Homologie

Contents

1 Algèbre homologique–Notions de base **1**
1.1 Complexes de chaines de R-modules 1
1.2 Suite exactes courtes de complexes de chaines 3
1.3 Homotopie de complexes de chaines 4

2 Homologie singulière **5**
2.1 Définition et premières propriétés 5
2.2 Comportement par rapport à l'homotopie 7
2.3 Homologie relative 8
2.4 Théorèmes d'excision 9
2.5 Applications 13
2.6 Degré d'une application $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ et calcul explicite 13
2.7 Attachement cellulaire et homologie 15

3 Homologie cellulaire **17**
3.1 Définition 17
3.2 Calcul de la différentielle 19
3.3 Application de Mayer-Vietoris 20

1 Algèbre homologique–Notions de base

Pour travailler cette partie on pourra s'appuyer sur le libre de Félix et Tanré, section 5.
On fixe R un anneau commutatif. On suppose connue la notion de R-module. On note ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ la catégorie des R-modules. La plupart du temps on se restreindra au cas où $R = \mathbb{Z}$ et dans ce cas, la catégorie des R-modules coincide avec la catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens.

1.1 Complexes de chaines de R-modules

Définition 1.1.1. Un complexe de chaines $(C_\bullet, d_\bullet^C)$ de R-modules est la donnée d'une famille $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de R-modules et de morphismes de R-modules $d_n^C : C_n \to C_{n-1}$, vérifiant $d_n^C \circ d_{n+1}^C = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La famille des morphismes d_n^C s'appelle *différentielle* de C.

Un morphisme de complexes de chaines est la donnée d'une famille de morphismes de R-modules $f_n : C_n \to D_n$ vérifiant $d_n^D \circ f_n = f_n \circ d_n^C$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On note $\mathrm{Ch}(R)$ la catégorie dont les objets sont les complexes de chaines (de R-modules), et les morphismes, les morphismes de complexes de chaines. On note $\mathrm{Ch}_+(R)$ la catégorie dont les objets sont les complexes de chaines vérifiant $C_n = 0, \forall n < 0$ et les morphismes sont les morphismes de $\mathrm{Ch}(R)$.

Définition 1.1.2. Soit $(C_\bullet, d_\bullet^C)$ un complexe de chaines de R-modules. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on définit: le R-module des n-*cycles*: $Z_n(C_\bullet) = \ker(d_n^C)$, le R-module des n-**bords**: $B_n(C_\bullet) = \mathrm{im}(d_{n+1}^C)$ et le n-ième R-module **d'homologie**: $H_n(C_\bullet) = Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.

Remarque 1.1.3. Ces définitions sont fonctorielles au sens où l'on peut étendre les définitions précédentes en des foncteurs $Z_n, B_n, H_n \colon \mathrm{Ch}(R) \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. Il faut vérifier que si $f \colon C_\bullet \to D_\bullet$ est un morphisme dans $\mathrm{Ch}(R)$ alors $f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D_n)$ et $f_n(B_n(C)) \subset f_n(B_n(D))$. Il faut également vérifier que si $f \colon C_\bullet \to D_\bullet$ et $g \colon D_\bullet \to E_\bullet$ sont deux morphismes de complexes alors $Z_n(g \circ f) = Z_n(g) \circ Z_n(f)$, et $Z_n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ (et la même chose pour B_n et H_n).

Définition 1.1.4. Un complexe est dit **exact** ou **acyclique** si pour tout n, on a $H_n(C_\bullet) = 0$. On dit aussi qu'un complexe acyclique de R-modules est une suite exacte longue de R-modules. Un morphisme $f \colon (C_\bullet, d_\bullet^C) \to (D_\bullet, d_\bullet^D)$ de complexes de chaines est un *quasi-isomorphisme* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $H_n(f) \colon H_n(C) \to H_n(D)$ est un isomorphisme.

Remarque 1.1.5. Considérons un complexe tel que $C_n = 0$ pour $i < 0$ et $i \geq 3$. Un tel complexe s'écrit

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{f} C_1 \xrightarrow{g} C_0 \longrightarrow 0$$

avec $g \circ f = 0$. Ce complexe est exact si et seulement si f est injective, $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$ et g est surjective. En effet $H_2(C) = \ker(f)$, $H_1(C) = \ker(g)/\mathrm{im}(f)$ et $H_0(C) = C_0/\mathrm{im}(g)$. Donc ce complexe est exact si et seulement si on est en présence d'une suite exacte courte de R-modules.

Exemple 1.1.6. On considère les complexes suivants.

1. Le complexe de groupes abéliens suivant est acyclique.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

2. Le complexe de groupes abéliens suivant est acyclique

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

   Plus précisément pour tout $n \geq 0$, $C_n = \mathbb{Z}$ et $d_n^C = \mathrm{id}$ si n est impair et $d_n^C = 0$ si n est pair.

3. Le complexe défini par $C_0 = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v, C_1 = \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}f$ et $C_n = 0$ si $n \notin \{0, 1\}$, a son homologie concentrée en degré 0 et 1. Se donner une différentielle d^C sur C équivaut à se donner un morphisme de groupes de C_1 dans C_0. Comme C_1 est un groupe abélien libre sur 2 générateurs, il suffit de se donner les valeurs de $d_1^C(e)$ et $d_1^C(f)$. Ou de manière équivalente une matrice dans $M_2(\mathbb{Z})$. L'homologie du complexe est nulle si et seulement si la matrice est inversible dans $M_2(\mathbb{Z})$. Si l'on pose $d_1^C(e) = v - u = -d_1^C(f)$, on montre que $H_0(C, d^C)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et $H_1(C, d^C) = \mathbb{Z}(e + f)$.

On rappelle le lemme du serpent (exo 2, TD8)

Lemme 1.1.7. *Soit un diagramme commutatif de R-modules*

$$\begin{array}{ccccccc} & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\ 0 \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Il existe un morphisme $\delta : \ker \gamma \longrightarrow \mathrm{coker}\, \alpha$ qui rend la suite

$$\ker \alpha \longrightarrow \ker \beta \longrightarrow \ker \gamma \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}\, \alpha \longrightarrow \mathrm{coker}\, \beta \longrightarrow \mathrm{coker}\, \gamma$$

exacte. Si de plus $A \longrightarrow B$ est injective alors $\ker \alpha \longrightarrow \ker \beta$ l'est aussi, et si $B' \longrightarrow C'$ est surjective alors $\mathrm{coker}\, \beta \longrightarrow \mathrm{coker}\, \gamma$ l'est aussi.

1.2 Suite exactes courtes de complexes de chaines

Définition 1.2.1. Une suite exacte courte de complexes de chaines

$$0 \longrightarrow (C_\bullet, d^C_\bullet) \xrightarrow{f} (D_\bullet, d^D_\bullet) \xrightarrow{g} (E_\bullet, d^E_\bullet) \longrightarrow 0$$

est la donnée de deux morphismes de complexes de chaines f et g tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de R-modules.

Théorème 1.2.2. *Toute suite exacte courte de complexes de chaines induit une suite exacte longue en homologie. Cette suite exacte longue est fonctorielle en les morphismes de suites exactes courtes de complexes de chaines.*

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on peut appliquer le lemme du serpent aux suites exactes courtes suivantes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d_i^C"'] & D_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "d_i^D"'] & E_i \arrow[r] \arrow[d, "d_i^E"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & D_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] & E_{i-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ce qui donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow Z_i(C) \xrightarrow{Z_i(f)} Z_i(D) \xrightarrow{Z_i(g)} Z_i(E) \xrightarrow{\delta}$$

$$C_{i-1}/B_{i-1}(C) \xrightarrow{[f_{i-1}]} D_{i-1}/B_{i-1}(D) \xrightarrow{[g_{i-1}]} E_{i-1}/B_{i-1}(E) \longrightarrow 0$$

Fixons $n \in \mathbb{Z}$. On applique à nouveau le lemme du serpent au diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & C_{n+1}/B_{n+1}(C) \arrow[r, "{[f_{n+1}]}"] \arrow[d, "{[d^C_{n+1}]}"'] & D_{n+1}/B_{n+1}(D) \arrow[r, "{[g_{n+1}]}"] \arrow[d, "{[d^D_{n+1}]}"'] & E_{n+1}/B_{n+1}(E) \arrow[r] \arrow[d, "{[d^E_{n+1}]}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_n(C) \arrow[r, "Z_n(f)"] & Z_n(D) \arrow[r, "Z_n(g)"] & Z_n(E) & \end{tikzcd}$$

Ce qui donne une suite exacte

$$H_{n+1}(C) \xrightarrow{H_{n+1}(f)} H_{n+1}(D) \xrightarrow{H_{n+1}(g)} H_{n+1}(E) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$$

que l'on peut itérer pour obtenir la suite exacte longue en homologie. Rappelons comment est calculé δ_{n+1} dans le lemme du serpent. Soit $[x] \in H_{n+1}(E)$ avec $x \in Z_{n+1}(E)$. Il existe $y \in D_{n+1}$ tel que $g_{n+1}(y) = x$. Comme $g_n(d^D_{n+1}(y)) = d^E_{n+1}(g_{n+1}(y)) = d^E_{n+1}(x) = 0$, il existe un unique $z \in Z_n(C)$ tel que $f_n(z) = d^D_{n+1}(y)$. On pose $\delta_{n+1}[x] = [z]$.
Démontrons la fonctorialité. On se donne donc un diagramme comme ceci dans $\mathrm{Ch}(R)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & D_\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & E_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r, "f'"] & D'_\bullet \arrow[r, "g'"] & E'_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les lignes sont des suites exactes courtes de complexes de chaines et les colonnes sont des morphismes de complexes de chaines. On obtient les suites exactes longues d'homologie:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(C) \arrow[r, "H_{n+1}(f)"] \arrow[d, dashed, "H_{n+1}(\alpha)"'] & H_{n+1}(D) \arrow[r, "H_{n+1}(g)"] \arrow[d, dashed, "H_{n+1}(\beta)"'] & H_{n+1}(E) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "H_{n+1}(\gamma)"'] & H_n(C) \arrow[r, "H_n(f)"] \arrow[d, dashed, "H_n(\alpha)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(C') \arrow[r, "H_{n+1}(f')"] & H_{n+1}(D') \arrow[r, "H_{n+1}(g')"] & H_{n+1}(E') \arrow[r, "\delta'_{n+1}"] & H_n(C') \arrow[r, "H_n(f')"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont bien définies, mais il faut montrer que les carrés commutent. Les deux carrés de gauche commutent par fonctorialité de $H_{n+1}\colon \mathrm{Ch}(R) \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$. Il reste à montrer que pour tout n on a $H_n(\alpha) \circ \delta_{n+1} = \delta'_{n+1} \circ H_{n+1}(\gamma)\colon H_{n+1}(E) \to H_n(C')$. On fixe $x \in Z_{n+1}(E)$. On prend $y \in D_{n+1}$ tel que $x = g_{n+1}(y)$. On a $\delta_{n+1}([x]) = [z]$ avec z l'unique élément de $Z_n(C)$ tel que $f_n(z) = d^D_{n+1}(y)$. On a donc $(H_n(\alpha) \circ \delta_{n+1})(x) = [\alpha_n(z)]$. Comme $g'_{n+1}(\beta_{n+1}(y)) = \gamma_{n+1}(g_{n+1}(y)) = \gamma_{n+1}(x)$, on a $\delta'_{n+1}([\gamma_{n+1}(x)]) = [\alpha_n(z)]$ car $f'_n(\alpha_n(z)) = \beta_n(f_n(z)) = \beta_n d^D_{n+1}(y) = d^{D'}_{n+1}(\beta_{n+1}(y))$. □

Corollaire 1.2.3. *Dans une suite exacte courte de complexes de chaines, si deux des trois complexes sont exacts, le troisième l'est aussi. Etant donné un morphisme de suite exactes courtes de complexes de chaines, si deux des trois morphismes impliqués sont des quasi-isomorphismes, le troisième l'est aussi.*

Démonstration. Dans la longue suite exacte, les roles de C, D et E sont symétriques. Donc on peut supposer que les complexes de chaines D et E sont acycliques. On aura donc une suite exacte (en C) de la forme $0 \to H_n(C) \to 0$. Ceci implique $H_n(C) = \ker(0) = \mathrm{im}(0) = 0$, donc C est acyclique. Pour la deuxième partie du corollaire on utilise le lemme des cinq (TD 8, exo 1) pour conclure. □

1.3 Homotopie de complexes de chaines

Définition 1.3.1. Soient $f, g : C_\bullet \to D_\bullet$ deux morphismes de complexes de chaines de R-modules. On dit que f est homotope à g, et on note $f \simeq g$, s'il existe une famille de morphimes de R-modules $h_n : C_n \to D_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, telle que $h_{n-1}d^C_n + d^D_{n+1}h_n = g_n - f_n$. Remarquons que si $C, D \in \mathrm{Ch}_+(R)$ la condition précédente se restreint à

$$\begin{cases} h_{n-1}d^C_n + d^D_{n+1}h_n & = g_n - f_n,\ n \geq 1 \\ d^D_1 h_0 & = g_0 - f_0. \end{cases}$$

Proposition 1.3.2. *L'homotopie entre morphismes de complexes de chaines est une relation d'équivalence.*

Démonstration. $f \simeq f$ car il suffit de prendre $h = 0$. Si $f \simeq g$ avec homotopie h, alors $g \simeq f$ avec homotopie $-h$. Si $f \simeq g$ avec homotopie h et $g \simeq k$ avec homotopie h' alors $f \simeq k$ avec homotopie $h + h'$. □

Théorème 1.3.3. *Si $f \simeq g\colon C_\bullet \to D_\bullet$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(f) = H_n(g)$.*

Démonstration. Soit $x \in Z_n(C)$. On a $g_n(x) = f_n(x) + d^D_{n+1}h_n(x)$. Comme tous les éléments en jeu sont à valeurs dans $Z_n(D)$ on peut prendre leur classe dans $H_n(D)$, ce qui donne $H_n(g)([x]) = [g_n(x)] = [f_n(x)] = H_n(f)([x])$. □

Définition 1.3.4. On dit que $f : C_\bullet \to D_\bullet$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe $g : D_\bullet \to C_\bullet$ tel que $g \circ f \simeq 1_{C_\bullet}$ et $f \circ g \simeq 1_{D_\bullet}$. On dit alors que les complexes $C_\bullet$ et $D_\bullet$ sont homotopiquement équivalents.

Remarque 1.3.5. On peut montrer aisément que si $f \simeq g\colon C_\bullet \to D_\bullet$ et si $a\colon A_\bullet \to C_\bullet$ et $b\colon D_\bullet \to B_\bullet$ sont des morphismes de complexes de chaines, alors $b \circ f \circ a \simeq b \circ g \circ a$. Cela implique que l'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence. En effet, la réflexivité et la symétrie ne posent pas de problème. Supposons que $f\colon C_\bullet \to D_\bullet$ et $f'\colon D_\bullet \to E_\bullet$ sont deux équivalences d'homotopie. On a $g : D_\bullet \to C_\bullet$ et $g'\colon E_\bullet \to D_\bullet$ tels que $f \circ g \simeq 1_D, g \circ f \simeq 1_C, f' \circ g' \simeq 1_E$ et $g' \circ f' \simeq 1_D$. Donc

$$(f \circ' f) \circ (g \circ g') = f' \circ (f \circ g) \circ g' \simeq f' \circ g' \simeq 1_E$$

et de même $(g \circ g') \circ (f' \circ f) \simeq 1_C$.

Corollaire 1.3.6. *Si f est une équivalence d'homotopie alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(f)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Il existe g tel que $f \circ g \simeq 1_D$ et $g \circ f \simeq 1_C$, donc $H_n(f) \circ H_n(g) = H_n(f \circ g) = H_n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ et $H_n(g) \circ H_n(f) = \mathrm{id}$. Donc $H_n(f)$ est un isomorphisme. □

Définition 1.3.7. Un complexe de chaines $C_\bullet$ est **contractile** si $1_{C_\bullet} \simeq 0$.

Corollaire 1.3.8. *Si $C_\bullet$ est contractile alors il est acyclique.*

Démonstration. On a $0 = H_n(\mathrm{id}) : H_n(C) \to H_n(C)$ donc nécessairement $H_n(C) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. □

Remarque 1.3.9. Attention, la réciproque n'est pas vraie en général. on pourra s'en convaincre en étudiant la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

qui forme un complexe acyclique mais qui n'est pas contractile.

2 Homologie singulière

2.1 Définition et premières propriétés

On note $\Delta^n = \langle v_0, \dots, v_n\rangle$ le n-simplexe standard, enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants. Tout point de Δ^n s'écrit de manière unique (coordonnées barycentriques) $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \in [0,1], \sum_i \lambda_i = 1$. Si les points v_i sont connus et qu'i n'y a pas d'ambiguité de notations, on simplifiera parfois cette écriture en posant $x = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$. Les **applications faces**

$$\delta_i : \Delta^{n-1} = \langle v_0, \dots, v_{n-1}\rangle \to \Delta^n = \langle v_0, \dots, v_n\rangle,\ 0 \le i \le n$$

sont les application affines définies par

$$\delta_i(v_j) = \begin{cases} v_j & \text{si } j < i \\ v_{j+1} & \text{si } j \ge i \end{cases}$$

ou encore: $\delta_i(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_i, \dots, \lambda_{n-1})$.

Lemme 2.1.1. *Pour tout $0 \le i \le j \le n$ on a*

$$\delta_i \circ \delta_j = \delta_{j+1} \circ \delta_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n+1}$$

Démonstration. Pour $i \leq j$ on a d'une part

$$\delta_i(\delta_j(v_k)) = \begin{cases} \delta_i(v_k) & \text{si } k < j \\ \delta_i(v_{k+1}) & \text{si } k \geq j \end{cases} = \begin{cases} v_k & \text{si } k < i \\ v_{k+1} & \text{si } i \leq k < j \\ v_{k+2} & \text{si } k \geq j \end{cases}$$

D'autre part

$$\delta_{j+1}(\delta_i(v_k)) = \begin{cases} \delta_{j+1}(v_k) & \text{si } k < i \\ \delta_{j+1}(v_{k+1}) & \text{si } k \geq i \end{cases} = \begin{cases} v_k & \text{si } k < i \\ v_{k+1} & \text{si } i \leq k \text{ et } k+1 < j+1 \\ v_{k+2} & \text{si } k+1 \geq j+1 \end{cases}$$

□

Définition 2.1.2. Soit X un espace topologique. Le **complexe des chaines singulières** est donné par la famille $(C_n^{sing}(X;R))_{n\geq 0}$, où $C_n^{sing}(X;R)$ est le R-module libre engendré par les *n-simplexes singuliers* de X, à savoir, les applications continues $\sigma : \Delta^n \to X$.
Pour $\sigma : \Delta^n \to X$ on note e_σ ou $[\sigma]$ l'élément correspondant dans $C_n^{sing}(X;R)$. Un élément c de $C_n^{sing}(X;R)$ s'écrit de manière unique $c = \sum_\sigma \lambda_\sigma e_\sigma$, avec $\lambda_\sigma \in R$ et $\{\sigma | \lambda_\sigma \neq 0\}$ est fini. Un tel élément s'appelle une **n-chaine (singulière) de X**.
On définit $d_n \colon C_n^{sing}(X;R) \to C_{n-1}^{sing}(X;R)$ par

$$d_n(e_\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e_{\sigma\circ\delta_i}$$

On étend d_n par linéarité: $d_n(\sum_\sigma \lambda_\sigma e_\sigma) = \sum_\sigma \lambda_\sigma d_n(e_\sigma)$.

Remarque 2.1.3. Le lemme 2.1.1 implique $d_n \circ d_{n+1} = 0$. En effet

$$\begin{aligned} d_n \circ d_{n+1}(e_\sigma) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} e_{\sigma\circ\delta_i\circ\delta_j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} (-1)^{i+j} e_{\sigma\circ\delta_i\circ\delta_j} + \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j+1}^{n+1} (-1)^{i+j} e_{\sigma\circ\delta_i\circ\delta_j} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} (-1)^{i+j} e_{\sigma\circ\delta_{j+1}\circ\delta_i} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j+1}^{n+1}}_{\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{i-1}} (-1)^{i+j} e_{\sigma\circ\delta_i\circ\delta_j} = 0 \end{aligned}$$

L'homologie singuière de X est l'homologie de ce complexe notée $H_*^{\text{sing}}(X;R)$ (ou $H_*(X;R)$ ou plus simplement $H_\bullet(X)$ s'il n'y a pas de confusion sur les coefficients).

Fin du cours du 29 avril 2025

Définition 2.1.4. Le **complexe singulier augmenté de** X est le complexe $\widetilde{C}_\bullet(X;R)$ défini par $\widetilde{C}_p(X;R) = C_p^{sing}(X;R)$ pour $p \geq 0$ et $\widetilde{C}_{-1}(X;R) = R$ avec $d_0 : C_0^{sing}(X;R) \to R$ défini par $d_0(e_x) = 1$. L'homologie de ce complexe est appelée **homologie réduite de** X et est notée $\widetilde{H}_\bullet(X;R)$. Si X est non vide on a $\widetilde{H}_p(X;R) = 0, \forall p < 0$ et $\widetilde{H}_p(X;R) = H_p(X;R), \forall p > 0$.

Le complexe des chaines singulières définit un foncteur $\text{Top} \to \text{Ch}_+(R)$. Si deux espaces sont homéomorphes leurs complexes des chaines singulières sont isomorphes.

Proposition 2.1.5. *Si X s'écrit comme union disjointe d'espaces topologiques $X = \sqcup X_\alpha$, alors $C_\bullet(X;R)$ est isomorphe à $\oplus C_\bullet(X_\alpha;R)$ et $H_p(X;R)$ est isomorphe à $\oplus H_p(X_\alpha;R)$ pour tout p.*

Démonstration. Comme $X_\alpha \subset X$ on a un morphisme de complexes $\oplus C_\bullet(X_\alpha;R) \to C_\bullet(X;R)$. Fixons $c \in C_p(X;R)$ avec $c = \sum \lambda_i e_{\sigma_i}$, avec $\sigma_i : \Delta^p \to X$ continue. Comme Δ^p est connexe, il existe un α tel que $\sigma_i(\Delta^p) \subset X_\alpha$. On peut donc écrire $c = \sum_\alpha c_\alpha$ avec $c_\alpha \in C_p(X_\alpha;R)$. On vient de montrer que $\oplus_\alpha C_p(X_\alpha;R) \to C_p(X;R)$ est surjective. Elle est également injective car si $\sum_\alpha c_\alpha = 0$ avec $c_\alpha = \sum_{i_\alpha} \lambda_{i_\alpha} e_{\sigma_{i_\alpha}}$ alors pour $\alpha \neq \beta$, on a $e_{\sigma_{i_\alpha}} \neq e_{\sigma_{i_\beta}}$ donc pour tout i_α on a $\lambda_{i_\alpha} = 0$. Donc $c = 0$. Enfin $H_p(\oplus_\alpha C_\bullet(X_\alpha;R)) = \oplus_\alpha H_p(X_\alpha;R)$. □

Proposition 2.1.6. *Si X est (non vide) connexe par arcs, $H_0(X;R)$ est isomorphe à R et $\widetilde{H}_0(X;R) = 0$.*

Proposition 2.1.7. *On sait que $d_1(e_\gamma) = e_{\gamma(1)} - e_{\gamma(0)}$ pour tout $\gamma : I \to X$. Donc si X est connexe par arcs, pour tous $x, y : \Delta^0 \to X$ on peut relier x à y par un chemin γ ce qui donne $[x] = [y] \in H_0(X;R)$. Or X est non vide donc il existe un point $x_0 \in X$ et $H_0(X;R)$ est un R-module libre de rang 1 engendré par $[e_{x_0}]$. Pour calculer l'homologie réduite, on a* $\ker d_0 : C_0(X;R) \to R$ *est engendré par les 0-chaines de la forme $e_x - e_y$ qui est précisément l'image de d_1. Donc $\widetilde{H}_0(X;R) = 0$.*

Proposition 2.1.8. *$H_p(\{*\};R)$ est isomorphe à R si $p = 0$ et vaut 0 sinon. $\widetilde{H}_p(\{*\};R) = 0$ pour tout p.*

Démonstration. Il suffit d'écrire le complexe car $C_p(\{*\};R)$ est un R-module libre de rang 1 engendré par l'application constante. □

2.2 Comportement par rapport à l'homotopie

Théorème 2.2.1. *Si $f \simeq g$ alors $C_\bullet^{sing}(f) \simeq C_\bullet^{sing}(g)$ et $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$.*

Démonstration. Soit $F\colon X \times I \to Y$ une homotopie de f à g. Cette homotopie nous fournit une application $C_n^{sing}(F) : C_n^{sing}(X \times I) \to C_n^{sing}(Y)$. On construit une homotopie $P_n\colon C_n^{sing}(X) \to C_{n+1}^{sing}(Y)$ de la manière suivante. Pour $0 \leq i \leq n$, considérons l'application affine $\alpha_i^n\colon \Delta^{n+1} \to \Delta^n \times I$ définie par

$$\alpha_i^n(v_k) = \begin{cases} (v_k, 0) & \text{si } k \leq i, \\ (v_{k-1}, 1) & \text{si } k > i. \end{cases}$$

On définit pour $\sigma\colon \Delta^n \to X$

$$P_n(e_\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e_{F\circ(\sigma\times \mathrm{id})\circ\alpha_i^n}.$$

On étend P_n par linéarité sur $C_n^{sing}(X)$. On a alors

$$dP_n(e_\sigma) + P_{n-1}(de_\sigma) = \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} e_{F\circ(\sigma\times\mathrm{id})\circ\alpha_i^n\circ\delta_j^{n+1}} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} e_{F\circ(\sigma\times\mathrm{id})\circ(\delta_j^n\times id)\circ\alpha_i^{n-1}},$$

où $\delta_j^n\colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$, pour $0 \leq j \leq n$ sont les applications face. On vérifie les égalités suivantes

$$\begin{aligned} (\delta_i^n \times \mathrm{id}) \circ \alpha_j^{n-1} &= \alpha_{j+1}^n \circ \delta_i^{n+1} && \forall 0 \leq i \leq j \leq n-1, \\ (\delta_i^n \times \mathrm{id}) \circ \alpha_j^{n-1} &= \alpha_j^n \circ \delta_{i+1}^{n+1} && \forall 0 \leq j < i \leq n \\ \alpha_i^n \circ \delta_{i+1}^{n+1} &= \alpha_{i+1}^n \circ \delta_{i+1}^{n+1} && \forall 0 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

En combinant le tout on obtient

$$dP_n(e_\sigma) + P_{n-1}(de_\sigma) = e_{F\circ(\sigma\times\mathrm{id})\circ\alpha_0^n\circ\delta_0^{n+1}} - e_{F\circ(\sigma\times\mathrm{id})\circ\alpha_n^n\circ\delta_{n+1}^{n+1}}$$

Par ailleurs $\alpha_0^n \circ \delta_0^{n+1}(v_k) = (v_k, 1)$ et $\alpha_n^n \circ \delta_{n+1}^{n+1}(v_k) = (v_k, 0)$ pour tout $0 \leq j \leq n$. Ainsi

$$dP_n(e_\sigma) + P_{n-1}(de_\sigma) = e_{g\circ\sigma} - e_{f\circ\sigma}$$

ce qui permet de conclure. □

Corollaire 2.2.2. *Si X est homotopiquement équivalent à Y alors $H_\bullet(X)$ est isomorphe à $H_\bullet(Y)$. Si X et Y sont non vides alors $\widetilde{H}_\bullet(X)$ est isomorphe à $\widetilde{H}_\bullet(Y)$.*

En particulier $H_p(\Delta^n; R)$ est isomorphe à R si $p = 0$ et vaut 0 sinon et $\widetilde{H}_p(\Delta^n; R) = 0, \forall p$.

2.3 Homologie relative

Définition 2.3.1. Soit $A \subset X$ un sous-espace topologique de X. On définit

$$C_n^{sing}(X; A; R) = C_n^{sing}(X; R)/C_n^{sing}(A; R),$$

avec la différentielle induite sur le quotient. Cela fournit un complexe de chaines, dont l'homologie est notée $H_\bullet(X; A; R)$ et appelée *homologie de X relativement à A.*

Remarque 2.3.2. Soit $\bar{c} \in C_n^{sing}(X; A; R)$. $\bar{c}$ est un cycle si et seulement si $\overline{dc} = \bar{0}$ si et seulement si $dc \in C_{n-1}^{sing}(A; R)$. Ainsi un cycle dans $C_n^{sing}(X; A; R)$ est une n-chaine dans $C_n^{sing}(X; R)$ dont le bord est dans $C_{n-1}^{sing}(A; R)$: c'est donc un *cycle relativement à A.*

Proposition 2.3.3. *La suite exacte courte de complexes de chaines*

$$0 \longrightarrow C_\bullet^{sing}(A; R) \longrightarrow C_\bullet^{sing}(X; R) \longrightarrow C_\bullet^{sing}(X; A; R) \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue en homologie relative dont le connectant $\delta : H_n(X; A; R) \to H_{n-1}(A; R)$ est donée par $\delta[\bar{c}] = [dc]$, pour tout c tel que $dc \in C_{n-1}^{sing}(A; R)$.

Démonstration. Il faut démontrer que, pour tout n, l'application R-linéaire $\iota_*\colon C_n^{sing}(A; R) \to C_n^{sing}(X; R)$ induite par l'inclusion $A \subset X$ est injective. Cette application envoie e_σ sur $e_{\iota\circ\sigma}$ pour tout $\sigma : \Delta^n \to A$. Or $e_{\iota\circ\sigma} = e_{\iota\circ\tau}$ si et seulement si les applications continues $\iota \circ \sigma$ et $\iota \circ \tau$ sont égales. Comme ι est une inclusion cela implique $\sigma = \tau$. Conclusion si $\sum_j \lambda_j e_{\iota\circ\sigma_j} = 0$ alors nécessairement $\lambda_j = 0$ pour tout j. □

Remarque 2.3.4. La suite exacte courte peut-être remplacée par la suite exacte courte impliquant les complexes singuliers augmentés. On notera que $\widetilde{C}_{-1}(X; R)/\widetilde{C}_{-1}(A; R) = 0$ ainsi $\widetilde{C}_\bullet(X; R)/\widetilde{C}_\bullet(A; R) = C_\bullet(X, A; R)$. Donc Si $A \neq \emptyset$ la suite exacte courte de complexes réduits induit une suite exacte longue impliquant homologie réduite et homologie relative. En particulier si X est connexe par arcs on a $H_0(X; A) = 0$.

Proposition 2.3.5. *Soient $A \subset B \subset X$ des espaces topologiques. On a une suite exacte longue de paires*

$$\longrightarrow H_n(B, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_{n-1}(B, A) \longrightarrow$$

Démonstration. On applique d'abord le lemme du serpent au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & C_\bullet^{sing}(A) & \longrightarrow & C_\bullet^{sing}(A) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow i_* & & \downarrow j_* & & \downarrow \gamma & \\ 0 \longrightarrow & C_\bullet^{sing}(B) & \longrightarrow & C_\bullet^{sing}(X) & \longrightarrow & C_\bullet^{sing}(X)/C_\bullet^{sing}(B) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Comme i_* et j_* sont injectives, cela nous fournit une suite exacte courte de complexes de chaines

$$0 \longrightarrow C_\bullet^{sing}(B)/C_\bullet^{sing}(A) \longrightarrow C_\bullet^{sing}(X)/C_\bullet^{sing}(A) \longrightarrow C_\bullet^{sing}(X)/C_\bullet^{sing}(B) \longrightarrow 0$$

□

2.4 Théorèmes d'excision

Soit X un espace topologique $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ une famille de sous-espaces de X tel que $X = \cup_{i\in I} \overset{\circ}{U_i}$. On définit le complexe des $\mathcal{U}$-chaines de X, noté $C_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R)$, par $C_p^{\mathcal{U}}(X;R)$ est le R-module libre engendré par $\{\sigma : \Delta^p \to U_i, i \in I\}$.

Théorème 2.4.1 (Théorème des $\mathcal{U}$-chaines)**.** *Le morphisme de complexes $\iota : C_\bullet^{\mathcal{U}}(X;R) \subset C_\bullet^{sing}(X;R)$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. La démonstration se fait en plusieurs étapes.
Etape 1. On construit un opérateur: la **subdivision barycentrique** $S_n^X : C_n(X) \to C_n(X)$. On note Σ_{n+1} le groupe des bijections de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$. Pour $\tau \in \Sigma_{n+1}$, on note $\epsilon(\tau) \in \{\pm 1\}$ sa signature et $S_\tau : \Delta^n \to \Delta^n$ l'unique application affine définie par

$$S_\tau(v_i) = \sum_{j=0}^{i} \frac{v_{\tau(j)}}{i+1}.$$

On considère également $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne et on définit le diamètre de Δ^n par $\mathrm{diam}(\Delta^n) = \max\{||x-y||, x, y \in \Delta^n\}$. Il est clair que pour tout $\tau \in \Sigma_{n+1}$, on a

$$\mathrm{diam}(S_\tau(\Delta^n)) \leq \frac{n}{n+1}\,\mathrm{diam}(\Delta^n)$$

On définit pour $\sigma : \Delta^n \to X$ continue

$$S_n(e_\sigma) = \sum_{\alpha \in \Sigma_{n+1}} \epsilon(\alpha) e_{\sigma \circ S_\alpha}$$

A titre d'exemple étudions S_0^X et S_1^X. On a clairement $S_0^X = \mathrm{id}$. $S_{id} : \Delta^1 \to \Delta^1$ envoie v_0 sur v_0 et v_1 sur $\frac{v_0+v_1}{2}$ alors que $S_{(01)}$ envoie v_0 sur v_1 et v_1 sur $\frac{v_0+v_1}{2}$. En utilisant l'homéomorphisme canonique entre I et Δ^1 on a $S_{id}, S_{(12)} : I \to I$ ont pour expression $S_{id}(t) = \frac{t}{2}$ et $S_{(12)}(t) = 1 - \frac{t}{2}$. En particulier $S_1^X : C_1(X) \to C_1(X)$ envoie e_σ sur $e_{\sigma_1} - e_{\sigma_2}$ où $\sigma_1, \sigma_2 : I \to X$ sont définies par

$$\sigma_1(t) = \sigma\left(\frac{t}{2}\right), \qquad \sigma_2(t) = \sigma\left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

On a alors

$$dS_1^X(e_\sigma) = e_{\sigma(\frac{1}{2})} - e_{\sigma(0)} - (e_{\sigma(\frac{1}{2})} - e_{\sigma(1)}) = S_0^X(de_\sigma).$$

Etape 2. Un calcul algébrique permet de montrer que $S^X_\bullet : C^{sing}_\bullet \to C^{sing}_\bullet$ est un morphisme de complexes de chaines. De plus, pour toute application continue $f : X \to Y$, en notant $C^{sing}_n(f) : C^{sing}_n(X) \to C^{sing}_n(Y)$, on a

$$S^Y_n \circ C^{sing}_n(f) = C^{sing}_n(f) \circ S^X_n$$

Donc $S_\bullet$ est une transformation naturelle entre le foncteur $C^{sing}_\bullet : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ch}_+(R)$ et lui même.
Etape 3. Montrons par récurrence que pour tout espace topologique X le morphisme de complexes de chaines $S^X_\bullet$ est homope à l'identité de $C^{sing}_\bullet(X)$. Plus précisément, nous montrons qu'il existe une famille $h^X_k : C^{sing}_k(X) \to C^{sing}_{k+1}(X)$ vérifiant l'égalité $(\star_k)$ suivante

$$(\star_k) \qquad d_{k+1}h^X_k + h^X_{k-1}d_k = S^X_k - \mathrm{id}_{C^{sing}_k(X)}$$

et la condition $(\mathcal{N}_k)$ suivante: h_k définit une transformation naturelle du foncteur $C^{sing}_k : \mathrm{Top} \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$ vers le foncteur $C^{sing}_{k+1} : \mathrm{Top} \to {}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}$.
Comme $S^X_0 = \mathrm{id}_{C^{sing}_0(X)}$, en prenant $h^X_0(e_x) = e_{c_x}$ où c_x est le chemin constant, on obtient que $(\star_0)$ et $(\mathcal{N}_0)$ sont vérifiées. Supposons construits $h^X_0, \dots, h^X_{n-1}$ vérifiant les conditions précédentes. Notons $i_n = e_{\mathrm{id}} \in C^{sing}_n(\Delta_n)$ et $d_n i_n \in C^{sing}_{n-1}(\Delta^n)$. L'hypotèse de récurrence donne

$$d_n h^{\Delta_n}_{n-1}(d_n i_n) + h_{n-2}\underbrace{d_{n-2}(d_{n-1} i_n)}_{=0} = S^{\Delta_n}_{n-1}(d_n i_n) - d_n i_n = d_n S^{\Delta^n}_n(i_n) - d_n(i_n).$$

Donc

$$d_n(h^{\Delta_n}_{n-1}(d_n i_n) - S^{\Delta_n}_n(i_n) + i_n) = 0 \in C^{sing}_{n-1}(\Delta^n)$$

Or Δ^n est contractile donc il existe $h^{\Delta^n}_n(i_n) \in C^{sing}_{n+1}(\Delta^n)$ tel que $d_{n+1}h^{\Delta^n}_n(i_n) = h^{\Delta_n}_{n-1}(d_n i_n) - S^{\Delta_n}_n(i_n) + i_n$. Rappelons que toute application continue $\sigma : \Delta^n \to X$ induit un morphisme $C^{sing}_{n+1}(\sigma) : C^{sing}_{n+1}(\Delta^n) \to C^{sing}_{n+1}(X)$. On pose alors $h^X_n : C^{sing}_n(X) \to C^{sing}_{n+1}(X)$ l'application qui à e_σ associe $C^{sing}_{n+1}(\sigma)(h^{\Delta^n}_n(i_n))$. Il est alors facile de voir que h^X_n vérifie $(\star_n)$ et $(\mathcal{N}_n)$.
Etape finale. Montrons que le morphisme $\iota : C^{\mathcal{U}}_\bullet(X) \to C^{sing}_\bullet(X)$ est un quasi-isomorphisme. Fixons $\sigma : \Delta^n \to X$ une application continue, et posons $V_i = \tau^{-1}(\mathring{U}_i)$. Les V_i forment un recouvrement d'ouverts de Δ^n donc il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \Delta^n$, $\mathcal{B}(x, \epsilon) \cap \Delta^n \subset V_j$ pour un certain j. En itérant le foncteur S^X_n un certain nombre de fois, puisque $\mathrm{diam}(S_\tau) \leq \frac{n}{n+1}\mathrm{diam}(\Delta^n)$, il existe un entier $k(\sigma)$ tel que $S^{k(\sigma)}_n(e_\sigma) \in C^{\mathcal{U}}_\bullet(X)$. On peut même prendre $k(\sigma)$ le plus petit entier k tel que $S^k_n(e_\sigma) \in C^{\mathcal{U}}_\bullet(X)$. Cela fournit une application $s : C^{sing}_n(X) \to C^{\mathcal{U}}_n(X)$ telle que $s\iota = \mathrm{id}$. Montrons que $H_\bullet(\iota)$ est un isomorphisme.

Surjectivité. Comme $S_\bullet : C^{sing}_\bullet(X) \to C^{sing}_\bullet(X)$ est homotope à l'identité il en est de même pour toutes ses itérations $S^k_\bullet$. Fixons $c \in C^{sing}_n(X)$ tel que $dc = 0$. On écrit $c = \sum_i \alpha_i e_{\sigma_i}$, somme finie. On prend $k = \sup(k(\sigma_i))$. Alors $S^k_n(c) - c = d_{n+1}L_n(c) - L_{n-1}(dc)$ pour un certain $L_\bullet : C^{sing}_\bullet(X) \to C^{sing}_{\bullet+1}(X)$.

Injectivité. Soient $c \in C^{\mathcal{U}}_n(X)$ tel que $dc = 0$ et $[\iota(c)] = [0] \in H_n(X)$. Il existe $c' \in C^{sing}_{n+1}(X)$ tel que $dc' = c$. Puis il existe un entier k tel que $S^k_{n+1}(c') \in C^{\mathcal{U}}_{n+1}(X)$. Comme $d(S^k_{n+1}(c')) = S^k_n(dc') = S^k_n(c)$, on a $[S^k_n(c)] = [0]$ dans $H_n(C^{\mathcal{U}}_\bullet(X))$. Par ailleurs,

$$S^k_n(c) - c = d_{n+1}L_n(c) - L_{n-1}(dc).$$

On rappelle que l'homotopie $L_\bullet$ est fonctorielle en X. Ainsi, pour $\sigma : \Delta^n \to U_i$ on a $L(e_\sigma) \in C^{sing}_{n+1}(U_i)$ et $L_n(C^{\mathcal{U}}_n(X)) \subset C^{\mathcal{U}}_{n+1}(X)$. Donc dans $H_n(C^{\mathcal{U}}_\bullet(X))$ on a $[c] = [S^k_n(c)] = [0]$. $\square$

Corollaire 2.4.2 (suite exacte longue de Mayer-Vietoris). *Soient $U, V \subset X$ tels que $X = \overset{\circ}{U} \cup \overset{\circ}{V}$. Il existe une suite exacte longue*

$$\dots \longrightarrow H_\bullet(U \cap V; R) \xrightarrow{i_*} H_\bullet(U; R) \oplus H_\bullet(V; R) \xrightarrow{j_*} H_\bullet(X; R) \xrightarrow{\varphi} H_{*-1}(U \cap V; R) \xrightarrow{i_*} \dots$$

où

$$i \colon C_\bullet^{sing}(U \cap V) \to C_\bullet^{sing}(U) \oplus C_\bullet^{sing}(V), \quad et \quad j \colon C_\bullet^{sing}(U) \oplus C_\bullet^{sing}(V) \to C_\bullet^{sing}(X)$$

sont définies par

$$\begin{aligned} i(e_\sigma) =& (e_\sigma, -e_\sigma), \\ j(e_\sigma, e_\tau) =& e_\sigma + e_\tau \end{aligned}$$

et où φ est l'application induite par $H_\bullet(X) \approx H_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \to H_{*-1}(U \cap V)$ qui à $[c] = [c_U + c_V] \in H_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$ associe $[dc_U] = -[dc_V]$.

Démonstration. Considérons l'ensemble $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Il est clair que nous avons une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C_\bullet^{sing}(U \cap V) \xrightarrow{i} C_\bullet^{sing}(U) \oplus C_\bullet^{sing}(V) \xrightarrow{\rho} C_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

avec $\rho(e_\sigma, e_\tau) = e_\sigma + e_\tau$. Cette suite exacte courte induit une suite exacte longue en homologie

$$\dots \longrightarrow H_n(U \cap V; R) \xrightarrow{i_*} H_n(U; R) \oplus H_n(V; R) \xrightarrow{\rho_*} H_n(C_\bullet^{\mathcal{U}}(X)) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(U \cap V; R) \xrightarrow{i_*} \dots$$

Par le théorème 2.4.1, le morphisme $\iota_* : H_n(C_\bullet^{\mathcal{U}}(X)) \to H_n(X)$ est un isomorphisme pour tout n. On constate alors que $\iota_* \circ \rho_* = j_*$ et $\varphi \circ \iota_* = \delta$, d'où le résultat. □

Corollaire 2.4.3. *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$H_p(\mathbb{S}^n; R) = \begin{cases} R & si\ p = 0\ ou\ p = n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 0$ on a

$$\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^n; R) = \begin{cases} R & si\ p = n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $\mathbb{S}^0$ est un espace discret consitué de deux points donc $H_0(\mathbb{S}^0; R) = R \oplus R$ et $H_p(\mathbb{S}^0; R) = 0$ pour $p > 0$. Pour $n \geq 1$, $\mathbb{S}^n$ étant connexe par arcs on a $H_0(\mathbb{S}^n, R) = R$.
On décompose la sphère $\mathbb{S}^n = U \cup V$ avec $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}, V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ homéomorphes à $\mathbb{D}^n$ et $U \cap V$ homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$ et on utilise la suite exacte longue de Mayer-Vietoris.

Pour $n = 1$ cette suite exacte longue se restreint aux suites exactes

$$0 \to H_1(\mathbb{S}^1) \to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(\mathbb{S}^1) \to 0 \text{ et pour } k \geq 2, 0 \to H_k(\mathbb{S}^1) \to 0$$

On en déduit que $H_1(\mathbb{S}^1)$ est isomorphe au noyau de $H_0(i)$. Or $H_0(U \cap V)$ est un R-module libre de rang 2 engendré par e_x et e_y et $H_0(U)$ est libre de rang 1 engendré par e_U, de même pour $H_0(V)$. On peut choisir ces générateurs de telle manière que $i_*(e_x) = e_U - e_V = i_*(e_y)$

donc le noyau de $H_0(i)$ est libre de rang 1 engendré par $e_x - e_y$. On a également $H_k(\mathbb{S}^1) = 0$ pour $k \geq 2$.

Pour $n > 1$ on remarque que $H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V)$ est injective. Ainsi on obtient des suites exactes

$$H_k(\mathbb{S}^n) \to H_{k-1}(U \cap V) = H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}), k \geq 2, \text{ et } 0 \to H_1(\mathbb{S}^n) \to 0$$

Le principe de récurrence permet de conclure que $H_n(\mathbb{S}^n) = R$ et $H_p(\mathbb{S}^n) = 0$ pour $p \neq n, 0$.

de ce corollaire utilise la récurrence et la suite exacte de Mayer-Vietoris. Pour l'homologie réduite il suffit de calculer ce qui se passe en degré 0. □

Corollaire 2.4.4. *Générateurs de $H_n(\mathbb{S}^n)$*

Cas $n = 1$. *On note $\sigma_A : I \to \mathbb{S}^1$ l'application continue qui à t associe $e^{i\pi t}$ et $\sigma_B : I \to \mathbb{S}^1$ l'application continue qui à t associe $e^{i\pi(t+1)}$. On a $\sigma_A + \sigma_B \in C_1^{sing}(\mathbb{S}^1)$ et $d(\sigma_A + \sigma_B) = 0$. La classe $[\sigma_A + \sigma_B] \in H_1(\mathbb{S}^1)$ en est un générateur.*

Cas $n \geq 2$. *On choisit $\varphi_n : \Delta^n \to \mathbb{D}^n$ un homéomorphisme induisant un homéomorphisme entre $\partial\Delta^n$ et $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. On note $j_n^+ : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$ l'application continue qui à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associe $(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - ||x||^2})$ et $j_n^- : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$ l'application continue qui à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associe $(x_1, \ldots, x_n, -\sqrt{1 - ||x||^2})$. Ces deux applications coincident sur le bord $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{D}^n$. On en déduit que les n-simplexes singuliers $\sigma^+ = j_n^+ \circ \varphi_n$ et $\sigma^- = j_n^- \circ \varphi_n$ coincident sur les faces Δ_i^n de Δ^n, donc $\sigma^+ - \sigma^- \in C_n^{sing}(\mathbb{S}^n)$ vérifie $d(\sigma^+ - \sigma^-) = 0$. On a: la classe $[\sigma^+ - \sigma^-] \in H_n(\mathbb{S}^n)$ en est un générateur.*

Fin du cours du 6 mai

Théorème 2.4.5. *(Théorème d'excision)*

1. *Pour tout $U \subset W \subset X$ avec $\overline{U} \subset \overset{\circ}{W}$, on a un isomorphisme pour tout n,*
$$H_n(X \setminus U, W \setminus U) \to H_n(X, W)$$

2. *Soient $A, B \subset X$ tels que $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. L'inclusion de paire $(B, A \cap B) \to (X, A)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Démonstration. les deux énoncés sont équivalents. Il suffit de poser $A = W$ et $B = X \setminus U$. On montre le deuxième énoncé avec $\mathcal{U} = \{A, B\}$. On a un morphisme de suites exactes courtes de complexes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_\bullet^{sing}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & C_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & C_\bullet^{\mathcal{U}}(X)/C_\bullet^{sing}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{j}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_\bullet^{sing}(A) \arrow[r] & C_\bullet^{sing}(X) \arrow[r] & C_\bullet^{sing}(X)/C_\bullet^{sing}(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme id et j sont des quasi-isomorphismes, il en est de même pour $\bar{j}$. Par ailleurs le morphisme de complexes $C_\bullet^{sing}(B) \to C_\bullet^{\mathcal{U}}(X)/C_\bullet^{sing}(A)$ est surjectif de noyau $C_\bullet^{sing}(A \cap B)$ donc $C_\bullet^{\mathcal{U}}(X)/C_\bullet^{sing}(A)$ est isomorphe à $C_\bullet^{sing}(B)/C_\bullet^{sing}(A \cap B)$, ce qui permet de conclure que le morphisme de complexe

$$C_\bullet^{sing}(B; A \cap B) = C_\bullet^{sing}(B)/C_\bullet^{sing}(A \cap B) \to C_\bullet^{sing}(X)/C_\bullet^{sing}(A) = C_\bullet^{sing}(X; A)$$

est un quasi-isomorphisme. □

2.5 Applications

Théorème 2.5.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si U et V sont homéomorphes alors $m = n$.*

Démonstration. Soit x un point de U. $U \cup \mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ est un recouvrement d'ouverts de $\mathbb{R}^m$ et le théorème d'excision donne un isomorphisme $H_\bullet(U, U \setminus \{x\}) \to H_\bullet(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$. La suite exacte longue en homologie réduite asssociée à la paire $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ donne

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}; R) = \begin{cases} R & \text{si } k = m-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le résultat en découle immédiatement. □

2.6 Degré d'une application $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ et calcul explicite

Définition 2.6.1. Fixons $n \geq 1$. Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Le degré de f, noté $\deg(f)$, est l'unique entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que $H_n(f) : H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$ soit la multiplication par d.

Proposition 2.6.2 (Voir TD)**.** *Soient $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. On a les propriétés suivantes*

1. $\deg(\mathrm{id}) = 1$
2. *Si f n'est pas surjective alors* $\deg(f) = 0$
3. $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$
4. *Si f est homotope à g alors* $\deg f = \deg g$*. En particulier, si f est une équivalence d'homotopie alors* $\deg(f) \in \{-1, 1\}$*.*
5. *Si f est une réflexion hyperplane par rapport à l'hyperplan $x_i = 0$ alors* $\deg(f) = -1$
6. *Le degré de l'application antipodale $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ qui à x associe $-x$ est* $(-1)^{n+1}$

Démonstration. 1), 3) et 4) sont clairs. 2) Il suffit de remarquer que $f = g \circ i$ avec $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ pour $y \notin \mathrm{im}(f)$ et $g(x) = f(x)$. On a alors $H_n(g) = H_n(i) = H_n(f) = 0$. 5) il suffit d'utiliser les générateurs de $H_n(\mathbb{S}^n)$ et pour 6) de constater que l'application antipodale est la composée de $n+1$ réflexions hyperplanes. □

Pour calculer explicitement le degré d'une application on procède de la manière suivante; on suppose que f est surjective et qu'il existe $y \in \mathbb{S}^n$ tel que $f^{-1}(y)$ est fini. On note $x_1, \ldots, x_r$ les antécédents de y par f. On choisit un voisinage V de y et U_i des voisinages de x_i disjoints, tels que $f(U_i) \subset V$. Pour chaque i on a une application restreinte

$$f_*^{x_i} := H_n(f|_{U_i}) : H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \to H_n(V, V \setminus \{y\})$$

En utilisant l'excision et la suite exacte longue d'homologie on a $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \approx \mathbb{Z} \approx H_n(V, V \setminus \{y\})$; on note $\deg f|_{x_i}$ l'entier tel que $H_n(f|_{U_i})(1) = \deg f|_{x_i}$. Il s'appelle le degré local de f par rapport à x_i.

Proposition 2.6.3. $\deg f = \sum_{i=1}^r \deg f|_{x_i}$

Démonstration. On va s'appuyer sur le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \arrow[r, "f_*^{x_i}"] \arrow[dl, "\iota_*^{x_i}"'] \arrow[d, "k_i"] & H_n(V, V \setminus \{y\}) \arrow[d, "\iota_*^V"] \\
H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{x_i\}) & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus f^{-1}(y)) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "f_*^y"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{y\}) \\
 & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[ul, "j^{x_i}"] \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f_*"'] & H_n(\mathbb{S}^n). \arrow[u, "j^y"']
\end{tikzcd}$$

Par excision, $i_*^V, i_*^{x_i}$ sont des isomorphismes. Par la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, j^y et j^{x_i} sont également des isomorphismes. On choisit $[e_n]$ un générateur de $H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ que l'on transporte via $i_*^V, i_*^{x_i}, j^y et j^{x_i}$ comme générateurs de $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$, $H_n(V, V \setminus \{y\})$ $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{x_i\})$ et $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{y\})$, de telle manière que en prenant ces choix de générateurs les applications mentionnées sont des identités. Plus précisément on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}[e_n^i] = H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \arrow[r, "\times \deg f|_{x_i}"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "k_i"] & \mathbb{Z}[e_n^y] = H_n(V, V \setminus \{y\}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathbb{Z}[e_n^i] = H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{x_i\}) & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus f^{-1}(y)) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "f_*^y"] & \mathbb{Z}[e_n^y] = H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{y\}) \\
 & \mathbb{Z}[e_n] = H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[ul, "\mathrm{id}"] \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\times \deg f"'] & \mathbb{Z}[e_n] = H_n(\mathbb{S}^n). \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

On note $W = \sqcup U_i$ et $S = \mathbb{S}^n \setminus f^{-1}(y)$. On a un isomorphisme (en utilisant l'excision)

$$H_n(\mathbb{S}^n, S) \cong H_n(W, \sqcup_{i=1}^r U_i \setminus \{x_i\}) \cong \bigoplus_{i=1}^r H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \cong \bigoplus_{i=1}^r H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus \{x_i\})$$

où l'isomorphisme de droite est donné par $\oplus i_*^{x_i}$, où chaque $i_*(x_i)$ est un isomorphisme et celui de gauche par $\sum k_i$. Ainsi

$$H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \setminus f^{-1}(y)) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}[e_n^i]$$

et k_i est l'inclusion canonique de la i-ème composante et p_i la projection canonique sur la i-ème composante. On en déduit donc que

$$j([e_n]) = \sum_{i=1}^r [e_n^i].$$

En particulier on a

$$f_*^y([e_n^i]) = \deg f|_{x_i}[e_n^y], \quad \text{et} \quad f_*^y(j([e_n])) = \sum_{i=1}^r (\deg f|_{x_i})[e_n^y] = \deg f[e_n^y].$$

□

Proposition 2.6.4. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ il existe une application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de degré k.*

Démonstration. Pour $n = 1$ il suffit de prendre $z \mapsto z^k$ qui est de degré k. Pour $n > 1$ on choisit k boules $\mathbb{D}^n$ dans la sphère $\mathbb{S}^n$ et un plongement $j = \sqcup j_i : \sqcup_{i=1}^k \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$. On note $X = \mathbb{S}^n \setminus \operatorname{im} j$. On a $\mathbb{S}^n/X \cong \vee_{i=1}^k \mathbb{S}^n$ on note $q = \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/X$ la projection, et $\rho : \vee\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ qui vaut l'identité sur chaque sphère. On note $\{x_0\}$ le point base (par exemple le pole sud). Calculons le degré de $f = \rho \circ q : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Pour $y \neq x_0$ on a $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, chaque x_i dans l'image d'un des $\mathbb{D}^n$. Il existe U_i voisinage de x_i dans $\mathbb{D}^n$ (et donc dans $\mathbb{S}^n$) et U voisinage de y tel que $f : U_i \to U$ est un homéomorphisme. Quitte à composer j_i par une réflexion, on peut supposer que $\deg f|_{x_i} = 1$ (ou $\deg f|_{x_i} = -1$). Cela permet donc de construire une application f telle que $\deg f = \sum \deg f_{x_i}$ de degré k ou $-k$ si $k > 0$. Par ailleurs pour $k = 0$ il suffit de prendre une application constante. □

Proposition 2.6.5. *Le degré de l'application $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ obtenu par composition*

$$\mathbb{S}^n \xrightarrow{q_n} P_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\pi_n} P_n(\mathbb{R})/P_{n-1}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}^n$$

est $\epsilon(1 + (-1)^{n+1})$ avec $\epsilon = \pm 1$.

Démonstration. On rappelle que $P_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n/x \sim -x$ est homéomorphe à l'espace topologique obtenu à partir de $P_{n-1}(\mathbb{R})$ par l'attachement d'une cellule de dimension n le long de la projection $q_{n-1} : \mathbb{S}^{n-1} \to P_{n-1}(\mathbb{R})$ On note $\alpha : P_n(\mathbb{R}) \to P_{n-1}(\mathbb{R}) \cup_{q_{n-1}} \mathbb{D}^n$ cet homéomorphisme. Modulo un homéomorphisme de $\mathbb{S}^n$, on peut écrire $g = \pi \circ \alpha \circ q_n$ où $\pi : P_{n-1}(\mathbb{R}) \cup_{q_{n-1}} \mathbb{D}^n \to P_{n-1}(\mathbb{R}) \cup_{q_{n-1}} \mathbb{D}^n/P_{n-1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^n$. On note x_0 le point base de $\mathbb{S}^n$ (qui correspond au point $\{P_{n-1}(\mathbb{R})/P_{n_1}(\mathbb{R})\}$). Fixons y un point de $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$. on a $g^{-1}(y) = \{y, -y\}$. Il existe un voisinage V de y et un voisinage W_+ et W_- tel que $g|_{W_+} : W_+\epsilon \to V$ soit homotope à l'identité et $g|_{W_-} : W_- \to V$ soit homotope à l'application antipodale. Ainsi $\deg g = \deg g|_y + \deg g_{-y} = 1 + (-1)^{n+1}$. Donc $\deg g = 0$ si n est pair et $\deg g = 2$ si n est impair. Comme tout a été fait à homéomorphisme près on en déduit le résultat. □

2.7 Attachement cellulaire et homologie

Petit rappel (exo 3 feuille 9), ou Hatcher, Proposition 2.22,

Définition 2.7.1. On dit que la paire (X, A) est **une bonne paire** si A est fermé dans X et s'il existe un voisinage ouvert V de A tel que V se rétracte par déformation sur A.

Théorème 2.7.2. *Si (X, A) est une bonne paire, alors l'application quotient*

$$q : (X, A) \to (X/A, A/A)$$

induit un isomorphisme en homologie. En particulier $H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n(X/A)$.

Corollaire 2.7.3. *Si $(X_j, x_j)_{j \in J}$ sont des bonnes paires, alors*

$$\bigoplus_j \iota_j : \bigoplus_j \widetilde{H}(X_j) \to \widetilde{H}(\bigvee_j X_j)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On sait déjà que $\oplus_i H_n(X_i, \{x_i\}) \to H_n(\sqcup_i X_i, \sqcup_i \{x_i\})$ est un isomorphisme. Puis on utilise la théorème précédent. □

Théorème 2.7.4. *Soit X un espace topologique $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ une application continue et $Y = X \cup_f \mathbb{D}^n$ l'espace obtenu à partir de X en attachant une n cellule le long de f. On a*

1. *Pour tout $q \neq n, n-1$, $\widetilde{H}_q(Y) = \widetilde{H}_q(X)$*
2. *On a une suite exacte*

$$0 \to \widetilde{H}_n(X) \to \widetilde{H}_n(Y) \to H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(Y) \to 0$$

Démonstration. Notons $\Phi : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (Y, X)$ le morphisme de paires d'espaces topologiques obtenu par l'attachement cellulaire. On rappelle que Φ induit un homéomorphisme $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1} \to Y/X$. En particulier, il induit un homéomorphisme $\mathbb{S}^n \to Y/X$. Comme (Y, X) est une bonne paire, on a

$$H_k(Y,X) \cong \widetilde{H}_k(Y/X) \cong \widetilde{H}_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit la suite exacte longue associée à la paire (Y, X)

$$\ldots \to H_{k+1}(Y,X) \to \widetilde{H}_k(X) \to \widetilde{H}_k(Y) \to H_k(Y,X) \to \ldots$$

Ce qui donne $\widetilde{H}_k(X) \to \widetilde{H}_k(Y)$ est un isomorphisme pour $k \neq n, n-1$. La fonctorialité de la longue suite exacte associée à une paire appliquée au morphisme de paire $\Phi : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (Y, X)$ donne le diagramme commutatif de suites exactes suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{H}_n(X) \arrow[r] & \widetilde{H}_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,X) \arrow[r, "\partial^X"] & \widetilde{H}_{n-1}(X) \arrow[r] & \widetilde{H}_{n-1}(Y) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & \underbrace{\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^{n-1})}_{=0} \arrow[r] \arrow[u] & \underbrace{\widetilde{H}_n(\mathbb{D}^n)}_{=0} \arrow[r] \arrow[u] & H_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "\partial^{\mathbb{S}^{n-1}}", "\cong"'] \arrow[u, "\Phi_*"] & \underbrace{\widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}_{=\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[u, "H_{n-1}(f)"] & \underbrace{\widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{D}^n)}_{=0} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Ce qui permet d'obtenir la suite exacte

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(Y) \xrightarrow{\partial^{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi_*^{-1} j_*} \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} \widetilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(Y) \longrightarrow 0$$

□

On peut montrer par récurrence le corollaire suivant, mais l'on verra une démonstration plus simple lorsque l'on abordera l'homologie cellulaire.

Corollaire 2.7.5. *Soit $n \geq 1$*

$$\widetilde{H}_k(P_n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{si } k \text{ impair} < n, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } k = n \text{ et } n \text{ impair}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

3 Homologie cellulaire

3.1 Définition

Dans toute cette partie X est un CW-complexe.

Fin du cours du 13 mai

Proposition 3.1.1. *1. $H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = 0, \forall k \neq n$. De plus $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de base $e^n_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_n$.*

2. $H_k(X^{(n)}) = 0, \forall k > n$; si X est de dimension finie N, alors $H_k(X) = 0, \forall k > N$.

3. L'inclusion canonique $X^{(n)} \to X$ induit un isomorphisme $H_k(X^{(n)}) \to H_k(X)$ pour tout $k < n$.

Démonstration. Par le théorème 2.7.2 la projection $(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \to (X^{(n)}/X^{(n-1)}, *)$ induit un isomorphisme en homologie, et l'espace topologique $X^{(n)}/X^{(n-1)}$ est homéomorphe à un bouquet de sphères de dimenion n, indexé par les cellules de dimension n du CW-complexe X, donc

$$H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \oplus_{\mathcal{A}_n} \widetilde{H}_k(\mathbb{S}^n).$$

Le deuxième point se démontre par récurrence sur n. Pour $n = 0$ comme $X^{(0)}$ est un espace discret, le résultat est évident. Pour $n > 0$, la suite exacte longue associée à la paire $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ donne

$$\ldots \to H_k(X^{(n-1)}) \to H_k(X^{(n)}) \to H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \to \ldots$$

L'hypothèse de récurrence et le point 1) implique que pour $k > n$ on a $H_k(X^{(n)}) = 0$. Si X est de dimension finie N alors $X = X^{(N)}$ et $H_k(X) = 0, \forall k > N$.

Montrons le point 3. Remarquons que la suite exacte longue associée à la paire $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$ donne

$$\ldots \to H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \to H_k(X^{(n)}) \to H_k(X^{(n+1)}) \to H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)})$$

donc pour $k < n$ le morphisme $H_k(X^{(n)}) \to H_k(X^{(n+1)})$ induit par l'injection canonique est un isomorphisme. Il en va de même pour le morphisme induit par l'injection canonique $H_k(X^{(n)}) \to H_k(X^{(N)})$, si $n \leq N$. Donc, si X est de dimension finie N, le résultat est démontré. Supposons que X est quelconque et considérons c un k-cycle de X avec $k < n$. Notons $c = \sum_i \lambda_i e_{\sigma_i}$ avec $\sigma_i : \Delta^k \to X$ continue. Comme Δ^k est compact il en va de même pour $\sigma_i(\Delta^k)$. Par un théorème démontré dans la partie CW-complexe, on en déduit que $\sigma_i(\Delta^k)$ intersecte un nombre fini de cellules. Comme il y un nombre fini d'entiers λ_i non nuls, on en déduit qu'il existe N tel que $c \in C_k^{sing}(X^{(N)})$. On peut prendre $N > n > k$. Comme $H_k(X^{(n)}) \to H_k(X^{(N)})$ est un isomorphisme, il existe un unique $d \in C_k^{sing}(X^{(n)})$ tel que $\iota_*([d]) = [c]$. Ainsi $H_k(X^{(n)}) \to H_k(X)$ est un isomorphisme.

□

Proposition 3.1.2. *La composée*

$$d_n : H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{(n-1)}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$$

vérifie $d_n d_{n+1} = 0$.

Démonstration. La suite exacte longue associée à la paire $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ et le fait que $H_n(X^{(n-1)}) = 0$ donnent une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_n(X^{(n)}) \xrightarrow{j_n} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{(n-1)})$$

Ainsi

$$d_n \circ d_{n+1} = j_{n-1} \circ \underbrace{\partial_n \circ j_n}_{=0} \circ \partial_{n+1} = 0$$

Comme le montre le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & \\
& H_n(X^{(n)}) \arrow[dr, "j_n"] & & & \\
H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\partial_n"'] & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \\
& & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[ur, "j_{n-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Définition 3.1.3. On note $H_n^{CW}(X)$ l'homologie en degré n du complexe ainsi obtenu, appelé homologie cellulaire du CW-complexe X.

Théorème 3.1.4. *Pour tout $n \geq 0$, on a $H_n^{CW}(X) = H_n^{sing}(X)$.*

Démonstration. On rappelle que $H_n^{sing}(X) = H_n^{sing}(X^{(n+1)})$. La suite exacte longue associée à la paire $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$ donne

$$H_{n+1}^{sing}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n^{sing}(X^{(n)}) \xrightarrow{i_n} H_n^{sing}(X^{(n+1)}) \longrightarrow 0$$

Donc

$$H_n^{sing}(X^{(n+1)}) \cong H_n^{sing}(X^{(n)}) / \operatorname{im}(\partial_{n+1})$$

Par ailleurs, comme $j_n : H_n(X^{(n)}) \to H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ est injective elle induit un isomorphisme entre $H_n(X^{(n)})$ et $\operatorname{im}(j_n) = \ker \partial_n$ et aussi un isomorphisme entre $\operatorname{im}(\partial_{n+1})$ et $\operatorname{im}(j_n \circ \partial_{n+1}) = \operatorname{im} d_{n+1}$. Enfin j_{n-1} étant injective on a $x \in \ker d_n = \ker(j_{n-1} \circ \partial_n) \iff x \in \ker \partial_n$. Conclusion j_n induit un isomorphisme

$$H_n^{sing}(X) = H_n^{sing}(X^{(n)}) / \operatorname{im}(\partial_{n+1}) \to \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = H_n^{CW}(X).$$

□

Corollaire 3.1.5. *On a $H_n(X) = 0$ si X ne possède pas de n-cellules; et si X possède k n-cellules alors $H_n(X)$ est un groupe abélien de type fini engendré par au plus k éléments.*

Démonstration. $H_n(X)$ est un quotient d'un sous-groupe du groupe abélien libre engendré par les n-cellules de X. Or tout sous-groupe d'un groupe abélien libre de rang k est libre de rang $k' \leq k$. Et un quotient d'un groupe libre de rang k' est engendré par au plus k' éléments. $\square$

Exemples:

$$H_k(P_n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 2p \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $n > 1$

$$H_k(S^n \times S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 2n \\ \mathbb{Z}^2, & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.2 Calcul de la différentielle

Soit X un CW-complexe et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble de ses n-cellules.

Pour $\alpha \in \mathcal{A}_n, \beta \in \mathcal{A}_{n-1}$ on note $\Delta_{\alpha\beta}$ l'application obtenue par composition des applications

$$\mathbb{S}^{n-1}_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{(n-1)} \xrightarrow{q} X^{(n-1)}/X^{(n-2)} \approx \vee_{\beta \in \mathcal{A}_{n-1}} \mathbb{S}^{n-1}_\beta \xrightarrow{pr_\beta} \mathbb{S}^{n-1}_\beta$$

et l'on note $d_{\alpha\beta}$ le degré de $\Delta_{\alpha\beta}$.

Proposition 3.2.1. *Pour $n \geq 2$,*

$$d_n(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{D}^n_\alpha, \partial\mathbb{D}^n_\alpha) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] \arrow[d, "H_n(\Phi_\alpha)"'] & \widetilde{H}_{n-1}(\partial\mathbb{D}^n_\alpha) \arrow[r, "(\Delta_{\alpha\beta})_*"] \arrow[d, "\widetilde{H}_{n-1}(\varphi_\alpha)"] & \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}_\beta) \\
H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \arrow[r, "\partial^X"] \arrow[dr, "d_n"'] & \widetilde{H}_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j_{n-1}"] & \widetilde{H}_{n-1}(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}) \arrow[u, "(pr_\beta)_*"'] \arrow[d, "\cong"] \\
 & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[ur, "w", "\cong"'] & H_{n-1}(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}, *)
\end{tikzcd}$$

Fixons $[D_n]$ un générateur de $H_n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z}$. On prendra $\lambda_{n-1} = \partial[D_n] \in H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ pour générateur, de telle manière que

$$(\Delta_{\alpha\beta})_*(\lambda_{n-1}) = d_{\alpha\beta}\lambda_{n-1}.$$

Remarquons que l'on peut choisir $e^{n-1}_\beta, \beta \in \mathcal{A}_{n-1}$ comme générateurs de $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ de telle manière que $(pr_\beta)_*(w(e^{n-1}_\beta)) = \lambda_{n-1}$. Notons $e^n_\alpha = [\Phi_\alpha(D_n)]$. C'est un générateur de $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$. Enfin, il existe des entiers $d'_{\alpha\beta}$ tels que: $d_n(e^n_\alpha) = \sum_\beta d'_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta$. D'une part

$$(pr_\beta)_* w d_n(e^n_\alpha) = (pr_\beta)_* q_* \partial^X[\Phi_\alpha(D_n)] = (\Delta_{\alpha\beta})_*(\partial[D_n]) = d_{\alpha\beta}\lambda_{n-1},$$

et d'autre part

$$(pr_\beta)_* w d_n(e^n_\alpha) = \sum_{\beta'} d'_{\alpha\beta'} (pr_\beta)_*(w(e^{n-1}_{\beta'})) = d'_{\alpha\beta}\lambda_{n-1},$$

donc $d'_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}$.

□

Remarque 3.2.2. Notons que $d_1 : H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \to H_0(X^{(0)})$ correspond à l'application qui à $[c]$ associe $[dc]$ où $c = \sum_i \lambda_i e_{\gamma_i}$ avec $\gamma_i : [0,1] \to X^{(1)}$ et $dc = \sum_i \lambda_i (e_{\gamma_i(1)} - e_{\gamma_i(0)}) \in X^{(0)}$. Si $X^{(0)} = \{*\}$ alors pour tout c on a $dc = 0$.

Corollaire 3.2.3.

$$H_k(P_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \textit{si } k \textit{ est impair et } k < n \\ \mathbb{Z} & \textit{si } k = 0, \\ \mathbb{Z} & \textit{si } k = n \textit{ et si } n \textit{ est impair,} \\ 0 & \textit{sinon .} \end{cases}$$

Démonstration. On a déjà vu le cas $n = 1$. puisque $P_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^1$. $P_n(\mathbb{R})$ possède une structure de CW-complexe ayant une k-cellule pour $k \leq n$. On a vu également que pour $k \leq n$, $P_n(\mathbb{R})^{(k)} \cong P_k(\mathbb{R})$ et que l'application d'attachement qui correspond à la cellule de dimension k est $\mathbb{S}^{k-1} \to P_{k-1}(\mathbb{R}) \to P_{k-1}(\mathbb{R})/P_{k-2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^{k-1}$ est de degré ± 2 pour k pair et de degré 0 pour k impair. Donc le complexe cellulaire associé à $P_n(\mathbb{R})$ est $C^{CW}_k(P_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ pour $0 \leq k \leq n$ avec $d_k = 0$ si k est impair et $d_k = \times(\pm 2)$ si k est pair. L'homologie de ce complexe est l'homologie indiquée dans l'énoncé du corollaire. □

3.3 Application de Mayer-Vietoris

Théorème 3.3.1. *Si $D \subset \mathbb{S}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{D}^k$ et $S \subset \mathbb{S}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^k$ avec $0 \leq k < n$ alors*

- $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus D) = 0$ *pour tout i.*
- $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus S) = \mathbb{Z}$ *si $i = n - k - 1$ et vaut 0 sinon.*

Démonstration. Montrons le point 1 par récurrence sur k. Si $k = 0$ alors $\mathbb{S}^n \setminus \{*\}$ est homotopiquement équivalent à $\mathbb{D}^n$, contractile donc le résultat est prouvé. Choisissons $h : I^k \to D$ un homéomorphisme. Notons

$$A_1 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times [0, \frac{1}{2}]),\ A_2 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$$

deux ouverts de $\mathbb{S}^n$. On a $A_1 \cap A_2 = \mathbb{S}^n \setminus D$ et $A_1 \cup A_2 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\})$. Par hypothèse de récurrence on a $\widetilde{H}_i({}_1A \cup A_2) = 0$. Ainsi la suite exacte longue de Mayer-Vietoris appliquée à l'espace topologique $A \cup A_2$ donne un isomorphisme

$$j_* : \widetilde{H}_k(A_1 \cap A_2) \to \widetilde{H}_k(A_1) \oplus \widetilde{H}_k(A_2)$$

pour tous k. Supposons par l'absurde qu'il existe $[x] \neq 0 \in \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus D)$ pour un certain i. Ce qui veut dire que $dx = 0$ et $\forall y \in C^{sing}_{i+1}(A_1 \cap A_2)$, on a $dy \neq x$. Comme $j([x] = [x]_{A_1} - [x]_{A_2} \neq 0$

on peut supposer par exemple $[x]_{A_1} \neq \{0\}$. On découpe à nouveau A_1 en deux parties $A_1 = A_{11} \cap A_{12}$ avec

$$A_{11} = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times [0, \frac{1}{4}]),\ A_{12} = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times [\frac{1}{4}], \frac{1}{2}).$$

Par un raisonnement par récurrence, on trouve une suite d'intervalles fermés enboités $J_l \subset [0,1]$ de taille $\frac{1}{2^l}$ tel que $\iota_l : \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus D) \to \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times J_l))$ envoie $\iota_l([x]) \neq 0$. Comme $\cap J_l = \{p\}$ et par hypothèse de récurrence $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})) = 0$, donc $\iota([x] = [0]$ où $\iota : \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus D) \to \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\}))$ est induite par les inclusions d'espaces topologiques. Donc il existe $y = \sum \lambda_r e_{\sigma_r} \in C_{i+1}^{sing}(\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\}))$ tel que $dy = x$. Mais $\sigma_r(\Delta^{i+1})$ est d'image compacte et $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})) = \cup_l \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times J_l))$, donc il existe l_r tel que $\sigma_r(\Delta^{i+1}) \subset \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times J_{l_r}))$. En prenant $l = \max_r l_r$ on obtient $\iota_l([x]) = 0$ ce qui est absurde.

Montrons le point 2 par récurrence sur k. Si $k = 0$, comme $\mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^0$ est homotopiquement équivalent à $\mathbb{S}^{n-1}$ le résultat est démontré. Ecrivons $S = D_1 \cup D_2$ avec D_1 et D_2 homéomorphes à $\mathbb{D}^k$ et $D_1 \cap D_2$ homéomorphe à $\mathbb{S}^{k-1}$. Notons $A_1 = \mathbb{S}^n \setminus D_1$ et $A_2 = \mathbb{S}^n \setminus D_2$ de telle sorte que $A_1 \cup A_2 = \mathbb{S}^n \setminus S'$ où S' est homéomorphe à une sphère de dimension $k-1$. Ecrivons la suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour l'espace topologique $A_1 \cup A_2$, sachant que $A_1 \cap A_2 = \mathbb{S}^n \setminus S$, et Par que l'homologie réduite de A_1 et A_2 est nulle par le point 1. Pour tout $i \geq 0$, on a l'isomorphisme

$$\widetilde{H}_{i+1}(\mathbb{S}^n \setminus S') \to \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus S)$$

Conclusion, par hypothèse de récurrence $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus S) = \widetilde{H}_{i+1}(\mathbb{S}^n \setminus S') = \mathbb{Z}$ si $i+1 = n-(k-1)-1$ et vaut 0 sinon. Mais $i+1 = n-k$ équivaut à $i = n-k-1$. $\square$