Revêtements

Contents

1 Revêtements

1.1 Premières définitions

Définition 1.1.1. Une application continue $p : E \to B$ est un **revêtement de** B si tout point $b \in B$ admet $U \in \mathcal{V}(b)$ ouvert tel que $p^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouverts $U_i, i \in I$ avec $p|_{U_i} : U_i \to U$ est un homéomorphisme. On dira que le revêtement est CALCA si E et B sont connexes par arcs et localement connexe par arcs.

Remarque 1.1.2. De manière équivalente, un revêtement $p : E \to B$ est la donnée pour tout $b \in B$ d'un ouvert $U \in \mathcal{V}(b)$, d'un espace discret F_b et d'un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(U) \to U \times F_b$ tel que $\pi_1 \circ \Phi = p|_{p^{-1}(U)}$ où $\pi_1 : U \times F \to U$ est la projection sur la première composante.

Remarque 1.1.3. Tout espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

Vocabulaire: p s'appele **la projection**, $p^{-1}(b)$ **la fibre au-dessus de** b, E **l'espace total**, B **la base**. L'ouvert U s'appelle **ouvert trivialisant**. Les ouverts U_i s'appellent **les feuillets au-dessus de** U.

Remarque 1.1.4. a) Si U est trivialisant alors tout ouvert $V \subset U$ est trivialisant.
b) Si $Y \subset p^{-1}(U)$ est connexe alors $\exists i, Y \subset U_i$.

Démonstration. Pour a), comme $p^{-1}(V) \subset p^{-1}(U) = \cup_i U_i$ on a $p^{-1}(V) = \cup_i p^{-1}(V) \cap U_i$ est bien une union disjointe d'ouverts chaque feuillet étant homéomorphe à V.

Pour b) on écrit $Y = \cup_{i \in I} Y \cap U_i$ et $Y \cap U_i$ est ouvert et fermé de Y. Comme Y est connexe il existe $i \in I$ tel que $Y \cap U_i = Y$. □

Exemple 1.1.5. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ est un revêtement.

Lemme 1.1.6. *Si la base B du revêtement est connexe alors toutes les fibres sont homéomorphes et $p : E \to B$ est surjective.*

Démonstration. Soit $b_0 \in B$ et F_0 la fibre au-dessus de b_0. On note $\Omega_0 = \{b \in B \mid p^{-1}(b) \cong F_0\}$. Ω_0 est ouvert: pour $b \in \Omega_0$, il existe $U \in \mathcal{V}(b)$ ouvert trivialisant tel que $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à $U \times F_0$. Tout $b' \in U$ a pour ouvert trivialisant U et donc $F_{b'} \cong F_0$. Donc $U \subset \Omega_0$.
Ω_0 est fermé: soit $b \notin \Omega_0$ et U un ouvert trivialisant de b. On a donc $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à $U \times F_b$ et $F_b \ncong F_0$. Il en sera de même pour n'importe quel $b' \notin U$. Donc $U \subset {}^c\Omega_0$. Comme B est connexe, Ω_0 est soit vide, soit B tout entier. Pour $e \in E$, en posant $b_0 = p(e)$ on a $\Omega_0 \neq \emptyset$ donc $\Omega_0 = B$. Ce qui prouve que toutes les fibres sont homéomorphes et que p est surjective. □

Définition 1.1.7. Soient $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to B$ deux revêtements. Un *morphisme de revêtements* de p_1 vers p_2 est une application continue $f : E_1 \to E_2$ telle que $p_2 f = p_1$. On note $\mathrm{Hom}(p_1, p_2)$ l'ensemble des morphismes de p_1 vers p_2.

Remarque 1.1.8. Soit B un espace topologique. La définition ci-dessus fournit une catégorie que l'on notera $\mathcal{R}\mathrm{ev}(B)$ (la catégorie dont les objets sont les revêtements $p : E \to B$, et les morphismes sont explicités ci-dessus). Un isomorphisme dans $\mathrm{Hom}(p,p)$ est appelé **automorphisme** du revêtement p. On notera $\mathrm{Aut}(p)$ le groupe des automorphismes de p.

1.2 Exemples fondamentaux de revêtements

Proposition 1.2.1. *Soit E un espace topologique, G un groupe agissant sur E par homéomorphisme. On suppose que l'action est totalement discontinue: pour tout $x \in E$, il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $g \in G$, $gU \cap U \neq \emptyset \Rightarrow g = e$. Alors $\pi : E \to E/G$ est un revêtement de fibre $G \cdot b$ au-dessus de $[b]$.*

Démonstration. Voir TD □

Exemple 1.2.2. $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translation. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.
$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{S}^1$ par action antipodale. $\mathbb{S}^1/G$ est homéormorphe à $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ (lui-même homéomorphe à $\mathbb{S}^1$). Le revêtement considéré est l'application $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ qui à z associe z^2. C'est un revêtement à deux feuillets. De même l'application continue $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ qui à z associe z^n est un revêtement à n feuilets.

1.3 Relèvements des applications

Soit $p : E \to B$ un revêtement de B.

On se pose la question de savoir si $f : Y \to B$ continue se **relève** en une application $\tilde{f} : Y \to E$, c'est-à dire telle que $p\tilde{f} = f$.

Lemme 1.3.1. *Soient f_0, f_1 deux relèvements de f. $W = \{y \in Y | f_0(y) = f_1(y)\}$ est ouvert et fermé dans Y. Ainsi si Y est connexe deux relèvements de f qui coincident en un point sont égaux.*

Démonstration. Montrons que W est un ouvert dans Y. Soit $y \in W$, U un ouvert trivialisant de $f(y)$, et U_i le feuillet de U contenant $f_0(y) = f_1(y)$. On a $y \in V = f_0^{-1}(U_i) \cap f_1^{-1}(U_i)$. V est ouvert dans Y et $V \subset W$: en effet pour $z \in V$ on a $pf_0(z) = pf_1(z) = f(z)$ et p réalise un homéomorphisme $U_i \to U$ donc est injective sur U_i, donc $f_0(z) = f_1(z)$. Donc V est un ouvert de W qui contient y.

Montrons que W est fermé dans Y ou de manière équivalente que $Y \setminus W$ est ouvert dans Y. Soit $y \in Y$ tel que $f_0(y) \neq f_1(y)$, et U un ouvert trivialisant de $f(y)$. Il existe i, j tel que $f_0(y) \in U_i$ et $f_1(y) \in U_j$. De plus $i \neq j$ car sinon cela contredirait le fait que p est un homéomorphisme de U_i sur U. Alors $f_0(U_i)^{-1} \cap f_1(U_j)^{-1}$ est un ouvert de $Y \setminus W$ contenant y.

Conclusion W est vide ou $W = Y$. Si deux relèvements de f coincident en un point alors $W \neq \emptyset$ et donc les deux relèvements sont égaux. $\square$

Fin du cours du 25 mars 2025

1.3.1 Relèvements des homotopies, et des chemins

Théorème 1.3.2. *On fixe $\tilde{f} : Y \to E$ et $H : Y \times [0,1] \to B$ continues telles que $H(y,0) = p\tilde{f}(y)$. On suppose Y localement connexe. Il existe un unique relèvement $\tilde{H} : Y \times [0,1] \to E$ de H tel que $\tilde{H}(y,0) = \tilde{f}(y)$.*

Démonstration. Pour $(y,t) \in Y \times I$, choisissons un ouvert trivialisant $U_{y,t}$ de $H(y,t)$. Comme H est continue, il existe $V_{y,t} \times Z_{y,t} \subset H^{-1}(U_{y,t})$ voisinage de (y,t) avec $V_{y,t}$ ouvert de Y et $Z_{y,t}$ ouvert de I. I est recouvert par les $Z_{y,t}$, avec t parcourant $[0,1]$ donc il existe $0 = t_0^y < t_1^y \ldots < t_{N_y}^y = 1$ et $s_j^y, 0 \leq j < N_y$, tels que $[t_i^y, t_{i+1}^y] \subset Z_{y,s_i^y}$. On pose $V_y \subset \cap_j V_{y,s_j}$, ouvert de Y et connexe. Ainsi

$$H(V_y \times [t_j^y, t_{j+1}^y]) \subset U_{y,s_j^y}.$$

Comme p est un revêtement, il existe un ouvert $W_{y,0}$ de E, homéomorphe (via p) à U_{y,s_0^y} tel que $\tilde{f}(y) \in W_{y,0}$ car $p\tilde{f}(y) = H(y,0)$. On définit

$$\tilde{H} : V_y \times [0, t_1^y] \to E, \text{ par } \tilde{H}(z,t) = (p|_{W_{y,0}}))^{-1} \circ H.$$

On a $\tilde{H}_0 : V_y \to E$, qui à z associe $\tilde{H}(z,0)$ et $\tilde{f} : V_y \to E$ sont deux relèvement de $H_0 : V_y \to B$et coincident en y. Comme V_y est connexe, on en déduit par unicité que $\forall z \in V_y$, $\tilde{H}(z,0) = \tilde{f}(z,0)$.

Supposons $\tilde{H} : V_y \times [0, t_j^y] \to E$ construite, continue avec $p\tilde{H}(y,t) = H(y)$. Comme p est un revêtement, il existe un ouvert W_{y,s_j^y} de E, homéomorphe (via p) à U_{y,s_j^y} tel que $\tilde{H}(y, t_j^y) \in W_{y,s_j^y}$ car $p\tilde{H}(y,t_j^y) = H(y,t_j^y) \in U_{y,s_j^y}$. On définit

$$\tilde{H}^j : V_y \times [t_j^y, t_{j+1}^y] \to E, \text{ par } \tilde{H}^j = (p|_{W_{y,s_j^y}}))^{-1} \circ H.$$

Pour la même raison que précdémment $\tilde{H}^j_{t_j} : V_y \times \{t_j^y\} \to E$ et $\tilde{H}_{t_j} = V_y \times \{t_j^y\}$ coincident en y et relèvent $H_{t_j} : V_y \times \{t_j^y\} \to B$. Donc sont égales sur V_y. Ainsi on a construit une application continue $\tilde{H} : V_y \times [0,1] \to E$, qui relève $H : V_y \times [0,1] \to B$ et telle que $\tilde{H}(z,0) = \tilde{f}(z)$. Soit $z \in V_{y_0} \cap V_{y_1}$. On note $\tilde{H}_0 : V_{y_0} \times [0,1] \to E$ le relèvement sur V_{y_0} et $\tilde{H}_1$ le relèvement sur V_{y_1}. En considérant les deux applications $\tilde{H}_0(z,-), \tilde{H}_1(z,-) : [0,1] \times E$, ce sont deux relèvements de H qui conincident en 0. Comme $[0,1]$ est connexe, on en déduit qu'ils sont égaux. Cela permet donc de définir une unique application continue $\tilde{H} : Y \times [0,1] \to E$ qui vérifie les propriétés requises. $\square$

Corollaire 1.3.3. *(Relèvement des chemins) Soit $e_0 \in E, b_0 \in B, p(e_0) = b_0$. Tout chemin de B de source b_0 se relève de manière unique en un chemin de E de source e_0.*

Démonstration. Il suffit de prendre $Y = \{*\}$, l'espace topologique singleton dans le théorème précédent. $\square$

Corollaire 1.3.4. *Soient g_0, g_1 deux chemins de même source dans E tel que pg_0 et pg_1 sont homotopes à extrémités fixées; alors g_0 et g_1 sont homotopes à extrémités fixées dans E.*

En particuler l'application $p_* : \pi_1(E,x) \to \pi_1(B,p(x))$ est injective.

Démonstration. Soit $H : [0,1] \times [0,1] \to B$ une homotopie à extrémités fixées entre pg_0 et pg_1. On applique le théorème précédent en choisissant $\tilde{f} = g_0 \colon [0,1] \to E$. Cela fournit une unique application $\tilde{H} \colon [0,1] \times [0,1] \to E$ tel que $p \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}(t,0) = g_0(t)$. Le chemin $\tilde{H}(0,s)$ relève le chemin constant $c_{pg_0(0)}$ et vérifie $\tilde{H}(0,0) = g_0(0)$ donc c'est le chemin constant de valeur $g_0(0)$. On a alors $\tilde{H}(t,1)$ relève le chemin pg_1 et $\tilde{H}(0,1) = g_0(0) = g_1(0)$. Par unicité on a $\tilde{H}(t,1) = g_1(t)$. Enfin le chemin $\tilde{H}(1,s)$ relève le chemin constant de valeur $pg_0(1)$ et vérifie $\tilde{H}(1,0) = g_0(1)$ donc c'est le chemin constant de valeur $g_0(1)$. Conclusion $g_1(1) = \tilde{H}(1,1) = g_0(1)$ et $\tilde{H}$ est une homotopie à extrémités fixées entre le chemin g_0 et le chemin g_1. Soient γ, γ' deux lacets de E basés en x, tel que $[p\gamma] = [p\gamma']$. On en déduit immédiatement $[\gamma] = [\gamma']$. □

Remarque 1.3.5. On rappelle que le groupoïde fondamental $\Pi(X)$ d'un espace topologique X est un catégorie dont les objets sont les points de X et dont l'ensemble des morphismes de x à y est donné par $\Pi(X)(x,y) = \{f : [0,1] \to X \mid f(0) = x, f(1) = y\}/\simeq_{\{0,1\}}$. Le théorème précédent montre que si $p : E \to B$ est un revêtement, le foncteur $p_* : \Pi(E) \to \Pi(B)$ vérifie que pour tous $x, y \in E$ l'application sur les morphismes $\Pi(E)(x,y) \to \Pi(B)(p(x), p(y))$ est injective.

1.3.2 Relèvements des applications

Théorème 1.3.6. *Soit $p : E \to B$ un revêtement tel que $p(e_0) = b_0$. Soit $f : Y \to B$ continue telle que $f(y_0) = b_0$. Si Y est CALCA, alors f admet un relèvement $\tilde{f}$ (unique avec $\tilde{f}(y_0) = e_0$) ssi $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$.*

Démonstration. Si $p\tilde{f} = f$ alors il est clair que $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$.
Etudions la réciproque. Si le relèvement existe, comme Y est connexe, alors il est unique. Montrons maintenant l'existence; pour $z \in Y$ on choisit un chemin $\gamma_z : [0,1] \to Y$ de y_0 à z (Y est connexe par arcs). Le chemin $f \circ \gamma_z : [0,1] \to B$ se relève en un unique chemin $\alpha_z : [0,1] \to E$ tel que $\alpha_z(0) = e_0$. On note $\tilde{f}(z) = \alpha_z(1)$. Il faut montrer que $\tilde{f}(z)$ ne dépend pas du choix du chemin γ_z et défini une application continue $Y \to E$. Soit β un autre chemin de y_0 à z. $\beta * \overline{\gamma_z}$ est un lacet de Y basé en y_0. Par hypothèse, il existe donc un lacet δ de E basé en e_0 tel que $[f \circ (\beta * \overline{\gamma_z})] = [p \circ \delta]$, ou encore $[(f \circ \beta)] = [(p \circ \delta) * (f \circ \gamma_z)]$. Soit $\alpha' : [0,1] \to E$, l'unique chemin qui relève $f \circ \beta$ et tel que $\alpha'(0) = e_0$, on a $p[\alpha'] = p([\delta * \alpha_z])$. Par le corollaire 1.3.4, on en déduit $[\alpha'] = [\delta][\alpha_z]$ donc $\alpha'(1) = \alpha_z(1) = \tilde{f}(z)$. Remarquons également que si $\gamma : [0,1] \to Y$ est un chemin de y à z et $\tilde{\alpha}$ est l'unique chemin de E de source $\tilde{f}(y)$ tel que $p \circ \tilde{\alpha} = f \circ \gamma$ alors $\tilde{f}(z) = \tilde{\alpha}(1)$. En effet, le chemin $\gamma_y * \gamma$ est un chemin de e_0 à z et $\tilde{\alpha}_y * \tilde{\alpha}$ le relève, donc $\tilde{f}(z) = \tilde{\alpha}(1)$.

Fixons $y \in Y$, choisissons un ouvert U trivialisant de $f(y)$, V_y un voisinage de y connexe par arcs inclus dans $f^{-1}(U)$. Enfin soit $U' \subset E$ le feuillet au-dessus de U contenant $\tilde{f}(y)$. L'application $V_y \to U'$ définie par $\tilde{g} = p|_{U'}^{-1} \circ f$ est continue. Montrons que pour tout $z \in V_y$ on a $\tilde{g}(z) = \tilde{f}(z)$. Comme V_y est connexe par arcs il existe un chemin α dans V_y de y à z. $\tilde{g} \circ \alpha$ est un chemin de $\tilde{g}(y) = \tilde{f}(y)$ à $\tilde{g}(z)$ dans U' qui relève le chemin $f \circ \alpha$. Donc par ce qui a été vu précédemment $\tilde{f}(z) = \tilde{g}(\alpha(1)) = \tilde{g}(z)$. Conclusion $\tilde{f}$ coincide avec $\tilde{g}$ continue sur V_y donc $\tilde{f}$ est continue. □

Exemple 1.3.7. Soit Y un espace CALCA. $f : Y \to \mathbb{S}^1$ admet un relèvement $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$ si et seulement si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = 0$. Si $Y = \mathbb{S}^1$ on a f admet un relèvement si et seulement f est homotope à une application constante. Si $Y = \mathbb{S}^n$ toute application f admet un relèvement.

1.4 Revêtement universel

Définition 1.4.1. Un revêtement universel est un revêtement CALCA d'espace total simplement connexe.

Proposition 1.4.2. *Soit $p_u : \tilde{X} \to B$ un revêtement universel et $p : E \to B$ un revêtement. Soit $b_0 \in B$ et $x_0 \in E, \tilde{y}_0 \in \tilde{X}$ dans la fibre au dessus de b_0. Il existe un unique $f \in Hom(p_u, p)$ tel que $f(\tilde{y}_0) = x_0$. En particulier, un revêtement universel est unique à isomorphisme près.*

Définition 1.4.3. Un espace B est semi-localement simplement connexe si $\forall b \in B$ il existe $U \in \mathcal{V}(b)$ tel que $\pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ soit triviale.

Théorème 1.4.4. *Soit B un espace CALCA. B admet un revêtement universel ssi B est semi-localement simplement connexe.*

Démonstration. Si B admet un revêtement universel E, alors pour $b \in B$ on choisit U un voisinage trivialisant de b et $U_i \in p^{-1}(U)$ un feuillet au-dessus de U, $x \in U_i$ tel que $p(x) = b$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_i, x) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "j_*"'] & \pi_1(U, b) \arrow[d, "i_*"] \\ \pi_1(E, x) \arrow[r, "p_*"'] & \pi_1(B, b) \end{tikzcd}$$

La flèche horizontale supérieure est un isomorphisme car $p|_{U_i} : U_i \to U$ est un homéomorphisme. De plus $i_* p_*$ est triviale car $\pi(E, x) = \{e\}$. Donc i_* est triviale et B est semi-localement simplement connexe.

On suppose que B est semi-localement simplement connexe et on fixe $b_0 \in B$. La démonstration de l'existence d'un revêtement universel se fait en plusieurs étapes.

Etape 1-Construction de l'ensemble E et de la projection $p\colon E \to B$. On définit l'ensemble

$$E = \{\gamma : [0,1] \to B \mid \gamma(0) = b_0\}/ \simeq_{\{0,1\}},$$

et $p\colon E \to B$ l'application qui à $[\gamma]$ associe $\gamma(1)$, qui est bien définie.

Etape 2–Topologie sur E. On définit $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts U de B tels que U est connexe par arcs et tel qu'il existe $b \in U$ satisfaisant $\pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ est triviale (constante égale à l'élément neutre). Montrons que $\mathcal{U}$ est une base de la topologie de B. Soit $b \in B$ et V un voisinage de b. Comme B est semi-localement simplement connexe, il existe W un voisinage de b tel que $\pi_1(W, b) \to \pi_1(B, b)$ est triviale. Comme B est localement connexe par arcs, il existe $U \subset V \cap W$ ouvert connexe par arcs et voisinage de b. On a alors $\pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ est triviale. Donc $U \in \mathcal{U}$ et $U \subset V$. Ainsi $\mathcal{U}$ es tune base de la topologie de B.

Soit $x = [\gamma] \in E$ et $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de $p(x) = \gamma(1)$. On pose

$$U_x = \{[\gamma * \beta] \in E \mid \beta : [0,1] \to U \text{ et } \beta(0) = p(x)\}.$$

Par définition, la topologie sur E est la topologie engendrée par l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{U_x; x \in E, U \in \mathcal{U}\}$$

Montrons quelques lemmes utiles pour la suite.

Lemme 1.4.5. *On a $U_x = U_y \iff x \in U_y \iff y \in U_x$*

Démonstration. On remarque que $x = [\gamma] \in U_x$ car U étant un voisinage de $p(x) = \gamma(1)$, on a $x = [\gamma * c_{p(x)}]$ avec $c_{p(x)}$ est un chemin à valeurs dans U. Ainsi $U_x = U_y \Rightarrow x \in U_y$. Si $y \in U_x$, alors $y = [\gamma * \beta]$ avec $\beta : [0,1] \to U$ vérifiant $\beta(0) = p(x)$ et $\beta(1) = p(y)$, donc $x = [\gamma * \beta * \bar{\beta}]$ et $\bar{\beta} : [0,1] \to U$, donc $x \in U_y$. On a donc montré la deuxième équivalence. Supposons $y \in U_x$, avec $y = [\gamma * \beta]$ et prenons $z \in U_x$, alors $z = [\gamma * \rho] = [\gamma * \beta * \bar{\beta} * \rho]$, et ρ et $\bar{\beta}$ sont à valeurs dans U, donc $z \in U_y$. Conclusion $y \in U_x \Rightarrow U_x \subset U_y$ et $y \in U_x \Rightarrow x \in U_y \Rightarrow U_y \subset U_x$. Le lemme est démontré. $\square$

Lemme 1.4.6. *Soient U_x et V_y dans $\mathcal{V}$. Soit $z \in U_x \cap V_y$ alors il existe $W_z \in \mathcal{V}$ tel que $z \in W_z \subset U_x \cap V_y$. En particulier $\mathcal{V}$ est une base pour la topologie engendrée par $\mathcal{V}$.*

Démonstration. On pose $x = [\gamma]$, $y = [\rho]$ et $z = [\gamma * \alpha] = [\rho * \beta]$ où α est un chemin de $p(x)$ à $p(z)$ dans U et β un chemin de $p(y)$ à $p(z)$ dans V. On choisit W dans $\mathcal{U}$ un voisinage de $p(z)$ inclus dans $U \cap V$ (possible car $\mathcal{U}$ est un base pour la topologie de B). Remarquons que $W_z \subset U_z$ car si $z = [\gamma']$ tout élément de W_z s'écrit $[\gamma' * \beta'$ avec β' à valeurs dans $W \subset U$ donc dans U. On a alors $W_z \subset U_z = U_x$ et $W_z \subset V_z = V_y$ par le lemme 1.4.5, donc $W_z \subset U_x \cap U_y$. Par définition de la topologie engendrée, tout ouvert O s'écrit comme union quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{V}$. Soit $x \in O$, il existe une famille finie U_{i,x_i} d'éléments de $\mathcal{V}$ tel que $x \in \cap_i U_{i,x_i}$. Donc il existe $W_x \in \mathcal{V}$ tel que $x \in W_x \subset O$. $\square$

Etape 3. L'application p est continue.
Soit $b \in B$ et $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de b. On a

$$p^{-1}(U) = \cup_{\gamma :\, [0,1] \to B, \gamma(0) = b_0, \gamma(1) = b}\, U_{[\gamma]}.$$

En effet, si $x = [\gamma * \beta] \in U_{[\gamma]}$ alors $p(x) \in U$. Réciproquement si $x = [\alpha] \in p^{-1}(U)$, alors $p(x) \in U$ et comme U est connexe par arcs, il existe $\beta : [0,1] \to U$ tel que $\beta(0) = b$ et $\beta(1) = p(x)$. Donc $x = [\alpha * \bar{\beta} * \beta] \in U_{[\alpha * \bar{\beta}]}$. Donc $p^{-1}(U)$ est un ouvert de E.
Remarquons également que l'union est disjointe d'après le lemme 1.4.5.

Etape 4. L'application p est un revêtement. Soit $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de b. L'étape précédente permet de dire que $p^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouverts du type $U_{[\gamma]}$ où γ est un chemin dans B de b_0 à b. Il reste à montrer que $p : U_{[\gamma]} \to U$ est bijective et ouverte. Pour $c \in U$, connexe par arcs, il existe un chemin α de b vers c. Ainsi $c = p([\gamma * \alpha])$, et l'application est surjective. Supposons $c = p([\gamma * \alpha]) = p([\gamma * \beta])$ où α et β sont des chemins dans U de b vers c. Le lacet $\alpha * \bar{\beta}$ basé en b et à valeurs dans U est homotope (à extrémités fixées) au lacet constant c_b, car $\pi_1(U, a) \to \pi_1(B, a)$ est triviale. Ainsi $[\alpha * \bar{\beta}] = [c_b]$ et $[\alpha] = [\beta]$ et $[\gamma * \alpha] = [\gamma * \beta]$. Donc p est injective. Montrons que p est ouverte. Soit $V_y \in \mathcal{V}$ avec $V_y \subset U_{[\gamma]}$. Pour tout $z \in V_y$ on a $p(z) \in V$ donc $p(V_y) = V$ et l'application est ouverte.

Etape 5. E est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $x = [\gamma] \in E$. On note $\gamma_s = [0,1] \to B$ le chemin défini par $\gamma_s(t) = \gamma(st)$. On a $\gamma = \gamma_1$ et $\gamma_0 = c_{b_0}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} F_\gamma : & [0,1] & \longrightarrow & E \\ & s & \longmapsto & [\gamma_s] = [t \mapsto \gamma(st)]. \end{array}$$

Si l'on montre que F_γ est continue, alors F_γ est une homotopie entre $[c_{b_0}]$ et $[\gamma]$ ce qui démontre que E est connexe par arcs.

Remarquons que pour $s \in [0,1]$, $p(F_\gamma(s)) = \gamma(s)$ donc $p \circ F_\gamma = \gamma$. Fixons $s_0 \in [0,1]$, $U \in \mathcal{U}$ un voisinage de $\gamma(s_0)$. On a

$$p^{-1}(U) = \sqcup_{\alpha:[0,1]\to B}\, U_{[\alpha]}$$

avec $\alpha(0) = b_0$ et $\alpha(1) = \gamma(s_0)$. On a $F_\gamma(s_0) = [\gamma_{s_0}] \in U_{[\gamma_{s_0}]}$. Comme γ est continue (en s_0), il existe $\epsilon > 0$ et $V =]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[\cap [0,1]$ tel que $\gamma(V) \subset U$ et $\gamma(V) \in \mathcal{U}$. Par ailleurs $p|_{U_{[\gamma_{s_0}]}} : U_{[\gamma_{s_0}]} \to U$ est un homéomorphisme. On pose $\tilde{\gamma} : V \to U_{[\gamma_{s_0}]} \subset E$ l'application définie par $\tilde{\gamma} = (p|_{U_{[\gamma_{s_0}]}})^{-1} \circ \gamma$. Fixons $s \in V$. Le chemin $\alpha\colon t \mapsto \gamma((1-t)s_0 + ts)$ est à valeurs dans $\gamma(V) \subset U$ et on a $[\gamma_{s_0} * \alpha] = [\gamma_s]$. Donc pour tout $s \in V$ on a $F_\gamma(s) \in U_{[\gamma_{s_0}]}$. De plus $(p \circ F_\gamma)(s) = \gamma(s) = (p \circ \tilde{\gamma})(s)$. Comme p est injective sur $U_{[\gamma_{s_0}]}$, on en déduit que $F_\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s)$ continue sur V. Donc F_γ est continue.
E est localement connexe par arcs, car tout $x = [\gamma]$ in E admet un voisinnage U_x homéomorphe à U connexe par arcs.

Etape 6. E est simplement connexe. Considérons $\alpha : [0,1] \to E$ un lacet basé en $[c_{b_0}]$. Alors $p \circ \alpha$ est un lacet basé en b_0. Notons $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to E$ l'application (continue d'après l'étape précédente) qui à s associe $[t \mapsto (p \circ \alpha)(st)]$. Pour tout $s \in [0,1], (p \circ \tilde{\alpha})(s) = (p \circ \alpha)(s \times 1) = (p \circ \alpha)(s)$, donc $p \circ \tilde{\alpha} = p \circ \alpha$. De plus $\tilde{\alpha}(0) = [c_{b_0}] = \alpha(0)$. Donc $\tilde{\alpha} = \alpha$, par unicité des relèvements des chemins. En particulier $\tilde{\alpha}(1) = [c_{b_0}] = [t \mapsto p(\alpha(t))]$. Conclusion l'application $p_*\colon \pi_1(E, [c_{b_0}]) \to \pi_1(B, b_0)$ est triviale. Comme $E \to B$ est un revêtement, le morphisme de groupes $p_*\colon \pi_1(E, [c_{b_0}]) \to \pi_1(B, b_0)$ est injectif, donc $\pi_1(E, [c_{b_0}])$ est réduit à l'élément neutre. □

1.5 Monodromie des revêtements

On se fixe $p : E \to B$ un revêtement, $b \in B$, $x \in E, p(x) = b$ et γ un lacet de B basé en b. On note $\tilde{\gamma}_x$ l'unique chemin de source x qui relève γ.

Théorème 1.5.1. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(b) \times \pi_1(B,b) & \to & p^{-1}(b) \\ (x, [\gamma]) & \mapsto & \tilde{\gamma}_x(1) \end{array}$$

est bien définie, est une action de groupe (à droite) et est appelée **monodromie du revêtement sur la fibre** $p^{-1}(b)$.

Théorème 1.5.2.
1. *$Stab(x) = p_*(\pi_1(E,x)) \subset \pi_1(B,b)$.*
2. *Si E est connexe par arcs*
   (a) *L'action de monodromie est transitive, en particulier $p^{-1}(b)$ est en bijection avec $\pi_1(B,b)/p_*(\pi_1(E,x))$.*
   (b) *Les groupes $p_*(\pi_1(E,x))$ pour $x \in p^{-1}(b)$ forment une classe de conjugaison dans $\pi_1(B,b)$.*

Démonstration.
1. $Stab(x) = \{[\gamma] | x \cdot \gamma = x\}$ Donc $[\gamma] \in Stab(x)$ ssi $[\gamma] = p_*[\tilde{\gamma}]$ avec $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = x$.
2. (a) Si E est connexe par arcs alors pour tout $x, y \in p^{-1}(b)$ il existe $\tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ un chemin de x à y. Donc $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ est un lacet basé en b et $x \cdot [\gamma] = y$. L'action est transitive, et le résultat suit par le théorème qui met en bijection les orbites et les quotient par les stabilisateurs.

(b) Par la théorie des groupes on a $[\bar{\gamma}]Stab(x)[\gamma] = Stab(x \cdot [\gamma])$ pour tout $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$. On en déduit le résultat puisque l'action est transitive sur les fibres.

□

Corollaire 1.5.3. *Si $p : E \to B$ est un revêtement, si E est connexe par arcs et B simplement connexe alors p est un homéomorphisme.*

Démonstration. B étant connexe par arcs les fibres sont toutes de même cardinal et $p^{-1}(b)$ est en bijection avec $\{x\}$, donc toutes les fibres sont de cardinal 1. p est donc injective et surjective. De plus pour tout $x \in E$ en prenant U un ouvert trivialisant de $p(x)$ on trouve U_i voisinage de x tel que $p : U_i \to U$ est un homéomorphisme. On en déduit que p est ouverte. □

1.6 Automorphismes de revêtements

Remarque essentielle: $f \in \mathrm{Hom}(p_1, p_2)$ est un relèvement de p_1 au-dessus de p_2, car on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ E_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p_1"'] & B \end{tikzcd}$$

Ainsi si E_1 est connexe et si $f, g \in \mathrm{Hom}(p_1, p_2)$ sont tels que $f(x) = g(x)$ pour un certain $x \in E_1$ alors $f = g$.

Lemme 1.6.1. *La donnée de $f \in \mathrm{Hom}(p_1, p_2)$ et de $b \in B$, induit une application*

$$\begin{array}{rccc} f_b : & p_1^{-1}(b) & \to & p_2^{-1}(b) \\ & \tilde{x}_1 & \mapsto & f(\tilde{x}_1) \end{array}$$

équivariante sous l'action de $\pi_1(B, b)$: pour tout $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ on a $f_b(x \cdot [\gamma]) = f_b(x) \cdot [\gamma]$.

Démonstration. Soit γ un lacet de B basé en b. On choisit un relèvement $\tilde{\gamma}_2$ de γ pour p_2 de source $f(\tilde{x}_1)$ et $\tilde{\gamma}_1$ un relèvement de γ pour p_1 de source $\tilde{x}_1$. On a alors $f \circ \tilde{\gamma}_1$ est un relèvement pour p_2 de γ de même source que $\tilde{\gamma}_2$ donc ils sont homotopes à extrémités fixées. En particulier $f(\tilde{\gamma}_1(1)) = \tilde{\gamma}_2(1)$ ce qui se traduit par $f(\tilde{x}_1 \cdot [\gamma]) = f(\tilde{x}_1) \cdot [\gamma]$. □

On note $\mathrm{Hom}_{\pi_1(B,b)}(p_1^{-1}(b), p_2^{-1}(b))$ l'ensemble des morphismes équivariants sous l'action par monodromie.

Fin du cours du 1er avril 2025

Théorème 1.6.2. *Soient p_1, p_2 des revêtements CALCA de base B et $b \in B$. L'application*

$$\begin{array}{rccc} r_b : & \mathrm{Hom}(p_1, p_2) & \to & \mathrm{Hom}_{\pi_1(B,b)}(p_1^{-1}(b), p_2^{-1}(b)) \\ & f & \mapsto & f_b \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. On rappelle que l'action par monodromie est transitive car E_1 et E_2 sont connexes par arcs. Montrons que r_b est bijective. Fixons $x_1 \in E_1$, tel que $p_1(x_1) = b$. Par transitivité de l'action par monodromie, tout $h : p_1^{-1}(b) \to p_2^{-1}(b)$ équivariant sous l'action de monodromie est entièrement déterminé par sa valeur $h(x_1)$. De plus p_1 admet un unique relèvement $\tilde{p}_1$ par rapport à p_2 tel que $\tilde{p}_1(x_1) = h(x_1)$ si et seulement si $(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_1)) \subset (p_2)_*(\pi_1(E_2, h(x_1)))$. Soit γ_1 un lacet de E_1 basé en x_1. Remarquons que

$$h(x_1) = h(x_1 \cdot [p_1 \circ \gamma_1]) = h(x_1) \cdot [p_1 \circ \gamma_1],$$

donc $[p_1 \circ \gamma_1]$ est dans le stablilisateur de $h(x_1)$ sous l'action par monodromie. Ainsi, il existe un lacet γ_2 de E_2 tel que $[p_2 \circ \gamma_2] = [p_1 \circ \gamma_1]$. Les conditions sont ainsi réunies pour prouver l'existence et l'unicité d'un relèvement f de p_1 tel que $f(x_1) = h(x_1)$. Ceci implique qu'il existe un unique f tel que $r_b(f) = h$. □

Corollaire 1.6.3. *Si p est un revêtement CALCA, l'application induite*

$$\mathrm{Aut}(p) \to \mathrm{Bij}_{\pi_1(B,b)}(p^{-1}(b))$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. On a f est un automorphisme de revêtement si et seulement si $r_b(f)$ est bijective. Il suffit de montrer que $r_b(f \circ g) = r_b(f) \circ r_b(g)$ ce qui est évident. □

Proposition 1.6.4. *Soit $p : E \to B$ un revêtement CALCA. Le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ agit de manière libre et totalement discontinue sur E. En particulier, pour tout sous-groupe G de $\mathrm{Aut}(p)$ le morphisme $E \to E/G$ est un revêtement.*

Démonstration. Soit $x \in E$ et $f \in \mathrm{Aut}(p)$ tel que $f(x) = x$. Alors par unicité des relèvements, on a $f = \mathrm{id}$.
Soit U un ouvert trivialisant de $p(x)$ et U_i le feuillet au-dessus de U contenant x. Soit $f \in \mathrm{Aut}(p)$ tel que $U_i \cap f(U_i) \neq \emptyset$. Il existe $y, z \in U_i$ tel que $y = f(z)$. On a $p(y) = pf(z) = p(z)$. Or $p|_{U_i} : U_i \to U$ est un homéomorphisme, donc $y = z$ et $f = \mathrm{id}$. Le TD6, exo 3 montre que $E \to E/G$ est un revêtement. □

1.7 Revêtements galoisiens

Théorème 1.7.1. *Soit $p\colon E \to B$ un revêtement CALCA. On dit que p est* **galoisien** *s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivants*

1. *$\exists x \in E$ tel que $p_*(\pi_1(E, x))$ est distingué dans $\pi_1(B, p(x))$.*
2. *$\forall x \in E, p_*(\pi_1(E, x))$ est distingué dans $\pi_1(B, p(x))$.*
3. *Le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ agit sur $p^{-1}(b)$ de manière transitive.*

Démonstration. Clairement (2) $\Rightarrow$ (1). On a montré que les groupes $p_*(\pi_1(E, x))$ pour $x \in p^{-1}(b)$ forment une classe de conjugaison de $\pi_1(B, b)$, donc (1) $\Rightarrow$ (2). Notons que (2) est équivalent à ($2'$): pour tous $x, y \in p^{-1}(b)$, $p_*(\pi_1(E, x)) = p_*(\pi_1(E, y))$. En effet, pour $y = x \cdot [\gamma]$ on a $p_*(\pi_1(E, y)) = [\bar{\gamma}]p_*(\pi_1(E, x))[\gamma]$.

Le Théorème 1.3.6 nous dit que $p_*(\pi_1(E, x)) = p_*(\pi_1(E, y))$ est équivalente à l'existence et l'unicité de $f \in \mathrm{Aut}(p)$ tel que $f(x) = y$. Donc ($2'$) $\Leftrightarrow$ (3). □

Remarque 1.7.2. Dans le cas d'un revêtement galoisien on a $p^{-1}(b)$ est en bijection avec $\mathrm{Aut}(p)$ et est en bijection avec $\pi_1(B, b)/p_*(\pi_1(E, x))$, pour tout $x \in p^{-1}(b)$. Dans la proposition ci-dessous on établi directement un isomorphisme de groupes entre $\mathrm{Aut}(p)$ et $\pi_1(B, b)/p_*(\pi_1(E, x)$.

Proposition 1.7.3. *Soit $p : E \to B$ un revêtement galoisien, $b_0 \in B$ et $x_0 \in E$ tel que $p(x_0) = b_0$. L'action par monodromie induit un isomorphisme de groupes*

$$\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0)) \to \operatorname{Aut}(p)$$

L'isomorphisme réciproque $\operatorname{Aut}(p) \to \pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0))$ associe à f l'unique classe d'un lacet γ de B basé en x_0 tel que $f(x_0) = x_0 \cdot [\gamma]$.

Démonstration. Fixons $x_0 \in E$ tel que $p(x_0) = b_0$. On note $\mu : \pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0)) \to p^{-1}(b_0)$ l'application qui à $\widehat{[\gamma]}$, où $\widehat{z}$ désigne la classe de $z \in \pi_1(B, b_0)$ modulo le sous-groupe distingué $p_*(\pi_1(E, x_0))$, associe le point $x_0 \cdot [\gamma] \in p^{-1}(b)$. On a vu que pour E CALCA, μ est bijective. Notons $h_0 \colon : p^{-1}(b_0) \to \operatorname{Aut}(p)$ l'application qui à x associe l'unique automorphisme f_x tel que $f_x(x_0) = x$ (existe car le revêtement est galoisien). On rappelle que si $x = x_0 \cdot [\gamma]$ alors $f_x(x_0) = x_0 \cdot [\gamma]$ et pour tout $y = x_0 \cdot [u]$ on a $f_x(y) = f(x_0) \cdot [u] = x_0 \cdot [\gamma * u]$. L'application composée

$$\Phi : \pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, x_0)) \to \operatorname{Aut}(p)$$

associe à $\widehat{[\gamma]}$ l'unique élément de $\operatorname{Aut}(p)$ tel que $\Phi(\widehat{[\gamma]})(x_0 \cdot [u]) = x_0 \cdot [\gamma * u]$. Notons $f = \Phi(\widehat{[\gamma]})$ et $g = \Phi(\widehat{[\alpha]})$ alors $(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0)) = f(x_0 \cdot [\alpha]) = x_0 \cdot [\gamma * \alpha]$. Donc $f \circ g = \Phi(\widehat{[\gamma * \alpha]})$. L'application Φ est donc un morphisme de groupes. □

Exemple 1.7.4. Le revêtement $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ est galoisien, donc $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ est isomorphe à $\operatorname{Aut}(p)$. Or, pour $n \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto n + t$ est un automorphisme de ce revêtement et c'est l'unique automorphisme qui envoie 0 sur n. Donc $\operatorname{Aut}(p)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et il en est de même pour $\mathbb{S}^1$.

Théorème 1.7.5. *Soit E un espace CALCA et G agissant sur E par homéomorphisme et de façon totalement discontinue. Alors $q : E \to E/G$ est un revêtement galoisien et le groupe* $\operatorname{Aut}(q)$ *est isomorphe à G. De plus le groupe G est isomorphe à $\pi_1(E/G, q(x))/q_*(\pi_1(E, x))$, pour tout $x \in E$.*
Réciproquement si $p : E \to B$ est un revêtement galoisien alors il existe un homéomorphisme $\Phi : E/\operatorname{Aut}(p) \to B$ tel que $\Phi \circ q = p$.

Démonstration. On sait déjà que c'est un revêtement CALCA. Il faut voir qu'il est galoisien. Pour ce faire, nous montrons que $\operatorname{Aut}(q)$ agit transitivement sur les fibres. Nous contruisons un isomorphisme de groupes $\rho : G \to \operatorname{Aut}(q)$ qui à g associe l'automorphisme de revêtement donné par $\rho(g)(x) = g \cdot x$. L'application ρ est clairement un morphisme de groupes. Montons que ρ est un isomorphisme de groupes. Comme G agit sur E de façon totalement discontinue, ρ est injective. Soit $f \in \operatorname{Aut}(q)$ et $x_0 \in E$. Posons $\bar{x}_0 = q(x_0)$. On a $f(x_0) \in q^{-1}(\bar{x}_0)$ donc il existe $g \in G$ tel que $f(x_0) = g \cdot x_0$, c'est-à-dire $f(x_0) = \rho(g)(x_0)$. Comme f et $\rho(g)$ sont deux relèvements de q et coincident en un point on a $f(x) = \rho(g)(x), \forall x \in E$. Comme G agit transitivement sur les fibres, il en va de même pour $\operatorname{Aut}(q)$. Le revêtement est donc galoisien. On a montré que le groupe G est isomorphe au groupe $\operatorname{Aut}(q)$, lui-même isomorphe à $\pi_1(E/G, q(x))/q_*(\pi_1(E, x))$.
Réciproquement, soit $p : E \to B$ un revêtement galoisien. Par la Proposition 1.6.4 on sait que $\operatorname{Aut}(p)$ agit de manière libre et totalement discontinue sur E et que $E \to E/\operatorname{Aut}(p)$ est un revêtement. Par ailleurs, pour tout $f \in \operatorname{Aut}(p)$ comme $pf = f$ on a une unique application continue $\Phi : E/\operatorname{Aut}(p) \to B$ telle que $\Phi \circ q = p$. Montrons que Φ est ouverte: soit U un ouvert de $E/\operatorname{Aut}(p)$, c'est-à-dire $q^{-1}(U)$ est un ouvert de E et comme q est surjective on a $q(q^{-1}(U)) = U$; donc $\Phi(U) = \Phi(q(q^{-1}(U))) = p(q^{-1}(U))$ est ouvert car p est ouverte. De même

Φ est surjective car p est surjective. Montrons que Φ est injective. Soient $\bar{x}, \bar{y} \in E/\operatorname{Aut}(p)$ tels que $\Phi(\bar{x}) = p(x) = \Phi(\bar{y}) = p(y)$. Comme $\operatorname{Aut}(p)$ agit transitivement sur les fibres, il existe $f \in \operatorname{Aut}(p)$ tel que $f(x) = y$. Donc $\bar{x} = \bar{y}$. Conclusion Φ est un homéomorphisme. □

Exemple 1.7.6. 1. $\mathbb{Z}^n$ opère sur $\mathbb{R}^n$ par translations, par homéomorphisme et de façon totalement discontinue. Cela donne le revêtement CALCA $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ et $\operatorname{Aut}(q)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. On retrouve le calcul du groupe fondamental du tore et donc de $\mathbb{S}^1$.

2. $q_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ qui à $z \mapsto z^n$ est un revêtement. Le groupe des racines n-ième de l'unité $\mathcal{U}_n$ agit sur $\mathbb{S}^1$ par multiplication et on a q_n surjective induit un homéomorphisme $\pi : \mathbb{S}^1/\mathcal{U}_n \to \mathbb{S}^1$

   Note: $\mathbb{S}^1$ quasi-compact, $\mathbb{S}^1/\mathcal{U}_n$ aussi et $\mathbb{S}^1$ séparé implique $\bar{q}_n$ homéomorphisme. La composition $\pi^{-1}q_n$ est la projection.

   Donc q_n est un revêtement CALCA, galoisien et $\operatorname{Aut}(q_n)$ est isomorphe à $\mathcal{U}_n$.

3. Pour $n \geq 2$, $S^n \to P_n(\mathbb{R})$ est un revêtement galoisien: $P_n(\mathbb{R}) = S^n/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit librement et proprement sur S^n. On retrouve $\pi_1(P_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1.8 Classification des revêtements

Théorème 1.8.1 (Classification des revêtements)**.** *Soit B un espace CALCA admettant un revêtement universel, et $b \in B$. On a une bijection entre les classes d'isomorphismes de revêtements CALCA au-dessus de B et les classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(B, b)$.*

Démonstration. Vue en cours. □

Théorème 1.8.2 (Correspondance de Galois)**.** *Soit B un espace CALCA admettant un revêtement universel, et $b_0 \in B$. On a une bijection entre les classes d'isomorphismes de revêtements pointés CALCA au-dessus de (B, b_0) et les sous-groupes de $\pi_1(B, b_0)$.*

Démonstration. A tout $p : (E, x) \to (B, b_0)$ revêtement pointé on associe le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x))$ de $\pi_1(B, b_0)$. On note (E, p, x) un revêtement pointé au dessus de (B, b_0). Si $f : (E, x) \to (E', x')$ vérifie $p' \circ f = p$ est un homéomorphisme alors $p_*(\pi_1(E, x)) = p'_*(\pi_1(E', x')$. En notant $\operatorname{Rev}_*(B, b_0)$ les classes d'isomorphismes de revêtements pointés au dessus de (B, b_0) et $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(B, b_0)$ on obtient une application bien définie

$$\psi : \operatorname{Rev}_*(B, b_0) \to \mathcal{H}$$

Montrons que ψ est injective. Soient (E, p, x) et (E', p', x') deux revêtements pointés au-dessus de (B, b_0) tels que $p_*(\pi_1(E, x)) = p'_*(\pi_1(E', x')$. Alors il existe un unique $f : (E, x) \to (E', x')$ et $g : (E', x') \to (E, x)$ tels que $p'f = p$, $f(x) = x'$ et $pg = p'$, $g(x') = x$. Ainsi $f \circ g$ est un relèvement de p' et vérifie $(f \circ g)(x') = x'$ donc $f \circ g = \mathrm{id}_{E'}$ et de même $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Donc les deux revêtements coincident dans $\operatorname{Rev}_*(B, b_0)$.
Montrons que ψ est surjective. Fixons $H \subset \mathcal{H}$. Le groupe $H = \{e\}$ est l'image de la classe du revêtement universel $(\tilde{E}, x_0, p)$. Le groupe $H = \pi_1(B, b_0)$ est l'image du revêtement id : $(B, b_0) \to (B, b_0)$. On peut donc supposer que H est un sous-groupe propre de $\pi_1(B, b_0)$. De plus on peut supposer que $(B, b_0) = (\tilde{E}/\operatorname{Aut}(p), \overline{x_0})$. Soit

$$\Gamma : \operatorname{Aut}(p) \to \pi_1(B, b_0)$$

l'isomorphisme induit par le revêtement universel, qui est galoisien. Notons $K = \Gamma^{-1}(H) \subset \mathrm{Aut}(p)$ et considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{E}, x_0) \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & (E/\mathrm{Aut}(p), b_0) \\
& (\tilde{E}/K, [x_0]) \arrow[ur, "\bar{p}"'] &
\end{tikzcd}$$

Montrons que $\bar{p}$ est un revêtement. Soit $x \in \tilde{E}$ et U un ouvert voisinage de $\tilde{x}$ tel que, pour tout $f \in \mathrm{Aut}(p)$, $f(U) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow f = \mathrm{id}$. On a $p(U)$ est un ouvert trivialisant de $p(x)$ et On a

$$p^{-1}(p(U)) = \sqcup_{f \in \mathrm{Aut}(p)} f(U)$$

Soit $M \subset \mathrm{Aut}(p)$ un sous-ensemble de représentants de $\mathrm{Aut}(p)/K$. On a

$$p^{-1}(p(U)) = \sqcup_{m \in M} \sqcup_{h \in K} mh(U) = \sqcup_{m \in M} m(W), \text{ avec } W = \sqcup_{h \in K} h(U) \subset \tilde{E}$$

Notons $V = q(W)$, c'est un ouvert de $\tilde{E}/K$ car $q^{-1}(V) = W$. De même $V_m = q(m(W))$ est un ouvert de $\tilde{E}/K$ homéomorphe à V. et

$$\bar{q}^{-1}(U) = \sqcup_{m \in M} V_m$$

est une union disjointe d'ouverts. La restriction $\bar{q}|_V : V \to p(U)$ est continue, surjective et ouverte. Montrons qu'elle est injective. Soient α, β in V tels que $\bar{p}(\alpha) = \bar{p}(\beta)$. Il existe $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in U$ tel que $q(\tilde{\alpha}) = \alpha$ et $q(\tilde{\beta}) = \beta$. Alors $\bar{p}(\alpha) = (\bar{p} \circ q)(\tilde{\alpha}) = p(\tilde{\alpha}) = p(\tilde{\beta})$. Or $p|_U : U \to p(U)$ est un homéomorphisme donc $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ et $\alpha = \beta$. Enfin comme q est un revêtement galoisien la composition

$$\mathrm{Aut}(q) = K \xrightarrow{\simeq} \pi_1(E/K, [x_0]) \xrightarrow{\bar{p}_*} \pi_1(B, b_0)$$

coincide avec la restriction de $\Gamma : \mathrm{Aut}(p) \to \pi_1(B, b_0)$ sur K donc $\bar{p}_*(\pi_1(E/K, [x_0]) = \Gamma(K) = H$. $\square$