Homotopie, groupe fondamental et théorème de Seifert-Van Kampen

Contents

1 Homotopie	1
1.1 Applications homotopes	1
1.2 Type d'homotopie	2
1.3 Homotopie et adjonction cellulaire	4
2 Groupe fondamental	9
2.1 Chemins, lacets et groupe fondamental	9
2.2 Propriétés du groupe fondamental	10
2.3 Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^n$ pour $n \geq 2$	12
2.4 Le groupe fondamental du cercle	13
2.4.1 Théorème fondamental	13
2.4.2 Degré d'une application $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$	14
2.4.3 Applications	15
3 Le théorème de Van Kampen	15
3.1 Coproduit et pushout dans la catégorie des groupes	15
3.1.1 Produit libre de groupes	15
3.1.2 Somme amalgamée	16
3.2 Le théorème de Seifert Van Kampen	17
3.3 Applications	18

1 Homotopie

1.1 Applications homotopes

Remarque 1.1.1. On utilisera souvent sans le dire, par la suite, que si X, Y sont deux sous-espaces topologiques de Z (munis de la topologie induite) tels que $X \cup Y = Z$ (en tant qu'ensemble) et tel que la topologie sur Z coïncide avec la topologie finale par rapport aux inclusions $i_X : X \rightarrow Z$ et $i_Y : Y \rightarrow Z$ alors pour toutes applications continues $f : X \rightarrow T$ et $g : Y \rightarrow T$ avec $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X \cap Y$, il existe une unique application continue $\psi : Z \rightarrow T$ tel que $\psi(x) = f(x), \psi(y) = g(y)$ pour tous $x \in X, y \in Y$. Cela résulte précisément du fait que Z est le recollement de X et Y le long de leur intersection commune.

En particulier si X et Y sont fermés dans Z (ou X et Y sont ouverts dans Z) alors la topologie sur Z coïncide avec la topologie finale par rapport aux inclusions $i_X : X \rightarrow Z$. En effet: soit $F \subset Z$, tel que $X \cap F$ (resp. $Y \cap F$) est fermé dans X (resp. Y). Il existe F_X, F_Y fermés de Z tels que $X \cap F = X \cap F_X$ et $Y \cap F = Y \cap F_Y$. Alors $F = Z \cap F = (X \cup Y) \cap F = (X \cap F_X) \cup (Y \cap F_Y)$. Comme X, Y, F_X et F_Y sont fermés dans Z , il en résulte que F l'est aussi.

Définition 1.1.2. Deux applications continues f et $g : X \rightarrow Y$ sont **homotopes** s'il existe une application continue $F : X \times I$ telle que $F(x, 0) = f(x)$ et $F(x, 1) = g(x)$, pour tout $x \in X$. On note $f \simeq g$.

Exemple 1.1.3. a) $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ est homotope à une application constante. En effet, il suffit de considérer l'homotopie $\mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui à (x, t) associe tx .

b) Toute application continue, non surjective $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ est homotope à une application constante. En effet, fixons $v \in \mathbb{S}^n$ tel que $v \notin \text{Im}(f)$. On construit l'homotopie $H : X \times I \rightarrow \mathbb{S}^n$ définie par $H(x, t) = \frac{(1-t)f(x)+t(-v)}{\|(1-t)f(x)+t(-v)\|}$. Cette fonction est bien définie car une droite joignant deux points de la sphère $\mathbb{S}^n$ rencontre $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement si ces deux points sont opposés. Donc pour tout $t \in [0, 1]$, pour tout $x \in X$ on a $(1-t)f(x) + t(-v) \neq 0$.

Définition 1.1.4. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues, $A \subset X$ et $f|_A = g|_A$. On dit que f est homotope à g relativement à A s'il existe une homotopie $F : X \times I \rightarrow Y$ telle que $F(a, t) = f(a) = g(a), \forall a \in A$. On note $f \simeq_A g$.

Proposition 1.1.5. Soient X, Y deux espaces topologiques, $A \subset X$ et $\psi : A \rightarrow Y$ une application continue. On note $\mathcal{C}(X, Y)_\psi$ l'ensemble des applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que $f|_A = \psi$. L'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X, Y)_\psi$. On note $[X, Y]_\psi$ le quotient de $\mathcal{C}(X, Y)_\psi$ par cette relation d'équivalence.

Démonstration. La relation est

- Réflexive: il suffit de prendre $H : X \times I \rightarrow Y$ définie par $H(x, t) = f(x)$.
- Symétrique. Si H est une homotopie de f à g relativement à A , alors $\bar{H} : X \times I \rightarrow Y$ définie par $\bar{H}(x, t) = H(x, 1-t)$ est une homotopie de g à f relativement à A .
- Transitive. Fixons H une homotopie de f à g relativement à A et K une homotopie de g à h relativement à A . On note $H * K$ l'application

$$(H * K)(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ K(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Elle est continue par la remarque 1.1.1 et est une homotopie de f à h relativement à A . $\square$

Remarque 1.1.6. Dans la démonstration précédente, on peut aussi définir pour $0 < a < 1$ l'application continue $H *_a K$ de la manière suivante

$$(H *_a K)(x, t) := \begin{cases} H(x, \frac{t}{a}), & 0 \leq t \leq a, \\ K(x, \frac{t-a}{1-a}), & a \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Elle est continue par la remarque 1.1.1 et est une homotopie de f à h relativement à A .

Remarque 1.1.7. Si $A = \emptyset$ on notera $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $[X, Y]$ le quotient de $\mathcal{C}(X, Y)$ par la relation d'équivalence $\simeq$.

Si (X, x_0) et (Y, y_0) sont des espaces pointés, en prenant $A = \{x_0\}$ et ψ l'application qui à x_0 associe y_0 , on note $\mathcal{C}_*(X, Y)$ l'ensemble des applications pointées et $[X, Y]_*$ le quotient par la relation d'équivalence $\simeq_{x_0}$ notée aussi $\simeq_*$.

Exemple: $[*, X]$ est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes par arcs de X et $[*, X]_*$ est un singleton.

1.2 Type d'homotopie

Définition 1.2.1. Deux espace topologiques X et Y ont **même type d'homotopie** ou sont **homotopiquement équivalents** s'il existe $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ continues telles que $fg \simeq \text{id}_Y$ et $gf \simeq \text{id}_X$. On dit que f et g sont des **équivalences d'homotopie**. On notera par la suite $X \simeq Y$ pour indiquer que les deux espaces X et Y sont homotopiquement équivalents.

Remarque 1.2.2. Deux espaces homéomorphes sont homotopiquement équivalents.

Proposition 1.2.3. *L'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence.*

Démonstration. La réflexivité et la symétrie sont immédiates. Il reste à démontrer la transitivité qui est une conséquence du lemme qui suit. $\square$

Lemme 1.2.4. *Soient $f, g : X \rightarrow Y$, $h : Y \rightarrow Z$ et $k : T \rightarrow X$ toutes continues. Si $f \simeq g$ alors $hf \simeq hg$ et $fk \simeq gk$.*

Démonstration. Fixons $H : X \times I \rightarrow Y$ une homotopie de f à g . Alors $h \circ H : X \times I \rightarrow Z$ est une homotopie de hf à hg et $H \circ (k \times \text{id}_I) : T \times I \rightarrow Y$ est une homotopie de fk à gk . $\square$

Corollaire 1.2.5. *La donnée des ensembles $[X, Y]$ pour X et Y des espaces topologiques, fournit une catégorie appelée la **catégorie homotopique** des espaces topologiques.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la composition est bien définie: Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications continues. On veut poser $[g] \circ [f] := [g \circ f]$ où $[f]$ désigne la classe de f modulo la relation d'homotopie. Le lemme 1.2.4 permet de conclure que cette définition a un sens, que la composition ainsi définie est associative et possède une identité pour tout X donnée par $[\text{id}_X]$. $\square$

Exemple 1.2.6. : $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$. On considère $\iota : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'inclusion et $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ définie par $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. On a $r \circ \iota = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ et $\iota \circ r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui à x associe $\frac{x}{\|x\|}$ est homotopie à l'identité via l'homotopie $H : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ définie par $H(x, t) = t \frac{x}{\|x\|} + (1-t)x$.

Définition 1.2.7. X est **contractile** si l'espace topologique X est homotopiquement équivalent à un singleton ($X \simeq *$).

Lemme 1.2.8. X est contractile si et seulement si il existe $x_0 \in X$ tel que $\text{id}_X \simeq c_{x_0}$.

Démonstration. Supposons que X soit contractile. Il existe des applications continues $f : \{*\} \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow \{*\}$ tel que $f \circ g \simeq \text{id}_X$ et $g \circ f \simeq \text{id}_{\{*\}}$. Remarquons que la donnée de l'application f équivaut à la donnée d'un point x_0 dans X et qu'ainsi $f \circ g$ est l'application constante c_{x_0} . Réciproquement si $\text{id}_X \simeq c_{x_0}$, alors en posant $f(*) = x_0$ et $g : X \rightarrow \{*\}$ l'unique application continue de X dans l'espace topologique singleton, alors $f \circ g \simeq \text{id}_X$ et $g \circ f = \text{id}_{\{*\}}$. $\square$

Définition 1.2.9. Soit A un sous espace topologique de X , on note $\iota : A \rightarrow X$ l'injection canonique. A est un **rétracte de X** s'il existe $r : X \rightarrow A$ tel que $r\iota = 1_A$. r s'appelle une rétraction.

A est un **rétracte par déformation** si de plus $\iota r \simeq 1_X$. r s'appelle rétraction par déformation.

A est un **rétracte par déformation forte** si de plus $\iota r \simeq_A 1_X$. r s'appelle rétraction par déformation forte.

Par exemple $\mathbb{S}^{n-1}$ est un rétracte par déformation forte de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et la rétraction r a été donnée en 1.2.6.

Remarque 1.2.10. Par définition, si A est un rétracte par déformation alors ι est une équivalence d'homotopie, car $\iota r \simeq 1_X$ et $r\iota = 1_A$.

Proposition 1.2.11. $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ se prolonge en une application continue $g : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow X$ si et seulement si f est homotope à une application constante.

Démonstration. Supposons qu'il existe $g : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow X$ qui prolonge f . Soit $H : \mathbb{D}^{n+1} \times I \rightarrow X$ l'application définie par $H(x, t) = g(tx)$. H est continue et est une homotopie de l'application constante $c_{g(0)}$ à g . Donc en se restreignant à $\mathbb{S}^n$ on obtient $c_{g(0)} \simeq f$. Réciproquement, supposons que $c_{x_0} \simeq f$ pour un certain $x_0 \in X$. Soit $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$ une homotopie de c_{x_0} à f . Considérons l'application $g : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow X$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} H(\frac{x}{\|x\|}, 2\|x\| - 1), & \|x\| \geq \frac{1}{2} \\ x_0, & \|x\| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

En utilisant la remarque 1.1.1 et les observations suivantes

- $\mathbb{D}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| \leq \frac{1}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$
- $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{S}^n \times I$ qui x associe $(\frac{x}{\|x\|}, 2\|x\| - 1)$ est un homéomorphisme,

On obtient que g est continue. De plus $g|_{\mathbb{S}^n} = f$, ce que l'on voulait démontrer. $\square$

1.3 Homotopie et adjonction cellulaire

Une **paire d'espaces topologiques** (Y, A) est la donnée d'un espace topologique Y et d'un sous-espace $A \subset Y$. On peut définir une catégorie de paires d'espaces topologiques, où un morphisme de paires $(Y, A) \rightarrow (Y', A')$ est une application continue $f : Y \rightarrow Y'$ vérifiant $f(A) \subset A'$.

Définition 1.3.1 (Propriété d'extension des homotopies). On dit que la paire (Y, A) admet la **propriété d'extension des homotopies** si pour tout applications continues $g : Y \rightarrow Z$ et $G : A \times I \rightarrow Z$ telles que $G(a, 0) = g(a), \forall a \in A$, il existe une application continue $H : Y \times I \rightarrow Z$ telle que $H(y, 0) = g(y), \forall y \in Y$ et $H(a, t) = G(a, t), \forall a \in A, t \in [0, 1]$.

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \longrightarrow & A \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y \times \{0\} & \longrightarrow & Y \times I \\ & \searrow g & \downarrow H \\ & & Z \end{array}$$

(Note: In the original image, there is a curved arrow labeled G from A x I to Z, and a curved arrow labeled g from Y x {0} to Z. The arrow H is dashed.)

Remarque 1.3.2. Attention, dans la définition ci-dessus on n'exige pas l'unicité pour le prolongement H .

Proposition 1.3.3. La paire (Y, A) admet la propriété d'extension des homotopies si et seulement si $\iota : Y \cup_A A \times I \rightarrow Y \times I$ admet une rétraction.

Démonstration. Supposons que ι admette une rétraction $r : Y \times I \rightarrow Y \cup_A A \times I$. En particulier $r(y, 0) = y$ et $r(a, t) = (a, t)$ pour tout $y \in Y, a \in A$ et $t \in I$.

Par propriété universelle du pushout $Y \cup_A A \times I$ il existe une unique application continue $K : Y \cup_A A \times I \rightarrow Z$ telle que $K(y) = g(y)$ et $K(a, t) = G(a, t), \forall y \in Y, a \in A, t \in I$. On pose alors $H = K \circ r$. On a: $H(y, 0) = K(r(y, 0)) = K(y) = g(y)$ et $H(a, t) = K(a, t) = G(a, t)$. Donc H vérifie les propriétés voulues.

Supposons que (Y, A) vérifie la propriété d'extension des homotopies et posons $Z = Y \cup_A A \times I$ avec $g : Y \rightarrow Z$ et $G : A \times I \rightarrow Z$ les morphismes canoniques. On a alors l'existence de

$H : Y \times I \rightarrow Z$ qui vérifie $H(y, 0) = g(y)$ et $H(x, t) = G(x, t)$. Par ailleurs $H \circ \iota : Z \rightarrow Z$ coïncide avec les morphismes canoniques sur Y et $X \times I$ donc par propriété universelle de Z il n'y a que l'identité qui satisfait cette propriété. Ainsi $H \circ \iota = \text{id}_Z$ et H est une rétraction de ι . $\square$

Corollaire 1.3.4. *La paire $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ vérifie la propriété d'extension des homotopies.*

Démonstration. On construit une rétraction r de l'injection canonique $\mathbb{D}^n \cup_{\mathbb{S}^{n-1}} (\mathbb{S}^{n-1} \times I) \rightarrow \mathbb{D}^n \times I$ en considérant la projection radiale issue de $A = (0, \dots, 0, 2)$. Plus précisément $r : \mathbb{D}^n \times I \rightarrow \mathbb{D}^n \times \{0\} \cup_{\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}} (\mathbb{S}^{n-1} \times I)$ est définie par

$$r(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{t-2}{\|x\|} + 2 \right) & \text{si } \|x\| \geq \frac{2-t}{2} \\ \left(\frac{2x}{2-t}, 0 \right) & \text{si } \|x\| \leq \frac{2-t}{2} \end{cases}$$

On remarque que r est continue grâce à la remarque 1.1.1. $\square$

Lemme 1.3.5. *Soit (Y, A) une paire d'espace topologique et*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\phi} & Y' \end{array}$$

un carré cocartésien, tel que (Y', A') est une paire d'espace topologique. Si (Y, A) vérifie la propriété d'extension des homotopies, il en est de même pour la paire (Y', A') .

Remarquons que pour que (Y', A') soit une paire il faut que l'injection canonique $A' \rightarrow Y'$ réalise un homéomorphisme sur son image. Ceci est vrai par exemple si A est fermé (ou ouvert) dans Y .

Démonstration. Fixons $g : Y' \rightarrow Z$ et $G : A' \times I \rightarrow Z$ tels que $G(a', 0) = g(a'), \forall a' \in A'$. On rappelle que $Y' = Y \cup_f A'$ et que (Y', A') est une paire d'espaces topologiques. Puisque I est compact, $Y' \times I$ est homéomorphe à $(Y \times I) \cup_{f \times I} (A' \times I)$. Ainsi, pour construire $H : Y' \times I \rightarrow Z$ continue, il suffit de construire des applications continues $H_{A'} : A' \times I \rightarrow Z$ et $H_Y : Y \times I \rightarrow Z$, vérifiant: $\forall a \in A, H_Y(a, t) = H_{A'}(f(a), t)$. On pose $H_{A'} = G$. Par propriété d'extension des homotopies de la paire (Y, X) , il existe $H_Y : Y \times I \rightarrow Z$ tel que $H_Y(a, t) = G(f(a), t)$ et $H_Y(y, 0) = g(\phi(y))$, car $G(f(a), 0) = g(f(a)) = g(\phi(a))$, pour tout $a \in A$. Donc $H : Y' \times I \rightarrow Z$ existe. Vérifions qu'il a les bonnes propriétés. Pour $a' \in A'$, on a $H(a', t) = H_{A'}(a', t) = G(a', t)$. Pour $y' \in Y'$, calculons $H(y', 0)$. Si $y' = \phi(y)$ avec $y \in Y$, on a $H(y', 0) = H(\phi(y), 0) = H_Y(y, 0) = g(\phi(y)) = g(y')$; si $y' \in A'$, on a $H(y', 0) = H_{A'}(y', 0) = G(y', 0) = g(y')$. Donc H étend l'homotopie G et coïncide en 0 avec g . $\square$

Corollaire 1.3.6. *Si $Y = A \cup_{\phi} \mathbb{D}^n$ alors la paire (Y, A) admet la propriété d'extension des homotopies.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'application précédente. $\square$

Proposition 1.3.7. *Si (Y, A) admet la propriété d'extension des homotopies et si A est contractile alors $q : Y \rightarrow Y/A$ est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. Notons $i_A : A \rightarrow Y$ l'inclusion canonique. Comme A est contractile, il existe $a_0 \in A$ et une homotopie $H : A \times I \rightarrow A$ de id_A à c_{a_0} . Ainsi $i_A \circ H$ est une homotopie de i_A à c_{a_0} . Par la propriété d'extension des homotopies, il existe une homotopie $K : Y \times I \rightarrow Y$, de source id_Y , coïncidant avec H sur A , en particulier, pour tout $a \in A$ on a $K(a, t) \in A$ et $K(a, 1) = a_0$. L'application g définie par $g(y) = K(y, 1)$, $\forall y \in Y$, est continue et induit une application continue $\bar{g} : Y/A \rightarrow Y$. Remarquons qu'en notant $q : Y \rightarrow Y/A$ la projection canonique on a $\bar{g}q(y) = K(y, 1)$ donc $\bar{g}q \simeq id_Y$. Par ailleurs $\forall (a, t) \in A \times I$, $(q \circ K)(a, t) = [a_0] \in Y/A$. Donc l'application $q \circ K : Y \times I \rightarrow Y/A$ passe au quotient par la relation engendrée par $(a, t)\mathcal{R}(b, t), \forall a, b \in A$. Comme I est compact on a $Y \times I/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $Y/A \times I$. Donc $q \circ K$ induit une application continue $\bar{K} : (Y/A) \times I \rightarrow Y/A$ qui est une homotopie de $id_{Y/A}$ à $q\bar{g}$. Conclusion: q est une équivalence d'homotopie. $\square$

Fin du cours du 18 février

Proposition 1.3.8. *Si les paires (Y, B) et (B, A) admettent la propriété d'extension des homotopies, il en est de même pour la paire (Y, A) .*

Démonstration. Soit Z un espace topologique. Fixons des applications continues $g : Y \rightarrow Z$ et $G : A \times I \rightarrow Z$ telles que $G(a, 0) = g(a), \forall a \in A$.

La paire (B, A) admet la propriété d'extension des homotopies, donc il existe $H_B : B \times I \rightarrow Z$ telle que $H_B(a, t) = G(a, t), \forall a \in A$ et $H_B(b, 0) = g|_B(b) = g(b)$, pour tout $b \in B$. De même en considérant la paire (Y, B) , il existe $H_Y : Y \times I \rightarrow Z$ telle que $H_Y(b, t) = H_B(b, t), \forall b \in B$, et $H_Y(y, 0) = g(y)$. L'homotopie H_Y étend bien l'homotopie G en une homotopie sur Y qui coïncide avec g au temps $t = 0$. $\square$

Corollaire 1.3.9. *Si Y est obtenu à partir de A par un nombre fini d'adjonctions cellulaires, alors (Y, A) vérifie la propriété d'extension des homotopies. Si de plus A est contractile alors $q : Y \rightarrow Y/A$ est une équivalence d'homotopie.*

Lemme 1.3.10. *Soient $K, K', K'' : X \times I \rightarrow Y$ trois applications continues, vérifiant $K(x, 1) = K'(x, 0)$ et $K'(x, 1) = K''(x, 0)$ pour tout $x \in X$. Soit $0 < a < b < 1$ et $0 < a' < b' < 1$ des réels. On note*

$$(K *_a K' *_b K'')(x, t) = \begin{cases} K(x, \frac{t}{a}) & \text{si } 0 < t < a \\ K'(x, \frac{t-a}{b-a}) & \text{si } a < t < b \\ K''(x, \frac{t-b}{1-b}) & \text{si } b < t < 1 \end{cases}$$

On a $K *_a K' *_b K'' \simeq_{X \times \{0,1\}} K *_a K' *_b K''$.

Démonstration. On définit $R : X \times I \times I \rightarrow Y$ par

$$R(x, s, t) = (K *_a K' *_b K'')(x, s).$$

On montre que R est continue, que

$$R(x, s, 0) = (K *_a K' *_b K'')(x, s); R(x, s, 1) = (K *_a K' *_b K'')(x, 1)$$

et $R(x, 0, t) = K(x, 0); R(x, 1, t) = K''(x, 1)$. $\square$

Corollaire 1.3.11. *Soient $K, K', K'' : X \times I \rightarrow Y$ trois applications continues, vérifiant $K(x, 1) = K'(x, 0)$ et $K'(x, 1) = K''(x, 0)$ pour tout $x \in X$. Soient $0 < a, b < 1$ deux réels. On a $(K *_a K') *_b K'' \simeq_{X \times \{0,1\}} K *_a (K' *_b K'')$.*

Démonstration. On a $(K *_a K') *_b K'' = K *_a K' *_b K''$ et $K *_a (K' *_b K'') = K *_a (K' *_a(1-b) K'')$, et on peut utiliser le lemme précédent. $\square$

Lemme 1.3.12. *Soit $K : X \times I \rightarrow Y$ une application continue. On note $\bar{K} : X \times I \rightarrow Y$ l'application continue qui à (x, t) associe $K(x, 1-t)$. Avec les notations de la remarque 1.1.6, on a $K *_a \bar{K} \simeq_{X \times \{0,1\}} K_0$ où $K_0 : X \times I \rightarrow Y$ est l'application continue qui à (x, t) associe $K(x, 0)$.*

Démonstration. Soit $(x, s, t) \in X \times I \times I$ posons

$$R(x, s, t) = \begin{cases} K(x, \frac{s}{a}) & \text{si } 0 \leq s \leq a(1-t) \\ K(x, 1-t) & \text{si } a(1-t) \leq s \leq a(1-t) + t \\ \bar{K}(x, \frac{s-a}{1-a}) = K(x, \frac{1-s}{1-a}) & \text{si } a(1-t) + t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Notons

$$X_1 = \{(x, s, t) \in X \times I^2; 0 \leq s \leq a(1-t)\}; X_2 = \{(x, s, t) \in X \times I^2; a(1-t) \leq s \leq a(1-t) + t\}$$

$$X_3 = \{(x, s, t) \in X \times I^2; a(1-t) + t \leq s \leq 1\}$$

Ces trois sous-espaces sont fermés dans $X \times I^2$ donc comme les applications $K(x, \frac{s}{a})$, $K(x, 1-t)$ et $K(x, \frac{1-s}{1-a})$ sont continues sur X_1 , X_2 et X_3 respectivement, pour montrer que R est continue il suffit de montrer que ces applications coïncident sur les intersections des sous-espaces. Sur $X_1 \cap X_2$, on a $s = a(1-t)$ et $K(x, \frac{s}{a}) = K(x, 1-t)$. Sur $X_2 \cap X_3$ on a $s = a(1-t) + t$ et $K(x, \frac{1-s}{1-a}) = K(x, 1-t)$. Donc R est continue. Par ailleurs, pour $t = 0$ on a $R(x, s, 0) = (K *_a \bar{K})(x, s)$ et pour $t = 1$ on a $R(x, s, 1) = K(x, 0) = K_0(x)$. Enfin pour $s = 0$, on a $R(x, 0, t) = K(x, 0) = (K *_a \bar{K})(x, 0) = K_0(x)$ et pour $s = 1$, on a $R(x, 1, t) = K(x, 0) = (K *_a \bar{K})(x, 1) = K_0(x)$, donc indépendant de t . Conclusion on a trouvé une homotopie relativement à $X \times \{0, 1\}$ entre $K *_a \bar{K}$ et K_0 . $\square$

Lemme 1.3.13. *Soit $K : X \times I \rightarrow Y$ une application continue. On note $K_0 : X \times I \rightarrow Y$ l'application qui à (x, t) associe $K(x, 0)$ et K_1 cell qui à (x, t) associe $K(x, 1)$. Pour tout $0 < a < 1$ on a $K_0 *_a K \simeq_{X \times \{0,1\}} K$ et $K *_a K_1 \simeq_{X \times \{0,1\}} K$.*

Démonstration. Définissons

$$R(x, s, t) = \begin{cases} K(x, \frac{s}{a(1-t)+t}) & \text{si } 0 \leq s \leq a(1-t) + t \\ K(x, 1) & \text{si } a(1-t) + t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

R est continue et est une homotopie relativement à $X \times \{0, 1\}$ de $K *_a K_1$ vers K . Pour l'autre cas on compose les homotopies en constatant que $K_0 \simeq_{X \times \{0,1\}} K *_a \bar{K}$, ce qui donne

$$K_0 *_a K \simeq_{X \times \{0,1\}} (K *_a \bar{K}) *_a K \simeq_{X \times \{0,1\}} K *_a (\bar{K} *_a K) \simeq_{X \times \{0,1\}} K *_a K_1 \simeq_{X \times \{0,1\}} K.$$

$\square$

Théorème 1.3.14. *Si $f, g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ sont homotopes alors $X \cup_f \mathbb{D}^n \simeq X \cup_g \mathbb{D}^n$.*

Démonstration. Pour $h \in \{f, g\}$, on utilise les notations suivantes pour le diagramme co-cartésien:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow & & \downarrow j_X^h \\ \mathbb{D}^n & \xrightarrow{\phi_h} & Y_h = X \cup_h \mathbb{D}^n \end{array}$$

On note $K : \mathbb{S}^{n-1} \times I \rightarrow X$ une homotopie de g à f , c'est-à-dire, pour tout $a \in \mathbb{S}^{n-1}$, $K(a, 0) = g(a)$ et $K(a, 1) = f(a)$. On note $\overline{K}$ l'homotopie de f à g définie par $\overline{K}(x, t) = K(x, 1 - t)$.

Construisons une application continue $Y_f \rightarrow Y_g$. Pour cela il suffit de se donner deux applications continues $H_1 : \mathbb{D}^n \rightarrow Y_g$ et $H_2 : X \rightarrow Y_g$ vérifiant pour tout $a \in \mathbb{S}^{n-1}$, $H_1(a) = H_2(f(a))$. On pose $H_2 = j_X^g : X \rightarrow Y_g$, continue. Pour définir H_1 , on décompose la boule $\mathbb{D}^n$ en $\mathbb{D}^n = \mathbb{D}_{\frac{1}{2}}^n \cup \mathbb{S}^{n-1} \times I$ où $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}^n = \{x \in \mathbb{D}^n, \|x\| \leq \frac{1}{2}\}$ est fermé dans $\mathbb{D}^n$; on rappelle que l'application continue $\mathbb{S}^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{D}^n$ qui envoie (x, t) sur $\frac{t+1}{2}x$, réalise un homéomorphisme sur son image dans $\mathbb{D}^n$ qui est fermée dans $\mathbb{D}^n$.

On définit

$$H_1(x) = \begin{cases} \phi_g(2x) & \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ j_X^g(K(\frac{x}{\|x\|}, 2\|x\| - 1)) & \text{si } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pour $\|x\| = \frac{1}{2}$ on a $2x \in \mathbb{S}^{n-1}$ donc $\phi_g(2x) = j_X^g(g(2x))$ dans Y_g et $j_X^g(K(\frac{x}{\|x\|}, 2\|x\| - 1)) = j_X^g(K(2x, 0)) = j_X^g(g(2x))$. Donc H_1 est bien continue.

Enfin si $a \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a $H_1(a) = j_X^g(K(a, 1)) = j_X^g(f(a)) = H_2(f(a))$. Conclusion on a construit une application continue $H : Y_f \rightarrow Y_g$. Pour conclure, l'application H vue comme application d'ensemble de $Y_f = X \sqcup \overset{\circ}{\mathbb{D}^n}$ vers $Y_g = X \sqcup \overset{\circ}{\mathbb{D}^n}$ s'exprime comme ceci

$$H(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ 2x & \text{si } x \in \overset{\circ}{\mathbb{D}^n} \text{ et } 0 \leq \|x\| < \frac{1}{2} \\ K(\frac{x}{\|x\|}, 2\|x\| - 1) & \text{si } x \in \overset{\circ}{\mathbb{D}^n} \text{ et } \frac{1}{2} \leq \|x\| < 1 \end{cases}$$

En remplaçant K par $\overline{K}$ dans la construction précédente, on définit de manière analogue $\overline{H}_1$ et $\overline{H}_2$ puis $\overline{H} : Y_g \rightarrow Y_f$.

Montrons que la composée $H \circ \overline{H} : Y_g \rightarrow Y_g$ est homotope à l'identité de Y_g .

On remarque $(H \circ \overline{H}) \circ j_X^g(x) = j_X^g(x)$ pour tout $x \in X$. Pour $x \in \mathbb{D}^n$, on a

$$H \circ \overline{H}(x) = \begin{cases} \phi_g(4x), & \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{4} \\ j_X^g K(\frac{x}{\|x\|}, 4\|x\| - 1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ j_X^g \overline{K}(\frac{x}{\|x\|}, 2\|x\| - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

On utilise alors la même technique que dans le lemme 1.3.12 . On construit $R : Y_g \times I = (X \times I) \cup_{g \times \text{id}_I} (\mathbb{D}^n \times I) \rightarrow Y_g$, par $R(x, t) = j_X^g(x)$ pour tout $x \in X$ et pour $x \in \mathbb{D}^n$

$$R(x, t) = \begin{cases} \phi_g(4x), & \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{4} \\ j_X^g K(\frac{x}{\|x\|}, 4\|x\| - 1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq \|x\| \leq \frac{2-t}{4} \\ j_X^g K(\frac{x}{\|x\|}, 1-t) & \text{si } \frac{2-t}{4} \leq \|x\| \leq \frac{1+t}{2} \\ j_X^g \overline{K}(\frac{x}{\|x\|}, 2\|x\| - 1) & \text{si } \frac{1+t}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Cette application est définie et continue et $R(x, 0) = H \circ \overline{H}$ et pour tout $x \in \mathbb{D}^n$,

$$R(x, 1) = \begin{cases} \phi_g(4x), & \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{4} \\ j_X^g g(\frac{x}{\|x\|}) = \phi_g(\frac{x}{\|x\|}) & \text{si } \frac{1}{4} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Donc $H \circ \overline{H}$ est homotope à l'application $R(-, 1)$. Enfin, on définit $S : Y_g \times I \rightarrow Y_g$ par $S(x, t) = j_X^g(x)$ pour tout $x \in X$ et pour $x \in \mathbb{D}^n$

$$S(x, t) = \begin{cases} \phi_g((4-3t)x), & \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{4-3t} \\ \phi_g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } \frac{1}{4-3t} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

S est une homotopie de $R(-, 1)$ à id_{Y_g} . □

Pour la preuve ci-dessus, on pourra également consulter le livre de Félix-Tanré, *Topologie algébrique* (cours et exercices corrigés, master-Capes/agreg, chez Dunod), section 2.2, Proposition 2.10.

2 Groupe fondamental

2.1 Chemins, lacets et groupe fondamental

Définition 2.1.1. Soit X un espace topologique, et x_0, x_1 des points de X . Un **chemin de x_0 à x_1** est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Les points x_0 et x_1 s'appellent les extrémités du chemin. Un **lacet de X basé en x_0** est un chemin de x_0 à x_0 .

On dit que deux chemins γ, γ' ayant même extrémités sont homotopes s'ils sont homotopes relativement à $\{0, 1\}$. Deux lacets basés en x_0 sont homotopes s'ils sont homotopes en tant que chemins.

La classe d'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ modulo $\simeq_{\{0,1\}}$ est notée $[\gamma]$.

Remarque 2.1.2. Attention, si deux chemins sont homotopes alors ce sont deux applications homotopes, mais la réciproque n'est pas vraie, car comme $[0, 1]$ est contractile on peut montrer que toute application $f : [0, 1] \rightarrow X$ est homotope à une application constante! Donc l'homotopie à extrémités fixées est importante ici.

Définition 2.1.3. Soient α, β des chemins

1. $\bar{\alpha}$ est le chemin défini par $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$; (inverse d'un chemin)
2. Si $\alpha(1) = \beta(0)$ on note $\alpha * \beta$ le chemin défini par $(\alpha * \beta)(t) = \alpha(2t)$ si $t \leq \frac{1}{2}$ et $\beta(2t-1)$ sinon.
3. On note c_x le chemin constant égal à x .

Proposition 2.1.4. Soient $x, y \in X$. On note

$$F_{x,y} := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} / \simeq_{\{0,1\}}$$

1. $F_{x,y} \rightarrow F_{y,x}, [\alpha] \mapsto [\bar{\alpha}]$ est bien définie.
2. $m : F_{x,y} \times F_{y,z} \rightarrow F_{x,z}, ([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha * \beta]$ est bien définie. On note ce produit $[\alpha][\beta]$.
3. m est associative.
4. Pour tout $\alpha \in F_{x,y}$, on a: $[\alpha][c_y] = [\alpha] = [c_x][\alpha]$, $[\alpha][\bar{\alpha}] = [c_x]$, $[\bar{\alpha}][\alpha] = [c_y]$.

En particulier on a un groupoïde $\Pi_1(X)$ dont les objets sont les points de X et les morphismes $\text{Hom}_{\Pi(X)}(x, y) = F_{x,y}$. La composition est donnée par la concaténation des chemins et l'identité par la classe du chemin constant. Il est appelé **groupoïde fondamental de X** . Par la suite on notera sans ambiguïté $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$.

Démonstration. 1. Si $H : I \times I \rightarrow X$ est une homotopie relativement à ∂I du chemin α vers le chemin α' alors $\tilde{H}(s, t) = H(1 - s, t)$ est une homotopie relativement à ∂I de $\bar{\alpha}$ vers $\bar{\alpha}'$.

2. Si $H : I \times I \rightarrow X$ est une homotopie relativement à ∂I du chemin α vers le chemin α' et $K : I \times I \rightarrow X$ est une homotopie relativement à ∂I du chemin β vers le chemin β' , on pose $(H *' K)(s, t) = H(2s, t)$ si $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ et $(H *' K)(s, t) = K(2s - 1, t)$ sinon. C'est bien défini car pour $s = \frac{1}{2}$, $H(1, t) = \alpha(1) = \alpha'(1) = \beta(0) = \beta'(0) = K(0, t)$. De plus c'est une homotopie de $\alpha * \beta$ vers $\alpha' * \beta'$ relativement à ∂I .

3. Fixons α, β, γ des chemins de X tels que $\alpha(1) = \beta(0)$ et $\beta(1) = \gamma(0)$. Il faut montrer que $(\alpha * \beta) * \gamma$ est homotope à $\alpha * (\beta * \gamma)$ relativement à ∂I . C'est une conséquence directe du corollaire 1.3.11 .

4. C'est une conséquence directe des lemmes 1.3.13 et 1.3.12 .

□

Corollaire 2.1.5. $\pi_1(X, x_0) = F_{x_0, x_0}$ est un groupe appelé le groupe fondamental de X basé en x_0 .

Remarque 2.1.6. Avec les notations de la Proposition 1.1.5 on a $F_{x, y} = [I, X]_\psi$ où $\psi : \mathbb{S}^0 = \partial I \rightarrow X$ est l'application qui envoie 0 sur x et 1 sur y .

Remarque 2.1.7. Bien que l'opération $*$ ne soit pas associative, on a cependant montré la chose suivante: pour tous α, β, γ chemins tels que $\alpha(1) = \beta(0)$ et $\beta(1) = \gamma(0)$, le chemin $(\alpha * \beta) * \gamma$ est homotope, à extrémités fixées, au chemin $\alpha * (\beta * \gamma)$ et on note sa classe $[\alpha][\beta][\gamma]$. Afin de faciliter les calculs on notera $\alpha * \beta * \gamma$ un représentant de cette classe (par exemple $\alpha *_{a} \beta *_{b} \gamma$ pour un choix de réels a, b avec $0 < a < b < 1$). En particulier on a $[\alpha][\beta][\gamma] = [\alpha * \beta * \gamma] = [\alpha * \beta][\gamma] = [\alpha][\beta * \gamma]$.

2.2 Propriétés du groupe fondamental

Comme on l'a vu, plus qu'un groupe, on a défini une famille de groupes $\pi_1(X, x)$ pour tout $x \in X$. La proposition suivante exprime la relation entre ces groupes. Plus précisément s'il existe un chemin de x à y alors les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes. C'est ce que l'on appelle le changement de point base.

Proposition 2.2.1. Soit γ un chemin de x à y dans X . L'application

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(X, y) \\ [\alpha] &\mapsto [\tilde{\gamma}][\alpha][\gamma] = [\tilde{\gamma} * \alpha * \gamma] \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes. De plus cet isomorphisme est indépendant du choix de la classe du chemin γ dans $F_{x, y}$. Plus précisément si $[\gamma] = [\gamma'] \in F_{x, y}$ alors $\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma'}$.

Démonstration. La proposition 2.1.4 implique que l'application Φ_γ est bien définie.

$\Phi_\gamma([\alpha][\beta]) = [\tilde{\gamma}][\alpha][\beta][\gamma] = [\tilde{\gamma}][\alpha][c_x][\beta][\gamma]$. Or $[\tilde{\gamma}][\tilde{\gamma}] = [c_x]$ donc $\Phi_\gamma([\alpha][\beta]) = \Phi_\gamma([\alpha])\Phi_\gamma([\beta])$.

Pour γ un chemin de x à y et γ' un chemin de y à z , on a $\Phi_{\gamma'} \circ \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma' * \gamma}$.

Si $[\gamma] = [\gamma'] \in F_{x, y}$ alors $[\tilde{\gamma}] = [\tilde{\gamma'}] \in F_{y, x}$ et donc $\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma'}$. Ainsi $\Phi_\gamma \circ \Phi_{\tilde{\gamma}} = \Phi_{c_x} = \text{Id}_{\pi_1(X, x)}$.

Conclusion Φ_γ est un isomorphisme de groupes qui ne dépend pas du choix de la classe d'homotopie relativement à ∂I de γ . □

Ainsi si X est connexe par arcs, tous les groupes $\pi_1(X, x)$ sont isomorphes (mais les isomorphismes ne sont pas canoniques). On notera cependant $\pi_1(X)$ n'importe lequel de ces groupes isomorphes.

La proposition suivante permet de définir un foncteur $\pi_1 : \text{Top}_* \rightarrow \text{Gr}$, de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégories des groupes.

Proposition 2.2.2. Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ continue et $x_0 \in X$. Alors φ induit un morphisme de groupes $\varphi_* := \pi_1(\varphi, x_0) : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$. De plus $\pi_1(id_X, x_0) = id_{\pi_1(X, x_0)}$ et $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

Démonstration. Soient α, α' des lacets de X basés en x_0 et $\varphi : X \rightarrow Y$. Si $\alpha' \simeq_{\partial I} \alpha$ alors $\varphi \circ \alpha \simeq_{\partial I} \varphi \circ \alpha'$. Donc $\varphi \circ -$ définit une application $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$, que l'on note φ_* . C'est un morphisme de groupes, car $\varphi \circ (\alpha * \beta) = (\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \beta)$, pour α, β des lacets basés en x_0 . Enfin pour $\varphi : X \rightarrow Y$ et $\psi : Y \rightarrow Z$ et α un lacet de X basé en x_0 , comme $(\psi \circ \varphi) \circ \alpha = \psi \circ (\varphi \circ \alpha)$, on a $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$. $\square$

Le corollaire suivant a été énoncé le 11 mars

Corollaire 2.2.3. $\pi_1((X \times Y), (x_0, y_0))$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\pi_1((X \times Y), (x_0, y_0))$ vérifie la propriété universelle du produit de groupes. Les deux projections canoniques $p : X \times Y \rightarrow X$ et $q : X \times Y \rightarrow Y$ induisent des morphismes de groupes $p_* : \pi_1((X \times Y), (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ et q_* . Fixons G un groupe, $\varphi_X : G \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ et $\varphi_Y : G \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ deux morphismes de groupes. Considérons l'application $\varphi : G \rightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ qui à g associe $[(\alpha_g, \beta_g)]$ où α_g est un lacet de X basé en x_0 représentant de $\varphi_X(g)$, et β_g un représentant de $\varphi_Y(g)$. Il est clair que cela ne dépend pas du représentant choisi, donc φ est bien définie et $p_* \circ \varphi = \varphi_X, q_* \circ \varphi = \varphi_Y$. De plus φ est l'unique application vérifiant cela. Enfin φ est un morphisme de groupes, car si (α, β) et (α', β') sont des lacets de $X \times Y$ basés en (x_0, y_0) alors $(\alpha, \beta) * (\alpha', \beta') = (\alpha * \alpha', \beta * \beta')$. $\square$

Théorème 2.2.4. Si $\varphi : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie alors, pour tout $x_0 \in X$, $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ est un isomorphisme de groupes. En particulier, si X est contractile, $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, pour tout $x_0 \in X$.

Pour démontrer ce théorème on montre le lemme suivant:

Lemme 2.2.5. Soient $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ deux applications homotopes. Alors, $\forall x_0 \in X$, il existe un isomorphisme de groupes $\chi : \pi_1(Y, \psi(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \\ & \searrow \psi_* & \nearrow \chi \\ & \pi_1(Y, \psi(x_0)) & \end{array}$$

Si φ et ψ sont homotopes relativement à $\{x_0\}$ alors $\varphi_* = \psi_*$.

Démonstration. La démonstration n'a pas été vu en cours, mais est à lire pour le 11 mars Soit $H : X \times I \rightarrow Y$ une homotopie de ψ à φ . On note $\gamma : I \rightarrow Y$ qui à t associe $H(x_0, t)$, chemin de $\psi(x_0)$ à $\varphi(x_0)$. D'après la proposition 2.2.1, l'application $\chi = \Phi_\gamma$ est un isomorphisme de groupes. Montrons que $\chi \circ \psi_* = \varphi_*$. Fixons β un lacet de X basé en x_0 . Nous devons montrer que $[\bar{\gamma}][\psi \circ \beta][\gamma] = [\varphi \circ \beta] \in \pi_1(Y, \varphi(x_0))$. Posons $G : I \times I \rightarrow Y, (s, t) \mapsto H(\beta(s), 1 - t)$, et $L : I \times I \rightarrow I \times I$ définie par

$$L(a, r) = \begin{cases} (0, 3a), & 0 \leq a \leq \frac{r}{3} \\ (\frac{3a-r}{3-2r}, r), & \frac{r}{3} \leq a \leq 1 - \frac{r}{3} \\ (1, 3 - 3a), & 1 - \frac{r}{3} \leq a \leq 1 \end{cases}$$

Remarquons que

$$L(0, r) = (0, 0); L(1, r) = (1, 0); L(a, 0) = (a, 0)$$

Montrons que $\tilde{G} = G \circ L$ est une homotopie entre $\varphi \circ \beta$ et $\bar{\gamma} * (\psi \circ \beta) * \gamma$ relativement à $\{0, 1\}$. On a

$$\tilde{G}(0, r) = G(0, 0) = H(x_0, 1) = \varphi(x_0); \tilde{G}(1, r) = G(1, 0) = H(x_0, 1) = \varphi(x_0),$$

donc $\tilde{G}$ est une homotopie est relative à $\{0, 1\}$; de plus

$$\tilde{G}(a, 0) = G(a, 0) = H(\beta(a), 1) = (\varphi \circ \beta)(a)$$

et

$$\tilde{G}(a, 1) = \begin{cases} H(x, 1 - 3a) = \bar{\gamma}(3a) & 0 \leq a \leq \frac{1}{3} \\ (\varphi \circ \beta)(3a - 1), & \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{2}{3} \\ \gamma(3a - 2), & \frac{2}{3} \leq a \leq 1 \end{cases}$$

d'où le résultat. Si φ et ψ sont homotopes rel $\{x_0\}$ alors γ est le chemin constant, Φ_γ est l'identité dans $\varphi_* = \psi_*$. Par ailleurs si γ est homotope (relativement à ∂I) au chemin constant alors $\Phi_\gamma = \text{Id}$. $\square$

Fin du cours du 4 mars 2025

Démonstration du théorème 2.2.4. Supposons que $\varphi : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie. Il existe $\psi : Y \rightarrow X$ telle que $\psi \circ \varphi \simeq id_X$ et $\varphi \circ \psi \simeq id_Y$. Par le lemme précédent cela implique que pour tout $x_0 \in X$, $\psi_* \circ \varphi_*$ est un isomorphisme donc que ψ_* est surjective et φ_* est injective. En inversant les rôles de φ et ψ on obtient que φ_* est un isomorphisme de groupes.

Lemme 2.2.6. Soit $G : I^2 \rightarrow X$ une application continue. On note $\alpha = G(-, 0), \beta = G(0, -), \alpha' = G(-, 1), \beta' = G(1, -)$ et $x_0 = G(0, 0), y_0 = G(1, 0)$. Dans F_{x_0, y_0} on a $[\alpha] = [\beta][\alpha'][\beta']$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la démonstration précédente en considérant l'homotopie $\tilde{G} = G \circ L$. $\square$

Proposition 2.2.7. Si A est un rétracte de X et $a \in A$ alors $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ est injective.

Démonstration. Il existe $r : X \rightarrow A$ tel que $ri = id_A$ donc $r_* \circ i_* = id_{\pi_1(A, a)}$. En particulier i_* est injective. $\square$

Définition 2.2.8. X est **simplement connexe** s'il est connexe par arcs ($\pi_0(X) = \{*\}$) et si $\pi_1(X, x) = \{1\}$.

Exemple 2.2.9. On a vu que tout espace topologique contractile est simplement connexe.

2.3 Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^n$ pour $n \geq 2$

Proposition 2.3.1 (Version faible du théorème de Van Kampen). Soit X un espace topologique possédant deux ouverts U_1 et U_2 connexes par arcs tels que $X = U_1 \cup U_2$. On suppose que $U_1 \cap U_2$ est non vide et connexe par arcs. On note $j_i : U_i \rightarrow X$ l'inclusion canonique. Pour $x_0 \in U_1 \cap U_2$, le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par les images des morphismes $(j_1)_*$ et $(j_2)_*$.

Démonstration. Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ un lacet de X basé en x_0 . Les deux ouverts $\alpha^{-1}(U_1)$ et $\alpha^{-1}(U_2)$ recouvrent le compact $[0, 1]$ donc il existe $\epsilon > 0$ (nombre de Lebesgue du recouvrement) tel que $\forall x \in [0, 1],]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap [0, 1] \subset \alpha^{-1}(U_1)$ ou $]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap [0, 1] \subset \alpha^{-1}(U_2)$. Cela permet de construire une suite finie de réels $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$ avec $\alpha([t_{2i}, t_{2i+1}]) \subset U_1$ et $\alpha([t_{2i+1}, t_{2i+2}]) \subset U_2$, $\alpha(t_i) \in U_1 \cap U_2$, quitte à échanger les rôles de U_1 et U_2 . Comme $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs, pour tout $1 \leq i \leq k-1$, il existe un chemin $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow U_1 \cap U_2$ de x_0 à $\alpha(t_i)$. On choisit $\gamma_0 = \gamma_k = c_{x_0}$. Pour $0 \leq i \leq k-1$, posons $\alpha_i = \gamma_i * \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]} * \overline{\gamma_{i+1}}$. C'est un lacet de U_1 (si i est pair) ou de U_2 (si i est impair) basé en x_0 . Par ailleurs dans $\pi_1(X, x_0)$ on a

$$[\alpha_0 * \dots * \alpha_{k-1}] = [\gamma_0 * \alpha|_{[t_0, t_1]} * \overline{\gamma_1} * \gamma_1 * \dots * \gamma_{k-1} * \alpha|_{[t_{k-1}, t_k]} * \overline{\gamma_k}] = [\alpha|_{[t_0, t_1]} * \dots * \alpha|_{[t_{k-1}, t_k]}] = [\alpha].$$

Conclusion $[\alpha] = [\alpha_0][\alpha_1] \dots [\alpha_k]$ est un produit d'éléments dans l'image des morphismes $(j_1)_*$ et $(j_2)_*$. $\square$

Théorème 2.3.2. *Pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{S}^n$, on a $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = \{1\}$.*

Démonstration. On décompose la sphère $\mathbb{S}^n$ en un recouvrement d'ouverts $\mathbb{S}^n \setminus N$ et $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ où S et N désignent les poles sud et nord. L'intersection de ces deux ouverts est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times]0, 1[$ qui est connexe par arcs pour $n \geq 2$. Donc $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)$ est engendré par l'image des morphismes $(j_1)_*$ et $(j_2)_*$. Or $\mathbb{S}^n \setminus N$ et $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ sont contractiles donc cette image est l'élément neutre. Ceci implique que $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe pour $n \geq 2$. $\square$

2.4 Le groupe fondamental du cercle

2.4.1 Théorème fondamental

Théorème 2.4.1. *Le groupe $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

La démonstration de ce théorème est reporté à la fin de la partie, car il résulte de plusieurs résultats intermédiaires.

On note $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2i\pi t}$. On verra plus tard que cette application est un revêtement. Pour tout $f : X \rightarrow \mathbb{S}^1$ continue, un **relèvement de f** (par rapport à $\exp$) est une application continue $\hat{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\exp \circ \hat{f} = f$.

La théorie des revêtements permet de démontrer le lemme suivant

Lemme 2.4.2. *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ un chemin de $\mathbb{S}^1$ vérifiant $\gamma(0) = x_0 = e^{2i\pi t_0}$. Il existe un relèvement $\hat{\gamma}$ de γ . De plus $\hat{\gamma}$ est unique si l'on impose $\hat{\gamma}(0) = t_0$.*

Si γ est un lacet, alors nécessairement il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\hat{\gamma}(1) = t_0 + n$. Cet entier n s'appelle le degré du lacet γ , noté $\deg(\gamma)$. On peut montrer que cet entier n est indépendant du choix de t_0 (ou du relèvement $\hat{\gamma}$ de γ). C'est-à-dire: quelque soit $\hat{\gamma}$ un relèvement de γ on a $\hat{\gamma}(1) - \hat{\gamma}(0) = \deg(\gamma)$.

Le lemme suivant sera démontré dans le chapitre revêtements:

Lemme 2.4.3 (Relèvement des homotopies). *Soient γ_1, γ_2 deux lacets de $\mathbb{S}^1$ basés en $x_0 = e^{2i\pi t_0}$ et homotopes à extrémités fixées via $H : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$. Il existe un relèvement $\hat{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ de H qui est unique si l'on impose $\hat{H}(0, 0) = t_0$.*

Corollaire 2.4.4. *Soient γ_1, γ_2 deux lacets de $\mathbb{S}^1$ basés en x_0 . On a:*

$$\deg(\gamma_1) = \deg(\gamma_2) \iff [\gamma_1] = [\gamma_2] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0).$$

Démonstration. Soit $H : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$ une homotopie de lacets (à extrémités fixes) de γ_1 à γ_2 . Et $\hat{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ le relèvement de H vérifiant $\hat{H}(0,0) = t_0$.

Le chemin $t \mapsto \hat{H}(t,0)$ est un relèvement du chemin $t \mapsto H(t,0) = \gamma_1(t)$. Donc par définition du degré du lacet γ_1 on a $\hat{H}(1,0) = t_0 + \deg \gamma_1$.

Le chemin $s \mapsto \hat{H}(0,s)$ est un relèvement du chemin $s \mapsto H(0,s) = x_0$. Or le chemin constant t_0 relève le chemin constant x_0 . Comme il existe un unique relèvement $\hat{\gamma}$ du chemin constant tel que $\hat{\gamma}(0) = t_0$, on en déduit que nécessairement $\hat{H}(0,s) = t_0$ pour tout s . En particulier $\hat{H}(0,1) = t_0$.

Le chemin $t \mapsto \hat{H}(t,1)$ est un relèvement du chemin $t \mapsto H(t,1) = \gamma_2(t)$. Donc par définition du degré du lacet γ_2 on a $\hat{H}(1,1) = \hat{H}(0,1) + \deg \gamma_2 = t_0 + \deg \gamma_2$.

Le chemin $s \mapsto \hat{H}(1,s)$ est un relèvement du chemin $s \mapsto H(1,s) = x_0$. Or le chemin constant $t_0 + \deg \gamma_1$ relève le chemin constant x_0 et comme $\hat{H}(1,0) = t_0 + \deg \gamma_1$ par unicité on en déduit que $\hat{H}(1,s) = t_0 + \deg \gamma_1$ pour tout s . En particulier $\hat{H}(1,1) = t_0 + \deg \gamma_1$. Conclusion $\deg \gamma_1 = \deg \gamma_2$.

Réciproquement, considérons les relèvements $\hat{\gamma}_1$ de γ_1 et $\hat{\gamma}_2$ de γ_2 tels que $\hat{\gamma}_1(0) = \hat{\gamma}_2(0) = t_0$. Soit $\hat{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ l'homotopie de $\hat{\gamma}_1$ à $\hat{\gamma}_2$ définie par $\hat{H}(s,t) = (1-t)\hat{\gamma}_1(s) + t\hat{\gamma}_2(s)$. Comme pour tout t on a $\hat{H}(0,t) = t_0$ et $\hat{H}(1,t) = t_0 + \deg \gamma_1 = t_0 + \deg \gamma_2$, On vérifie aisément que $H = \exp \circ \hat{H}$ est une homotopie à extrémités fixées entre γ_1 et γ_2 . $\square$

Démonstration. (théorème 2.4.1). L'application $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ est bien définie et injective. Elle est surjective car le lacet $I \rightarrow \mathbb{S}^1$ qui à t associe $x_0 e^{2i\pi nt}$ est de degré n . En effet un relèvement de ce lacet est donné par l'application continue $I \rightarrow \mathbb{R}$ qui à t associe $t_0 + nt$.

Il faut montrer que c'est un morphisme de groupes. Soient γ_1 et γ_2 deux lacets basés en x_0 , $\hat{\gamma}_1$ (resp. $\hat{\gamma}_2$) un relèvement de γ_1 (resp. γ_2) vérifiant $\hat{\gamma}_1(0) = \hat{\gamma}_2(0) = t_0$. Alors le chemin dans $\mathbb{R}$ défini par

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} \hat{\gamma}_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \hat{\gamma}_1(1) - t_0 + \hat{\gamma}_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est un relèvement de $\gamma_1 * \gamma_2$ de degré $\hat{\gamma}(1) - t_0 = \hat{\gamma}_1(1) - t_0 + \hat{\gamma}_2(1) - \hat{\gamma}_1(0) = \deg(\gamma_1) + \deg(\gamma_2)$. $\square$

Remarque 2.4.5. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le lacet $\rho_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ basé en x_0 défini par $\rho_n(t) = x_0 e^{2i\pi nt}$ est de degré n . Donc le lacet $\rho_n * \rho_m$ est de degré $n + m$ par la proposition précédente et l'on en déduit que $\rho_n * \rho_m \simeq_{\partial I} \rho_{n+m}$.

2.4.2 Degré d'une application $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$

Cette partie est un résumé de l'exercice 3 de la feuille de TD4, qui sera utile pour les calculs.

Définition 2.4.6. Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une application continue. Soit $x_0 \in \mathbb{S}^1$. Le degré de f est l'unique entier n tel que l'application induite $\pi_1(f) : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, f(x_0))$ soit la multiplication par n . Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\mathbb{S}^1, f(x_0)) \\ \text{deg} \downarrow & & \downarrow \text{deg} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times n} & \mathbb{Z} \end{array}$$

et ce diagramme ne dépend pas du choix de x_0 .

Proposition 2.4.7. On a $\deg(\text{id}_{\mathbb{S}^1}) = 1$, $\deg(c_{x_0}) = 0$, $\deg(f \circ g) = \deg f \times \deg g$. De plus $f \simeq g$ si et seulement si $\deg f = \deg g$.

Calcul explicite du degré d'une application $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$

Proposition 2.4.8. *L'application f définit un lacet $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto f(e^{2i\pi t})$. Le degré de f est le degré du lacet.*

Démonstration. Le lacet $\rho_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ qui à t associe $e^{2i\pi t}$ est de degré 1. Ainsi $(\deg f) * 1 = \deg(f \circ \rho_1)$. $\square$

2.4.3 Applications

Théorème 2.4.9 (Théorème de d'Alembert-Gauss). *Tout polynôme à coefficients complexes, de degré ≥ 1 admet une racine complexe.*

Démonstration. Soit $p(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_1z + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ avec $k \geq 1$. On suppose qu'il n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$, donc il n'en n'a pas dans $\mathbb{S}^1$ et l'application $\tilde{p} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $\tilde{p}(z) = \frac{p(z)}{\|p(z)\|}$ est définie et continue.

Le polynôme p n'a pas de racine dans l'intérieur de $\mathbb{D}^2$. Donc l'application

$$F: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, t) \mapsto \frac{p(tz)}{\|p(tz)\|}$$

est définie, continue et est une homotopie d'une application constante à $\tilde{p}$. Ainsi $\deg(\tilde{p}) = 0$.

Le polynôme p n'a pas de racine dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}^2$, donc l'application

$$G: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, t) \mapsto \frac{t^k p(z/t)}{\|t^k p(z/t)\|},$$

où $t^k p(z/t) = z^k + a_{k-1}tz^{k-1} + \dots + a_1t^{k-1}z + a_0t^k$, est définie, continue et est une homotopie de $z \mapsto z^k$ à $\tilde{p}$. Ainsi $\deg(\tilde{p}) = k \neq 0$, ce qui est absurde. $\square$

Fin du programme du partiel du 18 mars

Les deux théorèmes suivants seront vus en TD (feuille TD 4)

Théorème 2.4.10 (Théorème de Brouwer). *Toute application continue $D^2 \rightarrow D^2$ admet un point fixe.*

Théorème 2.4.11 (Théorème de Borsuk-Ulam). *Pour toute application continue $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, il existe $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

3 Le théorème de Van Kampen

3.1 Coproduit et pushout dans la catégorie des groupes

3.1.1 Produit libre de groupes

Définition 3.1.1. Soient G_1 et G_2 deux groupes. L'élément neutre du groupe G_i est noté e_i . On considère l'ensemble $X = G_1 \setminus \{e_1\} \sqcup G_2 \setminus \{e_2\}$. Un **mot alterné** de longueur p est une séquence $(a_1, \dots, a_p)$ avec $a_k \in X$ vérifiant les deux conditions suivantes: pour tout $1 \leq k \leq p-1$ on a $a_k \in G_1 \Rightarrow a_{k+1} \in G_2$ et $a_k \in G_2 \Rightarrow a_{k+1} \in G_1$. L'ensemble $G_1 * G_2$ est l'ensemble de tous les mots alternés. En particulier il contient le mot $\emptyset$ que l'on note e par la suite.

Proposition 3.1.2. On définit une loi binaire sur $G_1 * G_2$, par récurrence sur le longueur des mots alternés de la manière suivante: soient $v = (a_1, \dots, a_p)$ et $w = (b_1, \dots, b_q)$ deux mots alternés.

$$e \cdot v = v \cdot e = v,$$

$$v \cdot w = \begin{cases} (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q) & \text{si } a_p \in G_1, b_1 \in G_2 \text{ ou } a_p \in G_2, b_1 \in G_1 \\ (a_1, \dots, a_{p-1}, a_p \cdot b_1, b_2, \dots, b_q) & \text{si } a_p \in G_1, b_1 \in G_1 \text{ et } a_p \cdot b_1 \neq e_1 \\ (a_1, \dots, a_{p-1}, a_p \cdot b_1, b_2, \dots, b_q) & \text{si } a_p \in G_2, b_1 \in G_2 \text{ et } a_p \cdot b_1 \neq e_2 \\ (a_1, \dots, a_{p-1}) \cdot (b_2, \dots, b_q) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $(G_1 * G_2, \cdot, e)$ est un groupe et l'inverse du mot alterné $v = (a_1, \dots, a_p)$ est le mot alterné $(a_p^{-1}, a_{p-1}^{-1}, \dots, a_1^{-1})$. Ce groupe est appelé **produit libre de G_1 et G_2** et c'est le coproduit de G_1 et G_2 dans la catégorie des groupes.

Remarque 3.1.3. 1. Pour tous groupes G_1, G_2 et G_3 on a un isomorphisme entre $G_1 * (G_2 * G_3)$ et $(G_1 * G_2) * G_3$.

2. En identifiant $\mathbb{Z}$ au groupe multiplicatif $\{t^k, k \in \mathbb{Z}\}$ les éléments de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ sont représentés par des mots alternés en puissance de t_1 et t_2 (où t_1 et t_2 sont deux variables). Par exemple $x = t_1^3 t_2^{-1} t_1^{-3}$ représente le mot alterné $(t_1^3, t_2^{-1}, t_1^{-3})$ et $y = t_1^3 t_2^5$ représente le mot alterné (t_1^3, t_2^5) . On a

$$x \cdot y = t_1^3 t_2^4 \text{ et } y \cdot x = t_1^3 t_2^5 t_1^3 t_2^{-1} t_1^{-3}$$

Ce groupe n'est donc pas commutatif.

Proposition 3.1.4. Le groupe $\mathbb{Z}^{*n}$ est le **groupe libre engendré par n éléments**, que l'on note $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$. Il vérifie la propriété universelle suivante: pour tout groupe G , pour tous $x_1, \dots, x_n$ éléments de G , il existe un unique morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{Z}^{*n} \rightarrow G$ tel que $\varphi(t_i) = x_i, \forall 1 \leq i \leq n$.

3.1.2 Somme amalgamée

On rappelle que si G est un groupe et $A = \{a_i\}_{i \in I}$ est une famille d'éléments de G , le **sous-groupe distingué de G engendré par la famille A** est le plus petit sous groupe normal N_A de G qui contient les éléments a_i pour tout $i \in I$. Une description de N est donnée par

$$N = \{(g_1 a_{i_1}^{\pm 1} g_1^{-1}) \dots (g_r a_{i_r}^{\pm 1} g_r^{-1}), g_k \in G, i_k \in I, 1 \leq k \leq r, r \in \mathbb{N}\}.$$

Le groupe quotient G/N vérifie la propriété universelle suivante:

Pour tout groupe H et tout morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow H$ vérifiant $\varphi(a_i) = e_H, \forall i \in I$, il existe un unique morphisme de groupes $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow H$ tel que $\bar{\varphi}\pi = \varphi$ où $\pi : G \rightarrow G/N$ est la projection canonique.

Remarque 3.1.5. On utilisera la notation $g \equiv h [A]$ pour dire que $\bar{g} = \bar{h}$ dans G/N . On remarque que pour tout $n \in N, g, h \in G$ on a $gnh \equiv gh [A]$.

Théorème 3.1.6. Considérons un diagramme de groupes de la forme

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi_1} & G_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \\ G_2 & & \end{array}$$

Posons $N(H)$ le sous groupe normal de $G_1 * G_2$ engendré par les éléments de la forme $(\varphi_1(h), \varphi_2(h)^{-1})$ avec $\varphi_1(h) \neq e$ et $\varphi_2(h) \neq e$. La somme amalgamée de G_1 et G_2 au dessus de H le long de φ_1 et φ_2 est isomorphe au groupe $G_1 * G_2 / N(H)$

Démonstration. Notons $u_i : G_i \rightarrow G_1 * G_2$ les inclusions canoniques et $v_i = \pi \circ u_i$ où $\pi : G_1 * G_2 \rightarrow G_1 * G_2 / N(H)$ est la projection. Soit $f_i : G_i \rightarrow K$ deux morphismes de groupes tels que $f_1 \circ \varphi_1 = f_2 \circ \varphi_2$. Par la propriété universelle du produit libre, il existe un unique morphisme de groupes $f : G_1 * G_2 \rightarrow K$ tel que $f \circ u_i = f_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Par définition, pour $h \in H$ tel que $\varphi_1(h) \neq e$ et $\varphi_2(h) \neq e$, on a $f(\varphi_1(h), \varphi_2(h)^{-1}) = f_1(\varphi_1(h)) \cdot f_2(\varphi_2(h))^{-1} = e_K$. Donc le morphisme de groupes f passe au quotient $\bar{f} : G_1 * G_2 / N(H) \rightarrow K$ et $\bar{f} \circ v_i = f_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Comme il est unique vérifiant cela, on en déduit le résultat. $\square$

Fin du cours du 11 mars

3.2 Le théorème de Seifert Van Kampen

Théorème 3.2.1. *Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement d'ouverts U_1 et U_2 avec $U_1 \cap U_2, U_1$ et U_2 connexes par arcs. Soit $x_0 \in U_1 \cap U_2$. On a un isomorphisme de groupes*

$$\pi_1(U_1, x_0) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)} \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

Démonstration. On pose $H = \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$, $K = \pi_1(X, x_0)$, $G_1 = \pi_1(U_1, x_0)$ et $G_2 = \pi_1(U_2, x_0)$ et $\varphi_i : H \rightarrow G_i$, $\psi_i : G_i \rightarrow K$ les morphismes de groupes induits par les inclusions canoniques d'espace topologiques. On sait déjà par la version faible du théorème de Van Kampen (proposition 2.3.1) que $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par les images de ψ_1 et ψ_2 . Donc le morphisme de groupes $\psi : G_1 * G_2 \rightarrow K$ est surjectif. Nous allons montrer que $\ker \psi \subset N(H)$ où $N(H)$ est le sous-groupe distingué de $G_1 * G_2$ engendré par

$$\tilde{H} = \{(\varphi_1(h), \varphi_2(h)^{-1}), h \in H, \varphi_1(h) \neq e, \varphi_2(h) \neq e\} \subset G_1 * G_2.$$

Considérons un mot alterné $x = ([\alpha_0], [\alpha_1], \dots, [\alpha_N]) \in G_1 * G_2$, avec sans perte de généralité $[\alpha_0] \in G_1$. On suppose que dans K on a $\psi(x) = [\alpha_0 * \dots * \alpha_N] = [c_{x_0}]$. Le but est de montrer que dans $G_1 * G_2$ on a $x \equiv e [\tilde{H}]$ (avec les notations de la remarque 3.1.5). On note α un chemin représentant de $\psi(x)$. Par hypothèse, il existe $S : I^2 \rightarrow X$ une homotopie de α à c_{x_0} relativement à ∂I . Comme $[0, 1] \times [0, 1]$ est compact et que $\{U_1, U_2\}$ est un recouvrement d'ouverts de X , il existe des pavés $P_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ tels que $S(P_{ij}) \subset U_{l_{ij}}$ avec $l_{ij} \in \{1, 2\}$. Quitte à raffiner le pavage, on peut suppose qu'il existe $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_N = 1$ tel que pour $0 \leq j \leq N - 1$, $S|_{[t_j, t_{j+1}] \times \{0\}} = \alpha_j$. Notons $x_{ij} = S(t_i, s_j)$ et choisissons un chemin γ_{ij} (dans U_1, U_2 ou $U_1 \cap U_2$ selon où se trouve x_{ij}) de x_0 à x_{ij} . Si $x_{ij} = x_0$ on choisit le chemin constant. On construit $S' : I^3 \rightarrow X$ en deux étapes, tel que $S'(t, s, 0) = S$, et $S'(t_i, s_j, v) = \gamma_{i,j}(v)$.

- a) S' étant défini sur les sous-espaces de I^3 de type $[t_i, t_{i+1}] \times \{s_j\} \times \{0\} \cup \{t_i, t_{i+1}\} \times \{s_j\} \times [0, 1]$, on peut remplir les plateaux horizontaux en une application bien définie sur les sous-espaces de I^3 de type $[t_i, t_{i+1}] \times \{s_j\} \times [0, 1]$.
- a') S' étant défini sur les sous-espaces de I^3 de type $\{t_i\} \times [s_j, s_{j+1}] \times \{0\} \cup \{t_i\} \times \{s_j, s_{j+1}\} \times [0, 1]$, on peut remplir les plateaux verticaux en une application bien définie sur les sous-espaces de I^3 de type $\{t_i\} \times [s_j, s_{j+1}] \times [0, 1]$.
- b) S' étant défini sur les sous-espaces de I^3 de type

$$P_{ij} \times \{0\} \cup \{t_i, t_{i+1}\} \times [s_j, s_{j+1}] \times [0, 1] \cup [t_i, t_{i+1}] \times \{s_j, s_{j+1}\} \times [0, 1]$$

on peut remplir les cubes par une application bien définie (et continue) sur les sous-espaces de I^3 de type $P_{ij} \times [0, 1]$.

Remarquons que comme $S(P_{ij}) \subset U_{l_{ij}}$, par les choix faits sur γ_{ij} on peut imposer que ce remplissage vérifie $S'(P_{ij} \times [0, 1]) \subset U_{l_{ij}}$. On a $\alpha_j = S'|_{[t_j, t_{j+1}] \times \{0\} \times \{0\}}$ est un lacet basé en x_0 dans U_{l_j} , donc par les choix faits des γ_{ij} on a $\alpha'_j = S'|_{[t_j, t_{j+1}] \times \{0\} \times \{1\}}$ est un lacet basé en x_0 dans $U_{l_{j0}}$ vérifiant $[\alpha'_j] = [\alpha_j] \in \pi_1(U_{l_{j0}}, x_0)$. Ainsi $x = [\alpha'_0] \dots [\alpha'_N] \in G_1 * G_2$ et $S'|_{[0, 1] \times [0, 1] \times \{1\}}$ fournit une homotopie relativement à ∂I dans X entre $\psi(x)$ et c_{x_0} , vérifiant de plus, pour tout i, j , $S'(t_i, s_j, 1) = x_0$. Notons $c_{ij} = S'|_{[t_i, t_{i+1}] \times \{s_j\} \times \{1\}}$ et $d_{ij} = S'|_{\{t_i\} \times [s_j, s_{j+1}] \times \{1\}}$ et $V_{ij} = S'|_{P_{ij} \times \{1\}}$. Par le lemme 2.2.6, on a $[c_{ij}] = [d_{ij}][c_{ij+1}][\overline{d_{i+1, j}}]$ dans $G_{l_{ij}} = \pi_1(U_{l_{ij}}, x_0)$. Calculons $[c_{i, j}][c_{i+1, j}]$ dans $G_1 * G_2$. Si $l_{ij} = l_{i+1, j} = 1$, alors $[c_{i, j}][c_{i+1, j}] = [d_{i, j}][c_{i, j+1}][c_{i+1, j+1}][\overline{d_{i+2, j}}]$ dans G_1 donc dans $G_1 * G_2$. Le même raisonnement est valable si $l_{ij} = l_{i+1, j} = 2$. Supposons $l_{i, j} = 1$ et $l_{i, j+1} = 2$ alors nécessairement $d_{i+1, j}$ est un lacet dans $U_1 \cap U_2$ basé en x_0 . Donc dans $G_1 * G_2$ on a $\varphi_1([\overline{d_{i+1, j}}])\varphi_2([d_{i+1, j}]) \in N(H)$ donc $[\overline{d_{i+1, j}}][d_{i+1, j}] \equiv e$ $[\tilde{H}]$ et $[c_{ij}] \equiv [d_{ij}][c_{ij+1}][\overline{d_{i+1, j}}]e$ $[\tilde{H}]$. En parcourant ainsi tous les petits carrés on obtient $x \equiv e$ $[\tilde{H}]$. $\square$

3.3 Applications

Définition 3.3.1. Un espace pointé (X, x_0) est **correctement pointé** s'il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$, ouvert et $H : V \times I \rightarrow V$ une homotopie de l'identité à c_{x_0} rel $\{x_0\}$. Autrement dit $\{x_0\}$ est un rétracte par déformation forte de V .

Remarque 3.3.2. Tout espace cellulaire est correctement pointé.

Proposition 3.3.3. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques correctement pointés et connexes par arcs. On a $\pi_1(X \vee Y, x_0 = y_0)$ est isomorphe à $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$.

Démonstration. On note V_{x_0} (respectivement V_{y_0}) un voisinage ouvert de x_0 (resp. y_0) qui se rétracte par déformation forte sur x_0 (resp. y_0). On note $U_1 = V_{x_0} \vee Y$ et $U_2 = X \vee V_{y_0}$. U_1 et U_2 sont deux ouverts connexes par arcs qui recouvrent $X \vee Y$. On a $U_1 \simeq Y$ et $U_2 \simeq X$ (où $\simeq$ est le signe pour désigner deux espaces homotopiquement équivalents). De plus $U_1 \cap U_2 = V_{x_0} \vee V_{y_0}$ est connexe par arcs et contractile. On en déduit le résultat. $\square$

Corollaire 3.3.4. $\pi_1((\mathbb{S}^1)^{\vee n}) = \mathbb{Z}^{*n}$.

Proposition 3.3.5. Soit X un espace connexe par arcs et $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ une application continue. On note x_0 l'image du pôle nord par f . Soit $Y = X \cup_f \mathbb{D}^n$.

1. Si $n \geq 3$, l'injection canonique $X \rightarrow Y$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux basés en x_0 .
2. Si $n = 2$, f définit un élément $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0) / \langle [f] \rangle$.
3. Si $n = 1$ et (X, x_0) est correctement pointé alors $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0) * \mathbb{Z}$.

Démonstration. On note $\mathbb{D}_1^n = \{x \in \mathbb{D}^n \mid \|x\| < \frac{1}{2}\}$ et $A^n = \{x \in \mathbb{D}^n \mid \|x\| > \frac{1}{4}\}$. On note $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ l'application d'attachement, $\phi : \mathbb{D}^n \rightarrow Y$ l'application caractéristique et $i : X \rightarrow Y$ l'inclusion. On pose $U = \phi(\mathbb{D}_1^n)$ et $V = i(X) \cup \phi(A^n)$. U est ouvert car ϕ est ouverte. Montrons que V est un ouvert de Y . Soit $q : X \sqcup \mathbb{D}^n \rightarrow Y$ la projection. On a $q^{-1}(V) = X \sqcup (A^n \cup f^{-1}(X)) = X \sqcup A^n$ est un ouvert de $X \sqcup \mathbb{D}^n$, donc V est ouvert dans Y . Ces deux ouverts recouvrent Y et sont connexes par arcs. De plus U est contractile. On note p_0 le pôle nord de $\mathbb{S}^{n-1}$, $x_0 = f(p_0)$ et $y_0 = q(x_0) = q(p_0)$. En corestreignant $i : X \rightarrow Y$ à V , on a $i : X \rightarrow V$ est un rétracte par déformation forte. Plus précisément pour $i(x) \in i(X)$ on définit $H(i(x), t) = i(x)$ et pour $y \in A^n$, on définit $H(\phi(y), t) = \phi((1-t)y + t\frac{y}{\|y\|})$. Cette application est bien définie car si $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ on a $\phi((1-t)y + t\frac{y}{\|y\|}) = \phi(y) = if(y) \in \phi(\mathbb{S}^{n-1})$.

Elle est également continue. On pose $r : V \rightarrow X$ définie par $r(i(x)) = x$ et $r(\phi(y)) = f(y/||y||)$. Ainsi $ri = id_X$ et ir est homotope à l'identité de V via l'homotopie H . En particulier, i induit un isomorphisme entre $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(V, y_0)$, d'isomorphisme inverse r_* . Par ailleurs $U \cap V$ est homéomorphe à l'ensemble $\{x \in \mathbb{D}^n \mid \frac{1}{4} < ||x|| < \frac{1}{2}\}$, qui est homotopiquement équivalent à $\mathbb{S}^{n-1}$.

On applique le théorème de Van Kampen à l'espace topologique $Y = U \cup V$. Enfin on note z_0 un point de $U \cap V$.

- Pour $n \geq 3$, on a $\pi_1(Y, z_0)$ est isomorphe à $\pi_1(V, z_0)$, car $U \cap V$ est simplement connexe. Cet isomorphisme est donné par l'application $j : V \rightarrow Y$. En particulier on peut toujours choisir un chemin α dans V qui rejoint z_0 à y_0 , qui est aussi un chemin dans Y . On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(V, z_0) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \pi_1(V, y_0) \\ j_* \downarrow & & j_* \downarrow \\ \pi_1(Y, z_0) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

où Φ_α est l'application qui à $[u]$ associe $[\bar{\alpha} * u * \alpha]$. Donc j induit un isomorphisme $\pi_1(V, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$. Donc $i : X \rightarrow Y$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux basés en x_0 et y_0 .

- Pour $n = 2$, l'application d'attachement $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$, est un lacet de X basé en x_0 . On note $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ la classe de ce lacet. Considérons maintenant le lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \cap V$ qui à t associe $\frac{3}{8}e^{2i\pi t}$. On note $z_0 = \gamma(0)$. La classe de ce lacet engendre $\pi_1(U \cap V, z_0)$ (qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$). Par Van Kampen, on a $\pi_1(Y, z_0)$ est isomorphe à $\pi_1(V, z_0)/\langle [\gamma] \rangle$. Montrons que le morphisme $i_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ est donné par le quotient $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)/\langle [f] \rangle$. Pour ce faire, il suffit de constater que $r\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ associe à t , le lacet $f(e^{2i\pi t})$ basé en x_0 . Ainsi l'isomorphisme de groupes $r_* : \pi_1(V, z_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ envoie le générateur $[\gamma]$ de $\pi_1(U \cap V)$ sur la classe du lacet $[f]$ de X basé en x_0 . Le diagramme suivant dont les flèches horizontales sont des isomorphismes, induit que $\pi_1(Y, y_0) = \pi_1(X, x_0)/\langle [f] \rangle$.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(V, z_0) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(V, y_0) \\ j_* \downarrow & & \searrow i_* & & \downarrow j_* \\ \pi_1(Y, z_0) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & & & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

ce qui implique le résultat voulu.

- Pour $n = 1$, Y est obtenu à partir de X en ajoutant une 1-cellule. L'application d'attachement $f : \mathbb{S}^0 \rightarrow X$ étant homotope à l'application constante à un point de X (car X est connexe par arcs) on en déduit que Y est homotopiquement équivalent à $X \vee \mathbb{S}^1$. Or X est correctement pointé d'où le résultat.

□