X_{n-1} \arrow[d, "i_{n-1}"] \\ \bigsqcup\limits_{\alpha \in I_n} \mathbb{D}^n \arrow[r, "\bigsqcup\limits_{\alpha \in I_n} \phi_\alpha"'] & X_n \arrow[ul, phantom, very near start, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

3. $X = \cup_n X_n$ est muni de la topologie finale: $U \in X$ est ouvert si et seulement si
$$\forall n \in \mathbb{N},\ U \cap X_n \text{ est ouvert dans } X_n$$

On dit aussi que X admet une **décomposition cellulaire**.

Vocabulaire 3.1.2. X_n s'appelle le n**-squelette de** X.
Pour $\alpha \in I_n$, l'application caractéristique $\phi_\alpha : \mathbb{D}^n \to X_n$ réalise un homéomorphisme de l'intérieur de $\mathbb{D}^n$ sur son image, notée e^n_α (ou e_α) et appelée **cellule de** X **de dimension** n. Les cellules de dimension 0 sont les points de X_0. Si X possède un nombre fini de cellules on dit que X est un **CW-complexe fini**.
S'il existe N tel que $\forall n \geq N, X_n = X_N$ (de manière équivalente $I_n = \emptyset$) on dit que X est un **CW-complexe de dimension finie** et sa dimension est l'inf des N qui vérifie cette propriété. Dans le cas contraire, on dit qu'il est de **dimension infinie**.
Un **graphe** est un CW-complexe de dimension 1.

Remarque 3.1.3. En tant qu'ensemble, on a des bijections $X_n \bigsqcup_{\alpha\in I_{n+1}} e_\alpha^{n+1} \to X_{n+1}$ et $X_0 \bigsqcup_{n\geq 1} \bigsqcup_{\alpha\in I_n} e_\alpha^n \to X$.

Exemple 3.1.4. On a vu en cours différentes décompositions cellulaires de $\mathbb{S}^n$.

3.2 Propriétés topologiques des CW-complexes

On suppose ici que X est muni d'une structure de CW complexe. On note I_n l'ensemble des indices de ses n-cellules et X_n son n-squelette.

Proposition 3.2.1. *On a un homéomorphisme*

$$X_{n+1}/X_n \cong \bigvee_{\alpha\in I_{n+1}} \mathbb{S}^{n+1}.$$

(si $I_{n+1} = \emptyset$ on a $X_{n+1} = X_n$).

Démonstration. On a deux carrés cocartésiens dans **Top**

$$\begin{tikzcd}
\sqcup_{\alpha\in I_n}\mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\sqcup_{\alpha\in I_n}\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\iota"'] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{X_{n-1}}"] & \{*\} \arrow[d] \\
\sqcup_{\alpha\in I_n}\mathbb{D}^{n-1} \arrow[r] & X_n \arrow[r] & X_n/X_{n-1}
\end{tikzcd}$$

donc d'après le lemme 2.1.3 le carré extérieur est cocartésien, donc X_n/X_{n-1} est homéomorphe à $\sqcup_\alpha \mathbb{D}_n/(\sqcup_\alpha \mathbb{S}^{n-1})$ lui-même homéomorphe à $\vee_{\alpha\in I_n}\mathbb{S}^n$, en itérant la proposition 2.2.6 ☐

Proposition 3.2.2. *X_n est fermé dans X_{n+1} et X_n est fermé dans X.*

Démonstration. On sait que $i_n : X_n \to X_{n+1}$ est une application continue, injective et induit un homéomorphisme sur son image. Il en est de même pour l'application $\sqcup\Phi_i : \sqcup_{i\in I_{n+1}} \mathring{\mathbb{D}}_i^{n+1} \to X_{n+1}$. Notons $q : X_n \sqcup \sqcup_{i\in I_{n+1}}\mathbb{D}^{n+1} \to X_{n+1}$. Soit $x \in X_{n+1} \setminus X_n$. Il existe $i \in I_{n+1}$ tel que $q^{-1}(x) \in \mathring{\mathbb{D}}_i^{n+1}$. Donc il existe un ouvert de U de $\mathring{\mathbb{D}}_i^{n+1}$ (et donc de $X_n \sqcup \sqcup_{i\in I_{n+1}}\mathbb{D}_i^{n+1}$) tel que $q^{-1}(x) \in U$. Ainsi $x \in q(U) \subset X_{n+1} \setminus X_n$. Or $q^{-1}(q(U)) = U$ donc $q(U)$ est ouvert dans X_{n+1}, voisinage de x dans $X_{n+1} \setminus X_n$. Conclusion: X_n est fermé dans X_{n+1}. Et par induction on a X_n est fermé dans X_m pour tout $m \geq n$. Par ailleurs, pour $m < n$ on a $X_n \cap X_m = X_m$ est fermé dans X_m. Ainsi pour tout $m \geq 0$, $X_n \cap X_m$ est fermé dans X_m donc X_n est fermé dans X. ☐

Proposition 3.2.3. *Soit $K \subset X$ un quasi-compact. Alors K intersecte un nombre fini de cellules de X.*

Démonstration revue le 17 février 2025

Démonstration. Notons $J = \{\alpha \in I | e_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$ et $J_n = J \cap I_n$. Pour chaque $j \in J$ on choisit $x_\alpha \in e_\alpha \cap K$ et on note $Y = \{x_\alpha, \alpha \in J\} \subset X$ et $Y_n = \{x_\alpha, \alpha \in J_n\} \subset X_n \setminus X_{n-1}$. Montrons que Y_n est fermé dans X_n. L'application $\Phi_n : \sqcup_{i\in I_n}\mathbb{D}^n \to X_n$ restreinte à $\sqcup_{i\in I_n} \mathring{\mathbb{D}}^n$ réalise un homéomorphisme sur son image. Notons $F_n = \sqcup_{\alpha\in J_n}\{y_\alpha\}$ avec y_α l'unique élément de la boule ouverte tel que $\Phi_\alpha(y_\alpha) = x_\alpha$. Ceci implique que $Y_n = \Phi_n(F_n)$ est fermé dans X_n car $\Phi_n^{-1}(\Phi_n(F_n)) = F_n$ est fermé dans $\sqcup_{\alpha\in I_n}\mathbb{D}^n$. Comme X_n est fermé dans X et dans X_m, pour $m \geq n$, il en est de même pour Y_n. De plus pour tout $m < n$, on a $Y_n \cap X_m = \emptyset$. On a alors, pour $m \geq 0$ fixé, $Y \cap X_m = \cup_{n\geq 0} Y_n \cap X_m = \cup_{n=0}^m Y_n \cap X_m$ est fermé dans X_m donc Y est fermé dans X et $Y \cap K = Y$ est fermé dans K, donc Y est quasi-compact (voir proposition 2.2.1 du résumé de topologie générale). Soit $F \subset Y \subset X$. Pour tout $m \geq 0$ on a

$$F \cap X_m \subset Y \cap X_m = \cup_{n=0}^m (Y_n \cap X_m) = \cup_{n=0}^m Y_n.$$

Or le sous-espace topologique $\cup_{n=0}^m Y_n$ est discret et fermé dans X_m, donc $F \cap X_m$ est un fermé de $\cup_{n=0}^m Y_n$ et de X_m. Donc tout sous-ensemble F de Y est un fermé de X. Ainsi Y est discret et quasi-compact donc Y est fini. Conclusion, K intersecte un nombre fini de cellules. □

Définition 3.2.4. On dit que $A \subset X$ est un **sous-CW complexe** si

- A est fermé.
- En tant qu'ensemble A est union de cellules de X.

Proposition 3.2.5. *Tout sous-CW-complexe est un CW-complexe. Pour tout n, le n-squelette de X est un sous CW-complexe de X.*

Démonstration. Soit I l'indice des cellules de X et $J \subset I$ l'indice des cellules de A. Pour $\alpha \in J$ l'application caractéristique $\Phi_\alpha : \mathbb{D}^n \to X$ réalise un homéomorphisme de l'intérieur de $\mathbb{D}^n$ sur son image qui est incluse dans A. Or toute application continue f vérifie $f(\bar{X}) \subset \overline{f(X)}$: en effet $f^{-1}(\overline{f(X)})$ est un fermé qui contient $f^{-1}(f(X))$ et donc $X \subset f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}(\overline{f(X)})$. Donc $\bar{X} \subset f^{-1}(\overline{f(X)})$ ce qui implique le résultat. Comme A est fermé, $\Phi_\alpha(\mathbb{D}^n) \subset \overline{A} = A$ donc $\varphi_\alpha(\mathbb{S}^{n-1}) \subset A$. Ainsi A est un CW-complexe. □

3.3 Résultats de topologie

Voici quelques résultats de topologie qui pourront être utiles par la suite (pas fait en cours)

Proposition 3.3.1. *$\mathbb{S}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{D}^p \times \mathbb{S}^q \cup_{\mathbb{S}^{p-1}\times\mathbb{S}^q} \mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{D}^{q+1}$ pour tout p, q tel que $p + q = n$, $p \geq 1$.*
$\mathbb{D}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{D}^n \cup_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{S}^{n-1} \times I$.

Démonstration. Exo □

Proposition 3.3.2. *Soit $f : X \to Q$ une application continue surjective, et Q muni de la topologie finale par rapport à f. Si K est compact alors la topologie produit sur $Q \times K$ coincide avec la topologie finale induite par la surjection $f \times id : X \times K \to Q \times K$.*

Pour démontrer la proposition on utilisera le lemme suivant

Lemme 3.3.3. *Soient X un espace topologique et K un espace topologique compact. La projection $p : X \times K \to X$ sur la première composante est fermée.*

Démonstration. Considérons F un fermé de $X \times K$. On va montrer que $X \setminus p(F)$ est ouvert. Si $p(F) = X$ c'est fini. On suppose qu'il existe $x \in X \setminus p(F)$, donc $\{x\} \times K \subset (X \times K) \setminus F$, ouvert dans $X \times K$. Donc pour tout $k \in K$ il existe U_k ouvert de X et V_k ouvert de K tel que $(x, k) \in U_k \times V_k \subset (X \times K) \setminus F$. Ainsi $\{x\} \times K$, compact, est recouvert par les ouverts $\{(\{x\} \times K) \cap (U_k \times V_k)\}_{k\in K}$. On en extrait un recouvrement fini:

$$\{x\} \times K \subset \cup_{i=1}^N (U_{k_i} \times V_{k_i}) \subset (X \times K) \setminus F.$$

On a, en particulier, $x \in \cap_{i=1}^N U_{k_i} \subset X \setminus p(F)$. En effet, par l'absurde, s'il existe $z \in \cap_{i=1}^N U_{k_i}$ tel que $z \in p(F)$, alors il existe $k \in K$ tel que $(z, k) \in F$. Cependant, il existe j tel que $(x, k) \in U_{k_j} \times V_{k_j}$. Donc $k \in V_{k_j}$ et $(z, k) \in U_{k_j} \times V_{k_j} \subset (X \times K) \setminus F$, contradiction. On a ainsi trouvé un voisinage ouvert de X contenant x et inclus dans $X \setminus p(F)$. Donc $p(F)$ est fermé dans X. □

Démontrons maintenant la proposition 3.3.2

Démonstration. On utilise la caractérisation de la topologie finale. Nous allons montrer que pour tout $g : Q \times K \to Z$, si $g \circ (f \times id)$ est continue, alors g est continue. Fixons un tel g et notons $h = g \circ (f \times id)$. Fixons $(x_0, k_0) \in X \times K$ et notons $(y_0, k_0) = (f(x_0), k_0)$. Nous allons montrer que g est continue en (y_0, k_0). Fixons U ouvert de Z et contenant $g(y_0, k_0)$.
Etape 1. h est continue en (x_0, k_0) donc il existe W voisinage de (x_0, k_0) tel que $h(W) \subset U$. On peut choisir $W = W_1 \times W_2$ avec W_1 voisinage de x_0 et W_2 voisinage compact de k_0 (K est compact donc localement compact). Remarquons que $g(y_0, W_2) = h(x_0, W_2) \subset U$. Posons

$$V = \{y \in Q | g(y, W_2) \subset U\} \subset Q$$

Etape 2. Montrons que V est un ouvert de Q, ou de manière équivalente que $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X. Pour tout $x \in X$ on a $x \in f^{-1}(V) \Longleftrightarrow h(x, W_2) \subset U$ se qui se traduit aussi par

$$x \notin f^{-1}(V) \Leftrightarrow h(x, W_2) \not\subset U \Leftrightarrow \exists k \in W_2,\ h(x,k) \notin U \Leftrightarrow x \in p_X(h^{-1}(Z \setminus U) \cap X \times W_2)$$

où $p_X : X \times W_2 \to X$. Le lemme précédent implique que p_X est fermé. On en déduit ainsi que $X \setminus f^{-1}(V)$ est fermé dans X donc $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X, donc V est ouvert dans Q.
Etape 3, conclusion: g est continue en (y_0, k_0). En effet, on a trouvé V voisinage de y_0, W_2 voisinage de k_0 tel que $V \times W_2$ contient (y_0, k_0) et tel que $g(V \times W_2) \subset U$. ☐

Corollaire 3.3.4. *Soit $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ une application continue. On a $(X \cup_\varphi \mathbb{D}^n) \times I$ est homéomorphe à $(X \times I) \cup_{\varphi \times id_I} (\mathbb{D}^n \times I)$.*

Ce corollaire a été énoncé en cours et sera utilisé par la suite; fin du cours du 11 février