

## Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

Muriel Livernet

### TABLE DES MATIÈRES

|                                                               |   |
|---------------------------------------------------------------|---|
| 1. Manipulations matricielles                                 | 1 |
| 1.1. Matrices élémentaires                                    | 1 |
| 1.2. Manipulations élémentaires                               | 1 |
| 1.3. Matrices échelonnées                                     | 2 |
| 2. Applications                                               | 3 |
| 2.1. Résolution de système linéaires                          | 3 |
| 2.2. Calcul de l'inverse d'une matrice inversible             | 4 |
| 2.3. Méthode de Gauss pour échelonner une famille de vecteurs | 4 |
| 2.4. Décomposition LU                                         | 4 |
| 2.5. Générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$  | 4 |

(Voir la leçon 162 *Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.*)

### 1. MANIPULATIONS MATRICIELLES

**1.1. Matrices élémentaires.** On fixe  $\mathbb{K}$  un corps. On note  $M_{p,n}(\mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices ayant  $p$  lignes et  $n$  colonnes et  $M_n(\mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n$ . Pour  $M$  une matrice, on notera  $(M)_{i,j}$  son coefficient qui se trouve à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$ .

Pour  $1 \leq i \leq p$ , et pour  $1 \leq j \leq n$ , on note  $E_{i,j}^{p,n}$  la matrice de  $M_{p,n}(\mathbb{K})$  (ou  $E_{i,j}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $(p,n)$ ) dont tous les coefficients sont nuls sauf à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$  où le coefficient vaut 1.

**Proposition 1.1.1.** *La famille  $\{E_{i,j}^{p,n}\}_{i,j}$  forme une base de  $M_{p,n}(\mathbb{K})$  ; ainsi le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $M_{p,n}(\mathbb{K})$  est de dimension  $pn$ . On a pour tous  $1 \leq i, j, k, l \leq p$*

$$E_{i,j}^{p,n} E_{k,l}^{n,m} = \delta_{j,k} E_{i,l}^{p,m},$$

où  $\delta_{j,k}$  désigne le symbole de Kronecker.

*Exercice 1.1.2.* Démontrer la proposition.

**1.2. Manipulations élémentaires.** Dans cette partie on va faire des manipulations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice  $M \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ . Pour ce faire on multipliera à gauche par des matrices carrées de taille  $p$  et à droite par des matrices carrées de taille  $n$ . On ne précisera donc plus  $(p,n)$  dans cette partie. Les exercices suivants ne sont pas indépendants, et tous les résultats sont des propositions à connaître et à savoir redémontrer.

*Exercice 1.2.1.* Donner l'effet d'une multiplication (à gauche, puis à droite) par une matrice de type  $E_{ij}$ .

**Exercice 1.2.2.** Pour  $\sigma \in S_n$ , on note  $P_\sigma$  la matrice dans  $M_n(\mathbb{K})$  définie par

$$(P_\sigma)_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j} = \sum_{j=1}^n E_{\sigma(j),j}$$

- (1) Montrer que l'application  $S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$  qui à  $\sigma$  associe  $P_\sigma$  est un morphisme de groupes injectif.
- (2) Montrer que pour toute matrice  $M$  multiplier à gauche (rep. à droite) par la matrice  $P_{(ij)}$  (où  $(ij)$  est la transposition qui échange  $i$  et  $j$ ) revient à échanger les lignes (resp. colonnes)  $i$  et  $j$  de la matrice  $M$ .

Les manipulations élémentaires sur les “rangées” (une “rangée” est, soit une ligne, soit une colonne) d'une matrice sont de trois sortes :

- (i) L'interversion de deux rangées, symbolisée par  $L_i \leftrightarrow L_j$  ou  $C_i \leftrightarrow C_j$ .
- (ii) La multiplication d'une rangée par un scalaire  $a$  non nul, symbolisée par  $L_i \leftarrow aL_i$  ou  $C_i \leftarrow aC_i$ .
- (iii) Le remplacement d'une rangée par la combinaison d'elle-même et d'une autre rangée, symbolisé par  $L_i \leftarrow L_i + aL_j$  ou  $C_i \leftarrow C_i + aC_j$ . (Ici  $a \in \mathbb{K}$  peut être nul).

**Exercice 1.2.3.** (1) On se place dans  $M_p(\mathbb{K})$ . Pour  $a \in \mathbb{K}$  et  $1 \leq i \neq j \leq p$  on note  $T_{i,j}(a) = \text{Id}_p + aE_{i,j}$ . Une telle matrice s'appelle matrice de *transvection*. Pour  $a \neq 0 \in \mathbb{K}$ , on note  $D_i(a) = \text{Id} + (a-1)E_{i,i}^{p,p}$ . Une telle matrice s'appelle matrice de *dilatation*. Montrer que ces matrices sont inversibles et calculer leur inverse.

- (2) Montrer que les transformations (ii) et (iii) s'obtiennent en multipliant à gauche ou à droite par une matrice que l'on déterminera.

- (3) Effectuer de deux manières (sans calcul) :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (4) Montrer que

$$P_{(ij)} = D_i(-1)T_{i,j}(-1)T_{j,i}(1)T_{i,j}(-1)$$

En déduire que les matrices de permutation sont dans le sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  engendré par les transvections et dilatations.

**Remarque 1.2.4.** On vient donc de voir que faire des manipulations sur les lignes, type méthode du pivot de Gauss est équivalent à multiplier à gauche par des matrices élémentaires, et faire des manipulations sur les colonnes revient à multiplier à droite par des matrices élémentaires. On a vu également qu'échanger deux lignes d'une matrice revient à multiplier par des matrices de transvection et de dilatation uniquement.

**Proposition 1.2.5.** On ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice de transvection, ni de dilatation. On ne change pas le déterminant de  $M$  en la multipliant par une matrice de transvection. Le déterminant d'une matrice de dilatation  $D_i(a)$  est  $a$ .

**1.3. Matrices échelonnées.** On fixe  $M = (m_{i,j})$  une matrice de  $M_{n,p}(\mathbb{K})$ .

**Définition 1.3.1.** Une matrice  $M$  est dite *échelonnée* (selon les lignes) s'il existe  $r \in \{0, \dots, n\}$  tel que

- (1) Les  $r$  premières lignes de  $M$  ne sont pas nulles
- (2) Les  $n - r$  dernières lignes sont toutes nulles.

(3) Pour tout  $1 \leq k \leq r-1$

$$\min\{j \mid m_{k,j} \neq 0\} < \min\{j \mid m_{k+1,j} \neq 0\}$$

Pour  $1 \leq k \leq r$ , on note  $j_k = \min\{j \mid m_{k,j} \neq 0\}$  et  $m_{k,j_k}$  s'appelle le  $k$ -ième pivot. Une matrice  $M$  est dite *échelonnée réduite* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- a)  $\forall 1 \leq k \leq r, m_{k,j_k} = 1$
- b)  $\forall 1 \leq k \leq r, \forall 1 \leq l \leq n, l \neq k \Rightarrow m_{l,j_k} = 0$ .

*Exercice 1.3.2.* Ecrire la définition pour un échelonnement selon les colonnes.

*Remarque 1.3.3.* On remarque que dans le cas où  $M$  est échelonnée selon les lignes, son rang est le nombre de lignes non nulles.

**Théorème 1.3.4.** Pour toute matrice  $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ , il existe  $U \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $M' = UM$  soit une matrice échelonnée réduite (selon les lignes). De plus  $M'$  est unique. Ainsi on pourra parler de la "forme échelonnée réduite" (selon les lignes) d'une matrice  $M$ . Pour toute matrice  $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ , il existe  $V \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  tel que  $M'' = MV$  soit une matrice échelonnée réduite (selon les colonnes). De plus  $M''$  est unique. Ainsi on pourra parler de la "forme échelonnée réduite" (selon les colonnes) d'une matrice  $M$ .

*Démonstration.* Faite en séance. □

*Exercice 1.3.5.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est échelonnée en ligne, mais n'est pas réduite. Elle n'est pas échelonnée en colonne. Donnez sa forme échelonnée réduite en ligne et en colonne.

*Remarque 1.3.6.* Dans le cadre du théorème si  $M \in M_n(\mathbb{K})$  est carrée alors  $M'$  est triangulaire supérieure et  $M''$  est triangulaire inférieure.

## 2. APPLICATIONS

**2.1. Résolution de système linéaires.** On rappelle que l'on peut présenter un système de  $p$  équations linéaires à  $n$  inconnues comme une équation matricielle  $AX = B$  où  $A$  est une matrice de taille  $p \times n$  et  $X$  et  $B$  sont des vecteurs colonnes à  $n$  lignes.

*Exercice 2.1.1.* Résoudre les systèmes suivants :

$$(S1) \begin{cases} x + 5z + 5t = -5 \\ y - 2z - 3t = 3 \end{cases} \quad (S2) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad (S3) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y - z = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

*Exercice 2.1.2.* Discuter en fonction du paramètre  $\alpha$  les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y + 2z = 3 \end{cases}$$

*Exercice 2.1.3.* Pour quelles valeurs des paramètres réels  $\alpha, \beta, \gamma$  le système suivant admet au moins une solution ?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 3x + 8y - 14z = \beta \\ 2x + 4z = \gamma \end{cases}$$

## 2.2. Calcul de l'inverse d'une matrice inversible.

**2.3. Méthode de Gauss pour échelonner une famille de vecteurs.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On se donne une famille de vecteurs  $\mathcal{F}_0 = \{v_1, \dots, v_p\}$  par leurs composantes dans la base  $\mathcal{B}$ . En utilisant des opérations élémentaires (sur les vecteurs) on transforme cette famille  $\mathcal{F}_0$  en une nouvelle famille  $\mathcal{F}_1$  de vecteurs de  $E$ , plus simple, avec conservation d'un certain nombre de propriétés, en particulier  $\text{Vect}(\mathcal{F}_0) = \text{Vect}(\mathcal{F}_1)$ .

*Exercice 2.3.1.* On se donne la matrice de la famille de vecteurs, ici  $p = 4$  et  $n = 5$  comme suit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -5 & 11 \\ 2 & -2 & -10 & 12 \end{pmatrix}$$

avec  $\mathcal{F}_0$  la famille des vecteurs colonnes  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

- (1) Echelonner la matrice selon les colonnes.
- (2) En déduire une base dont on exprimera chaque vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{F}_0$ .
- (3) Montrer que la famille  $\mathcal{F}_0$  est liée et donner une relation de liaison entre ses vecteurs.
- (4) Compléter cette base en une base de  $E$  à l'aide de certains vecteurs de  $\mathcal{B}$ .
- (5) En déduire un supplémentaire de  $\text{Vect}(\mathcal{F}_0)$  dans  $E$ .

**2.4. Décomposition LU.** Soit  $M$  une matrice carrée de taille  $n$ . On note  $\Delta_k$  le déterminant de la matrice carrée de taille  $k$  obtenue à partir de  $M$  par extraction des  $k$  premières lignes et  $k$  premières colonnes.

**Théorème 2.4.1.** Soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Si pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on a  $\Delta_k \neq 0$  alors  $A = LU$  avec  $L$  triangulaire inférieure et  $U$  triangulaire supérieure et pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $L_{ii} = 1$ .

*Démonstration.* Faite en séance. □

*Remarque 2.4.2.* Remarquez que si  $A = LU$  avec les notations du théorème alors pour tout  $k$  on a  $\Delta_k \neq 0$ .

*Remarque 2.4.3.* Avec cette méthode on peut résoudre un système  $MX = B = LUX$  en résolvant deux systèmes

$$LY = B \text{ et } UX = Y$$

## 2.5. Générateurs de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ .

**Théorème 2.5.1.** Le groupe  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  est engendré par les matrices de transvection et de dilatation. Le groupe  $\text{SL}_n(\mathbb{K})$  est engendré par les matrices de transvection.

*Démonstration.* Fait en séance. □

Les corollaires suivants ont été vus en cours

- Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ,  $\text{SL}_n(\mathbb{K})$  est connexe par arcs.
- Le groupe  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  est engendré par les matrices inversibles diagonalisables.
- Les transvections sont toutes conjuguées dans  $\text{GL}_n(E)$  et pour  $n \geq 3$  elles sont conjuguées dans  $\text{SL}_n(E)$ .